ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



Р4 - 7768



Б.Н.Захарьев, С.А.Ниязгулов, А.А.Сузько

# ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ЯДРА

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р4 - 7768

Б.Н.Захарьев, С.А.Ниязгулов, А.А.Сузько

# ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ЯДРА

*Направлено в ЯФ*

Одной из основных задач ядерной физики является определение динамических характеристик различных систем взаимодействующих нуклонов по наблюдаемым на опыте величинам. Сейчас параметры взаимодействия /гамильтониан H / находят методом подгонки: многократным решением уравнения Шредингера подбирают силы, дающие значения указанных величин, близкие к экспериментальным данным. Проблема непосредственного восстановления взаимодействия по данным рассеяния /обратная задача/ была решена лишь для движения одной частицы во внешнем поле /см. обзор в /1/ /. Но и в этом случае практическому использованию теории обратной задачи мешало то обстоятельство, что в классической постановке для определения потенциала V необходимо знать матрицу рассеяния в неограниченном интервале энергий. Причем пренебрежение вкладом высших энергий, при которых уже неприменимо уравнение Шредингера, вносит в потенциал погрешность, вызывающую не поддающееся априорной оценке искажение матрицы рассеяния.

Недавно была дана новая формулировка обратной задачи для сил ограниченного радиуса действия "a" /2/, позволяющая строить V по дискретному набору параметров R -матричной теории рассеяния $E_\lambda$ и $\gamma_\lambda^2$ /положениям резонансов и их приведенным ширинам/ [*].

---

[*] Обратная задача для потенциалов $V(r \geq a) = 0$ рассматривалась уже в /3,4/. Было показано, что V можно восстановить по дискретному набору спектральных параметров, для определения каждого из которых, однако, нужно знать фазу рассеяния как непрерывную функцию энергии в неограниченном интервале.

В настоящей работе на ее основе предлагается приближенный метод восстановления V по матрице рассеяния на конечном энергетическом интервале, обеспечивающий строгое взаимнооднозначное соответствие V и исходных значений $E_\lambda$ и $\gamma_\lambda^2$. Приближение состоит в обычной для конкретных приложений замене дифференциальных уравнений движения конечно-разностными /к.-р./. Такое приближение уже использовалось в подходах Гельфанда-Левитана /5/ и Марченко /6/, но при этом делалось дополнительное предположение о величине потенциала: $V\Delta \ll 1$, где $\Delta$ - выбранный шаг к.-р. дифференцирования*. К тому же спектральные характеристики в /5,6/ оставались непрерывными функциями от энергии вместо конечного числа параметров $E_\lambda$, $\gamma_\lambda^2$. Мы будем частично использовать здесь технику, развитую в /5/.

Благодаря дискретности энергетической и координатной переменных, в нашем подходе решение задачи сводится к конечному числу чисто алгебраических операций**. Такой алгебраический подход удобен в том отношении, что открывает сравнительно простой путь анализа таких проблем, как чувствительность потенциала по отношению к вариациям исходных данных и т.п. Для потенциалов, имеющих при $r > a$ известное поведение /дальнодействующий "хвост"/ требуется лишь небольшая модификация метода, существенно расширяющая класс задач, к которым применима рассматриваемая теория.

Во втором разделе работы выводятся основные уравнения метода на примере одномерного движения частицы во внешнем поле /один канал/ и дается обобщение формализма для случая комплексного потенциала.

В разделе 3 обратная задача в рамках R-матричной теории формулируется для системы связанных уравнений /много каналов/. Это позволяет восстанавливать потенциалы, не обладающие сферической симметрией /в приближении конечного числа сферических гармоник/, тензорные силы и т.д.

Поскольку к многоканальным уравнениям сводится описание систем с произвольным числом тел, развитый аппарат применяется в разделе 4 к определению динамических характеристик 3-х взаимодействующих частиц /в частности, многочастичных сил/.

В приложении кратко излагается к.-р. аналог R-матричной теории рассеяния.

