ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

20/V-74

Р4 - 7766

И.Л.Бухбиндер, Б.Вестваньски

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА С БИКВАДРАТНЫМ ОБМЕНОМ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 7766

И.Л.Бухбиндер, Б.Вестваньски *

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА С БИКВАДРАТНЫМ ОБМЕНОМ

Направлено в Intern. Journal of Magnetism

* Институт физики Шлёнского университета, Катовице (Польша).

В рамках модели Гейзенберга с биквадратным обменом и одноионной анизотропией найден спектр элементарных возбуждений для спина $S=1$. Спектр состоит из трех ветвей, причем две ветви связаны с изменением S^z на 1, а одна - на 2. Проведен анализ выражений для спектра в различных фазах. Получены уравнения для параметров порядка с учетом элементарных возбуждений. Для вычислений использовалась диаграммная техника, разработанная одним из авторов.

1. В последнее время появились работы, в которых показано, что для описания магнитных свойств некоторых твердых диэлектриков модель Гейзенберга оказывается недостаточной. С одной стороны, это связано с тем, что эффективный оператор обмена, приводящий к модели Гейзенберга, различен для различных значений спина S. Если для спина $S=\frac{1}{2}$ оператор обмена $P_{ij}=2\vec{S}_i\vec{S}_j+\frac{1}{2}$ /откуда и получается модель Гейзенберга/, то уже для спина $S=1$ $P_{ij}=\vec{S}_i\vec{S}_j+(\vec{S}_i\vec{S}_j)^2-1$ [1]. В связи с этим использование модели Гейзенберга для спинов $S>\frac{1}{2}$ является не вполне законным. С другой стороны, существует ряд экспериментов с веществами типа $DyVO_4$, в которых обнаружены две точки фазового перехода. Для объяснения этого потребовалось предположить, что в таких веществах существует два параметра магнитного порядка $\langle S^z\rangle$ и $\langle (S^z)^2\rangle$, независимых друг от друга [2]. Введение второго параметра порядка невозможно в рамках модели Гейзенберга, что и привело к ее обобщению [3]. Простейшей моделью, которая может объяснить вышеуказанные свойства $DyVO_4$, является для спина $S=1$ модель Гейзенберга с биквадратным обменом. Изучению этой модели посвящен ряд работ, в которых строится приближение мо-

лекулярного поля и рассматриваются возможные магнитные структуры [3]. В статьях [4,5] сделаны попытки вычисления спектра элементарных возбуждений в рассматриваемой модели, однако это делалось в бозевском приближении для спиновых операторов и для $T=0$. В настоящей работе проведено вычисление спектра элементарных возбуждений в модели Гейзенберга с биквадратным обменом. Для вычислений использовалась специальная диаграммная техника, разработанная одним из авторов [6,7].

2. Рассмотрим систему ионов со спином $S=1$, закрепленных в узлах жесткой решетки, с гамильтонианом следующего вида:

$$\mathcal{H} = -h\sum_i S_i^z - D\sum_i (S_i^z)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\{J_{ij}\,\vec{S}_i\vec{S}_j + K_{ij}\,(\vec{S}_i\vec{S}_j)^2\}. \qquad /1/$$

Здесь h - напряженность внешнего магнитного поля, D - параметр одноионной анизотропии, J_{ij} и K_{ij} - параметры обменного и биквадратного взаимодействий соответственно. Одночастичная часть гамильтониана /1/ имеет неэквидистантный спиновый спектр. В таких случаях бывает удобно использовать вместо операторов спина так называемые операторы перехода, широко применяющиеся, например, в работах [6-10].

Введем, согласно работам [6,7], операторы

$$S_i^{12} = S_i^- S_i^z, \quad S_i^{23} = -S_i^z S_i^-, \quad S_i^{13} = (S_i^-)^2,$$
$$Q_i^{13} = (S_i^z), \quad Q_i^{\overline{13}} = (S_i^z)^2. \qquad /2/$$

С помощью операторов /2/ гамильтониан /1/ можно переписать в виде

$$\mathcal{H} = -\sum_i\{[h + (J_0 - \frac{1}{2}K_0)\langle S^z\rangle_0]\,Q_i^{13} + [D + \frac{3}{2}K_0\langle Q\ \rangle_0]\,Q_i^{\overline{13}}\} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\Big\{\frac{3}{2}K_{ij}\,(Q_i^{\overline{13}} - \langle Q^{\overline{13}}\rangle_0)(Q_j^{\overline{13}} - \langle Q^{\overline{13}}\rangle_0) +$$

$$+ (J_{ij} - \frac{1}{2}K_{ij}) \times (Q_i^{13} - \langle Q^{13}\rangle_0)(Q_j^{13} - \langle Q^{13}\rangle_0) +$$

$$+ \frac{1}{2}K_{ij}\, S_i^{13}\, S_j^{\overset{+}{13}} + J_{ij}\,(S_i^{12} S_j^{\overset{+}{12}} + S_i^{23} S_j^{\overset{+}{23}}) +$$

$$+ (J_{ij} - K_{ij})(S_i^{12}\, S_j^{\overset{+}{23}} + S_i^{23} S_j^{\overset{+}{12}})\Big\}, \qquad /3/$$

где $Q = Q^{\overline{13}} - \frac{2}{3}$, J_0 и K_0 - фурье-образы параметров J_{ij} и K_{ij} при $\vec{k} = 0$.