## *2. Конечно-разностный аналог обратной задачи в R-матричной теории /одноканальный случай/*

Будем исходить из уравнения Шредингера в к.-р. приближении:

$$-\frac{1}{2}\,[\Psi(E,n+1)-2\Psi(E,n)+\Psi(E,n-1)]/\Delta^2+V(n)\,\Psi(E,n)=E\Psi(E,n), \quad /1/$$

где $\Psi(E,n)$ и $V(n)$ - значения волновой функции и потенциала в точках $r_n$, которые делят интервал $0 \le r \le a$ на N равных частей /шагов/ с длиной $r_{n+1}-r_n=\Delta$ /можно было выбрать шаг переменной длины $\Delta_n$ /.

Требуется найти $V(n)$ по матрице рассеяния $S(E)$. Непосредственно из /1/ $V(n)$ определить нельзя, так как функция $\Psi$ нам неизвестна, а $S(E)$ задает ее поведение лишь при $r \ge a$ /предполагается, что $V(r \ge a)=0$ /. Можно, однако, пользуясь свойством полноты собственных функций гамильтониана, построить сначала решения $\phi(E,n)$ уравнения /1/, отвечающие граничным условиям*:

$$\phi(E,N)=1/\sqrt{2a}\,; \quad \phi(E,N+1)=\phi(N)\,(1+\Delta B/a) \qquad /2/$$

по решениям $\overset{\circ}{\phi}(E,n)$ свободного к.-р. уравнения Шредингера:

---

* См. также математическое исследование /7/, касающееся обратной задачи для к.-р. уравнений.

** Интересно, что в свое время обратная задача рассеяния была получена как континуальный аналог соответствующего результата теории якобиевых матриц в линейной алгебре.

* Второе соотношение в /2/ соответствует тому, что к.-р. логарифмическая производная от $\phi$ в точке "a" равна некоторой константе $B/a$.

$$-\frac{1}{2}\,[\mathring{\phi}(E,n+1)-2\mathring{\phi}(E,n)+\mathring{\phi}(E,n-1)]/\Delta^2=E\mathring{\phi}(E,n) \qquad /3/$$

с темя же условиями /2/ * . По $\phi(E,n)$ можно будет затем из /1/ определить и $V(n)$.

В качестве указанных собственных функций выберем решения $u(E_\lambda, n)\equiv u_\lambda(n)$ уравнения /1/ с однородными условиями при $r=0$ и $r=a$:

$$u_\lambda(0)=0;\quad u_\lambda(N+1)=u_\lambda(N)(1+\Delta B/a).. \qquad /4/$$

Имеется всего N таких решений при значениях энергии $E=E_\lambda$. Они удовлетворяют условию ортонормировки

$$\sum_{n=1}^{N}\Delta u_\lambda(n)\,u_{\lambda'}(n)=\delta_{\lambda\lambda'} \qquad /5/$$

и образуют полный набор в классе функций заданных в N-точках /в N-мерном векторном пространстве/:

$$\sum_{\lambda}^{N} u_\lambda(n)\,u_\lambda(m)=\delta_{mn}. \qquad /6/$$

Соотношение /6/ можно рассматривать и как условие ортонормировки по переменной $E_\lambda$.

Поскольку $u_\lambda(n)$ и $\phi(E,n)$ являются решениями одного и того же к.-р. уравнения второго порядка с одним общим граничным условием при $r=a$ /см. /2/ и /4//, то $u_\lambda(n)$ отличается от $\phi(E,n)$ лишь постоянным множителем $\gamma_\lambda$ /при тех значениях энергии $E=E_\lambda$, при которых существуют $u_\lambda(n)$ /:

$$u_\lambda(n)=\gamma_\lambda\,\phi(E_\lambda,n),\quad \text{где }\ \gamma_\lambda\equiv u_\lambda(N)\sqrt{2a}. \qquad /7/$$

Используя /7/, перепишем /6/ в виде:

$$\sum_{\lambda}^{N}\gamma_\lambda^2\,\phi(E_\lambda,n)\,\phi(E_\lambda,m)=\delta_{mn}, \qquad /8/$$

что соответствует ортонормировке $\phi$ по мере $\rho(E)=\sum_\lambda\Theta(E-E_\lambda)\,\gamma_\lambda^2$ , где $\Theta(x)=\{0$ при $x<1;\ 1$ при $x\ge 0\}$:

---

* О решении уравнения /3/ см. М.С.Бахвалов "Численные методы", §7, Москва, Наука, 1973 г.



$$\int\phi(E,n)\,\phi(E,m)\,d\rho(E)=\delta_{mn}. \qquad /8'/$$

Как функции энергии, $\phi(E,n)$ и $\mathring{\phi}(E,n)$ являются, согласно /1/, /3/ и условию $\phi(E,N)=\mathring{\phi}(E,N)=1/\sqrt{2a}$, полиномами степени $N-n$: $\phi(E,n)=\sum_{i=0}^{N-n}C_iE^i$; $\mathring{\phi}_{(E,n)}=\sum_{i=0}^{N-n}\mathring{C}_iE^i$.

Они образуют два базиса одного и того же N-мерного пространства полиномов степени $N-1$ с общим элементом $\phi(E,N)\,\mathring{\phi}(E,N)=1/\sqrt{2a}$. Поэтому решения $\phi(E,n)$ уравнения /1/ с потенциалом V могут быть получены путем простой ортогонализации $\phi(E,n)$ по мере $\rho(E)$:

$$\phi(E,N)=\mathring{\phi}(E,N);$$

$$\phi(E,N-1)=K(N-1,N)\,\mathring{\phi}(E,N)+K(N-1,N-1)\,\mathring{\phi}(E,N-1);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\phi(E,n)=K(n,N)\,\mathring{\phi}(E,N)+K(n,N-1)\,\mathring{\phi}(E,N-1)+\ldots+K(n,n)\,\mathring{\phi}(E,n);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad /9/$$

$$\phi(E,1)=K(1,N)\,\mathring{\phi}(E,N)+\ldots+K(1,1)\,\mathring{\phi}(E,1);$$

где коэффициенты K определяются из условий ортогональности /по мере $\rho$ / функций $\phi(E,n)$ к функциям $\phi(E,m)$ при $m>n$ или /что эквивалентно/ к $\mathring{\phi}(E,m)$ $(m>n)$ и нормировки /8/ при $m=n$:

$$q(m,n)+\sum_{p=n+1}^{N}k(m,p)\,q(p,n)=0,\quad \text{при}\quad m>n;$$

$$q(n,n)+\sum_{p=n+1}^{N}k(n,p)\,q(p,n)=1/K^2(n,n),\ \text{при } m=n;\quad K(n,n)>0, \qquad /10/$$

где $k(n,m)=K(n,m)/K(n,n)$; $q(m,n)=\sum_{\lambda}^{N}\gamma_\lambda^2\,\mathring{\phi}(E_\lambda,m)\,\mathring{\phi}(E_\lambda,n)$.

Уравнения /10/ являются алгебраическим аналогом уравнений Гельфанда-Левитана.

Итак, по заданным $E_\lambda$ и $\gamma_\lambda^2$ /см. приложение/ находим $q$, затем, решая систему алгебраических уравнений /10/, определяем K и, подставляя $\phi$ в форме /9/ в /1/, после умножения уравнения на $\phi(n)$ и суммирования по n с учетом /3/, получаем:

$$V(n)=\frac{1}{2}\ \frac{K(n-1,n)-K(n,n+1)}{K(n,n)\Delta^2}=\{k(n-1,n)-k(n,n+1)\}/2\Delta^2. \qquad /11/$$

Таким образом, в N-мерном пространстве обратная задача сформулирована точно и решение уравнения /1/ с потенциалом /11/ должно дать R-/а значит и S- / матрицу, отвечающую строго исходным параметрам $E_\lambda$, $\gamma_\lambda^2$ *.

Наличие в искомом потенциале V известной дальнодействующей компоненты $V_Д$ : $V=V_K+V_Д$ не мешает восстанавливать $V_K$ предложенным способом. Для этого нужно лишь находить параметры $E_\lambda$, $\gamma_\lambda^2$ по модифицированной формуле, связывающей матрицы R и S /см. приложение/.

В случае комплексного потенциала мнимые составляющие появляются во вспомогательных решениях $u_\lambda(n)$, $\phi(E,n)$ и в параметрах $E_\lambda$, $\gamma_\lambda$. Вместо ортогональности / по координатной и энергетической переменным/ используется биортогональность наборов $\{u_\lambda(n)\}$ и $\{u_\lambda^*(n)\}$. Благодаря тому, что $(u_\lambda^*(n))^*=u_\lambda(n)$, вид формул /1/-/11/ не изменяется, когда V перестает быть реальным, только нужно учитывать, что входящие в них величины становятся комплексными.

---

*Представляет интерес вопрос о классе наборов $\{E_\lambda,\gamma_\lambda\}$, по которым может быть восстановлен потенциал V.



### 3. Восстановление матрицы взаимодействия

В случае M связанных каналов вместо /1/ имеем систему к.-р. уравнений:

$$-\frac{1}{2}\Delta^2\{F_\alpha(E,n+1)-2F_\alpha(E,n)+F_\alpha(E,n-1)\}+ \qquad /12/$$
$$+\sum_{\alpha'}^{M} V_{\alpha\alpha'}(n)\,F_{\alpha'}(E,n)=EF_\alpha(E,n);$$

полагаем, что $V_{\alpha\alpha'}(n\geq N)=0$.

В качестве базисного набора возьмем решения /12/, отвечающие однородным краевым условиям:

$$u_{\alpha\lambda}(0)=0;\quad u_{\alpha\lambda}(N+1)=u_{\alpha\lambda}(N)\left(1+\frac{B_\alpha\Delta}{a}\right). \qquad /13/$$

Имеется всего $N\times M$ решений /12/, /13/ при различных значениях энергии $E_\lambda$, образующих ортонормированный и полный набор:

$$\sum_{\alpha n}\Delta\, u_{\alpha\lambda}(n)\,u_{\alpha\lambda'}(n)=\delta_{\lambda\lambda'}; \qquad /14/$$

$$\sum_{\lambda} u_{\beta\lambda}(n)\ u_{\alpha\lambda}(m)=\delta_{mn}\,\delta_{\alpha\beta}. \qquad /15/$$

Роль вспомогательных функций $\phi(E,n)$ в многоканальном случае играют матрицы $\Phi(E,n)\equiv|\phi_{\alpha\beta}(E,n)|$, каждый столбец которых является решением /12/ с граничными условиями:

$$\phi_{\beta\alpha}(E,N)=\delta_{\alpha\beta}/\sqrt{2a};\ \phi_{\beta\alpha}(E,N+1)=\phi_{\beta\alpha}(E,N)\left(1+\frac{B_\alpha\Delta}{a}\delta_{\alpha\beta}\right). \qquad /16/$$

По аналогии с /7/, векторная функция $\{u_{\alpha\lambda}(n)\}$ может быть получена умножением матрицы $\Phi(E_\lambda,n)$ на постоянный вектор $\{u_{\alpha\lambda}(N)\}$:

$$u_{\beta\lambda}(n) = \sum_{\alpha} \phi_{\beta\alpha}(E_\lambda, n)\, u_{\alpha\lambda}(N)\sqrt{2a}. \qquad /17/$$

Функции $\Phi(E,\hat{n})$ можно построить с помощью известных решений $\overset{\circ}{\Phi}(E,n)$ системы /12/, /16/ с $V_{\alpha\alpha}=0$ и граничными условиями /16/:

$$\Phi(E,n) = \sum_{m=n}^{N} \hat{K}(n,m)\, \overset{\circ}{\Phi}(E,m), \qquad /18/$$

где $\hat{K}(n,m)$ - матрица по индексам каналов.

Коэффициенты $\hat{K}$ находим из уравнений

$$\hat{Q}(m,n) + \sum_{p=n+1}^{N} \hat{k}(n,p)\hat{Q}(p,n) = 0; \qquad m>n;\ \hat{k}(n,p) = \hat{K}^{-1}(n,n)\hat{K}(n,p)$$

$$\hat{Q}(n,n) + \sum_{m=n+1}^{N} \hat{k}(n,m)\hat{Q}(m,n) = \hat{K}^{-2}(n,n), \qquad /19/$$

где $\hat{Q}$ определяются параметрами $E_\lambda$, $\gamma_{\alpha\lambda} \equiv u_{\alpha\alpha}(N)\sqrt{2a}$ /см. приложение/:

$$Q^{(p,m)}_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda,\delta,\eta} \overset{\circ}{\phi}_{\alpha\delta}(E_\lambda, p)\, \gamma_{\delta\lambda}\, \gamma_{\eta\lambda}\, \overset{\circ}{\phi}_{\eta\beta}(E_\lambda, m). \qquad /20/$$

Матрица взаимодействия $V = \| V_{\alpha\alpha'} \|$ выражается с помощью K :

$$\hat{V}(n) = \frac{1}{2\Delta^2} \{ \hat{K}(n-1,n) - \hat{K}(n,n+1) \} \hat{K}^{-1}(n,n). \qquad /21/$$

Таким способом можно восстановить "реалнстические" нуклон-нуклонные силы /со спин-спиновой, спин-орбитальной, тензорной составляющими/.

Покажем теперь, как в данном формализме по матрице рассеяния строится сферически несимметричный потенциал *.

Разложим волновую функцию $\Psi(\vec{k},\vec{r})$ для потока частиц с волновым вектором $\vec{k}$, рассеиваемых полем

* Известно, что непосредственно формализм Гельфанда-Левитана для одномерных уравнений на этот случай не распространяется /решение задачи было дано Фаддеевым /8 /.



$V(\vec{r})$, в ряд по сферическим гармоникам, отвечающим угловым переменным векторов $\vec{k}$ и $\vec{r}$:

$$\Psi(\vec{k},\vec{r}) = \sum_{LM\ell m} F_{LM\ell m}(k,r)\, Y_{LM}(\Omega_{\vec{k}})\, Y_{\ell m}(\Omega_{\vec{r}}) \qquad /22/$$

Для $F_{LM\ell m}(k,r)$, в к.-р. приближении и с учетом ограниченного числа гармоник в /22/ получается система уравнений типа /12/ с матрицей взаимодействия /9/ /состояния с различными $\{LM\}$ не смешиваются/:

$$V_{\ell m \ell' m'}(n) = \int Y^*_{\ell m}(\Omega_{\vec{r}})\, V(\vec{r}_n)\, Y_{\ell' m'}(\Omega_{\vec{r}})\, d\Omega_{\vec{r}}. \qquad /23/$$

Следуя процедуре /12/-/21/, находим значения $V_{\ell m \ell' m'}(n)$ по $E_\lambda$, $\gamma_{\lambda\ell m}$. Таким образом, здесь "точная" обратная задача реализуется в конечномерном пространстве функций, заданных в N-точках по переменной r, и с зависимостью от $\Omega_r$, определяемой фиксированным числом гармоник. Матричные элементы $V_{\ell m \ell' m'}$ задают в этом пространстве потенциал

$$V(\vec{r}_n) = \sum_{\ell m} C_{\ell m}(r_n)\, Y_{\ell m}(\Omega_{\vec{r}}), \qquad /24/$$

где

$$C_{\ell m}(r_n) = \sum_{\ell' m'} V_{\ell' m' \ell m}(r_n) \int Y_{\ell' m'}(\Omega_{\vec{r}})\, d\Omega_{\vec{r}}. \qquad /25/$$

### *4. Системы многих тел*

Простейшим примером, на который непосредственно обобщается изложенный выше метод восстановления $V(\vec{r})$, является система трех тел, взаимодействующих с помощью <u>многочастичного</u> потенциала $V(\vec{\rho}_6)$, отличного от нуля при $\rho_6 < a$. Здесь $\vec{\rho}_6$ - шестимерный вектор, характеризующий относительное расположение трех частиц в гиперсферической системе координат /9/. Вместо $Y_{\ell m}(\Omega_{\vec{r}})$ нужно лишь использовать гиперсферические функции / K-гармоники / $Y_{\vec{K}}(\Omega_{\vec{\rho}_6})$ /9/. Случай гиперсферически симметричного потенциала $V(\rho_6)$ сводится к одноканальной задаче.

В качестве другого примера рассмотрим рассеяние частицы 1 сложной мишенью, представляющей частицу 2 в бесконечной яме /поле третьей частицы, закрепленной в начале координат/. Если известны двухчастичные потенциалы $V_1$, $V_2$, $V_{12}$, то можно поставить задачу о приближенном восстановлении трехчастичного потенциала $V_{123}$ ограниченного радиуса действия. Разложим волновую функцию системы $\Psi(r_1, r_2)$ /допустим для простоты, что частицы совершают одномерное движение и $r_1, r_2 \geq 0$ /, по собственным функциям $\Phi_a$ гамильтониана мишени:

$$\Psi(r_1, r_2) = \sum_a F_a(r_1)\,\Phi_a(r_2). \qquad /26/$$

В приближении к.-р. по переменной $r_1$ и конечного числа членов в /26/ уравнение Шредингера для 3-х тел сводится к уравнениям:

$$-\frac{1}{2}\{F_a(E,n+1) - 2F_a(E,n) + F_a(E,n-1)\}/\Delta^2 + \sum_{a'} V_{aa'}(n)\,F_{a'}(E,n) = (E-\epsilon_a)\,F_a(E,n), \qquad /27/$$

где $\epsilon_a$ - уровни мишени, а

$$V_{aa'}(n) = V_1(n) + \int \Phi_a(r_2)\,[V_{12}(|r_{1n} - r_2|) + V_{123}(r_{1n}, r_2)]\,\Phi_{a'}(r_2)\,dr_2. \qquad /28/$$

Если найти $V_{aa'}(n)$, то

$$V_{123}(r_{1n}, r_2) = \sum_{a a'} [V_{aa'}(n) - V_1(n)]\,\Phi_{a'}(r_2)\int \Phi_a(r_2')\,dr_2' - V_{12}(|r_{1n} - r_2|), \qquad /29/$$

но остается проблемой определение параметров $E_\lambda$, $\gamma_{\lambda a}$ по данным рассеяния только в открытых каналах.



Несколько неожиданной представляется возможность применить аппарат обратной задачи к описанию структуры связанных состояний сложных многочастичных систем. В ряде задач ядерной физики гамильтониан H системы приводится к тридиагональному виду /10/, в представлении вспомогательного базисного набора функций $\{\chi_i\}$ оказываются отличными от нуля матричные элементы H, расположенные на диагонали и рядом с ней:

$$|\langle\chi_i|H|\chi_j\rangle| \equiv \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & \dots & & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_{32} & H_{33} & H_{34} & 0 \dots & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & H_{N,N-1} & H_{NN} \end{vmatrix} = H^{(\chi)} \qquad /30/$$

В таком представлении уравнение Шредингера аналогично /1/. Этим можно воспользоваться для восстановления гамильтониана $H^{(\chi)}$ (30) и волновых функций системы $\Psi_\lambda(\chi)$ по значениям уровней системы $E_\lambda$ и по весам $\langle\chi_1|\Psi_\lambda\rangle$ простейшей конфигурации в различных состояниях $\lambda$. Соответствующая процедура во многом подобна изложенной в разделе 2 и будет описана в следующей работе.

Авторы благодарны И.В.Амирханову, В.М.Барсукову, В.П.Жигунову, Я.А.Смородинскому и Н.А.Чеканову за многочисленные стимулирующие дискуссии.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### *Конечно-разностный аналог R-матричной теории*

Волновая функция $\Psi(E,n)$ имеет при $n \geq N$ /т.е. $r \geq a$, где $V(r) = 0$ / вид:

$$\Psi(E, n \geq N) = I(E,n) + S(E)\,O(E,n), \qquad /31/$$

где I и O - падающая и уходящая волны /см. сноску на стр. 6/.

Если у потенциала имеется известный "хвост" при $r \geq a$, то I и O являются решениями уравнения Шредингера с соответствующим асимптотическим поведением и предполагаются известными при $r \geq a$.

Введем функцию $\mathcal{R}(E)$, связанную с к.-р. производной от $\Psi(E,n)$ в точке

$$\Psi(E,N+1)-\Psi(E,N)=(a\mathcal{R})^{-1}\,\Psi(E,N)\,\Delta\,. \qquad /32/$$

Разложим $\Psi(E,n)$ на интервале $0<r\leq a$ по полному набору функций $u_\lambda(n)$ /11/

$$\Psi(E,n)=\sum_{\lambda=1}^{N} A_\lambda(E)\,u_\lambda(n)\,, \qquad /33/$$

где $A_\lambda$ в силу /5/ имеют вид

$$A_\lambda(E)=\sum_{n=1}^{N}\Psi(E,n)\,u_\lambda(n)\Delta\,. \qquad /34/$$

Умножим /1/ на $u_\lambda(n)$, а уравнение для $u_\lambda$ на $\Psi(E,n)$, вычтем второе уравнение из первого, просуммируем результат по n и, используя /34/, получим:

$$\frac{1}{2}\{-\Psi(E,N+1)\,u_\lambda(N)+\Psi(N)\,u_\lambda(N+1)\}/\Delta=(E-E_\lambda)\,A_\lambda(E)\,. \qquad /35/$$

Прибавим и вычтем $\Psi(E,N)\,u_\lambda(N)$ в фигурных скобках /35/ и подставим $A_\lambda(E)$ из /35/ в /33/:

$$\Psi(E,n)=\frac{1}{2}\sum_{\lambda}^{N}\frac{u_\lambda(n)}{E-E_\lambda}\Big\{\Psi(E,N)\,\frac{u_\lambda(N+1)-u_\lambda(N)}{\Delta}-u_\lambda(N)\,\frac{\Psi(E,N+1)-\Psi(E,N)}{\Delta}\Big\}\,. \qquad /36/$$

Учитывая /32/ и /4/, имеем:

$$R(E)=\mathcal{R}(E)/(1-\mathcal{R}B)=\sum_{\lambda}^{N}\frac{\gamma_\lambda^2}{E_\lambda-E}\,. \qquad /37/$$

Согласно соотношениям /31/ и /32/,



$$R(E)a=\frac{I(N)+S(E)\,O(N)}{I(N+1)-I(N)+S(E)\,[O(N+1)-O(N)]}\,\Delta\,. \qquad /38/$$

Таким образом, нули известного выражения в знаменателе /38/ определяют значения $E_\lambda>0$, а соответствующие $\gamma_\lambda^2$ можно найти, используя /38/ и

$$\gamma_\lambda^2=\lim_{E\to E_\lambda}\{R(E)\,(E-E_\lambda)\}\,. \qquad /39/$$

Если в искомом потенциале имеется связанное состояние с энергией $-\epsilon$, то, выбирая константу B в /2/, /4/ равной $-\sqrt{2\epsilon}$, можно совместить этот уровень с одним из собственных значений $E_\lambda$. Информация об остальных уровнях $\epsilon_\beta$ может быть заложена в параметры $E_\lambda$, $\gamma_\lambda^2$ с помощью соотношений

$$(\sqrt{2\epsilon}-\sqrt{2\epsilon_\beta})^{-1}=a\sum_{\lambda}^{N}\frac{\gamma_\lambda^2}{E_\beta-E_\lambda}\,. \qquad /40/$$

В многоканальном случае вместо /32/ имеем

$$F_\alpha(E,N)=\sum_{\alpha'}R_{\alpha\alpha'}\{[F_{\alpha'}(E,N+1)-F_{\alpha'}(E,N)]/\Delta-B_{\alpha'}F_{\alpha'}(E,N)/a\} \qquad /41/$$

Используя условие полноты /15/ решений $u_{\lambda\alpha}(n)$, находим выражение для R-матрицы.

$$R_{\alpha\alpha'}(E)=\sum_{\lambda}\frac{\gamma_{\lambda\alpha}\,\gamma_{\lambda\alpha'}}{E_\lambda-E}\,. \qquad /42/$$

### *Литература*


1. *Р.Ньютон. Теория рассеяния волн и частиц. Мир, Москва, 1969.*
2. *В.П.Жигунов, Б.Н.Захарьев, С.А.Ниязгулов, А.А.Сузько. Сообщение ОИЯИ, Р4-7815, Дубна, 1974.*
3. *В.Мельников. УМН, 14, 4, 121 /1959/.*
4. *I.Regge. Nuovo Cimento, 9, 491 (1958).*
5. *K.M.Case, M.Kac. J.Math.Phys., 14, 594 (1973).*

6. K.M.Case, S.C.Chin. J.Math.Phys., 14, 1643 (1973).
7. Ю.М.Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, Наукова думка, 1965.
8. Л.Д.Фаддеев. Препринт ИТФ, 71-106Е, Киев, 1971.
9. В.П.Жигунов, Б.Н.Захарьев. Методы сильной связи каналов в квантовой теории рассеяния. Атомиздат, Москва, 1974.
10. Mc. Grory. Труды международной конференции по ядерной физике. 27 августа - 1 сентября, 1973, Мюнхен, ФРГ.
11. J.L.Cook Austr. J.Phys., 25, 167 (1972).

Рукопись поступила в издательский отдел
14 февраля 1974 года.