Одночастичная часть гамильтониана /3/ представляет собой гамильтониан рассматриваемой системы в приближении молекулярного поля. Средние значения $\langle S^z \rangle$ и $\langle Q \rangle$ играют роль параметров порядка. Возможность введения различных параметров порядка обсуждается в работах /2,3,11/. В приближении молекулярного поля можно получить /например, из условия минимума свободной энергии/ систему самосогласованных уравнений для параметров порядка. Эти уравнения получены для случая $h = D = 0$ в работе /4/ и решены при температуре $T \to 0$. При этом оказалось, что существует три физически интересных решения для параметров порядка.

$$1)\quad \langle S^z \rangle_0 = 1, \qquad (K_0 < 2J_0)$$

$$\langle Q \rangle_0 = \frac{1}{3}.$$

Данное решение соответствует ферромагнитному расположению спинов.

$$2)\quad \langle S^z \rangle_0 = 0,$$

$$\langle Q \rangle_0 = \frac{1}{3}.$$

Это решение описывает так называемое полуупорядоченное расположение спинов, когда числа спинов, направленных "вверх" и "вниз", одинаковы.

$$3)\quad \langle S^z\rangle_0 = 0, \qquad (K_0 > D,\ K_0 > 2J_0)$$
$$\langle Q\rangle_0 = -\frac{2}{3}.$$

В этом состоянии все спины имеют $S^z = 0$ /квантовое квадрупольное состояние/.

При температурах $T \neq 0$ может реализоваться любое из этих состояний в зависимости от температуры и соотношения параметров J_0 и K_0 [4].

3. При вычислении спектра элементарных возбуждений мы будем использовать диаграммную технику для температурных функций Грина, построенных из спиновых операторов. Дальнейшее изложение основывается на работах [6,7,10]. Введем функции Грина, построенные из операторов перехода [2]

$$G^{-+}_{\alpha\beta,\gamma\delta;ij}(\tau-\tau') = \langle T S_i^{\alpha\beta}(\tau) S_j^{\gamma\delta}(\tau')\rangle, \qquad /4а/$$

диагональные функции Грина

$$G_{\alpha\beta,\gamma\delta;ij}(\tau-\tau') = \langle T Q_i^{\alpha\beta}(\tau) Q_j^{\gamma\delta}(\tau')\rangle \qquad /4б/$$

и их фурье-образы $G^{-+}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\vec{k}, i\omega_n)$, $G_{\alpha\beta,\gamma\delta}(\vec{k}, i\omega_n)$.
Структура оператора взаимодействий в гамильтониане /3/ порождает разбиение системы функций Грина /4а/, /4б/ на три подсистемы. Первая подсистема функций Грина построена из операторов, меняющих магнитное квантовое число на единицу, и представляется матрицей

$$G^{-+}(\vec{k}, i\omega_n) = \begin{bmatrix} G^{-+}_{12,12} & G^{-+}_{12,23} \\ G^{-+}_{23,12} & G^{-+}_{23,23} \end{bmatrix}(\vec{k}, i\omega_n). \qquad /5/$$

Вторая подсистема связана с функциями Грина, построенными из операторов, меняющих магнитное квантовое число на два. Она состоит из одной функции Грина

$$G^{-+}_{13,13}\,(\vec{k}, i\omega_n). \qquad /6/$$

И, наконец, третья подсистема состоит из функций Грина, построенных из диагональных операторов, и представляется матрицей

$$G\,(\vec{k}, i\omega_n) = \begin{bmatrix} G_{13,13} & G_{13,\overline{13}} \\ G_{\overline{13},13} & G_{\overline{13},\overline{13}} \end{bmatrix} (\vec{k}, i\omega_n). \qquad /7/$$

Точные выражения для введенных функций Грина имеют следующий вид:

$$G^{-+} = \frac{1}{\det(1 - \Sigma^{-+} V^{+-})} \begin{bmatrix} \Sigma^{-+}_{12,12} - a \det \Sigma^{-+} & \Sigma^{-+}_{12,23} + b \det \Sigma^{-+} \\ \Sigma^{-+}_{23,12} + b \det \Sigma^{-+} & \Sigma^{-+}_{23,23} - a \det \Sigma^{-+} \end{bmatrix},$$

где

$$a = \frac{1}{2} J(\vec{k}); \qquad b = \frac{1}{2} (J(\vec{k}) - K(\vec{k})). \qquad /8/$$

Матрица взаимодействия V^{+-} *представляется в форме*

$$V^{+-} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

и

$$\Sigma^{-+} = \begin{bmatrix} \Sigma^{-+}_{12,12} & \Sigma^{-+}_{12,23} \\ \Sigma^{-+}_{23,12} & \Sigma^{-+}_{23,23} \end{bmatrix}.$$

Аналогично

$$G^{-+}_{13,13} = \Sigma^{-+}_{13,13} (1 - \Sigma^{-+}_{13,13} V^{+-}_{13,13})^{-1}, \qquad /9/$$

где

$$V^{+-}_{13,13} = \frac{1}{4} K(\vec{k})$$

и

$$G = \frac{1}{\det(1-\Sigma V)} \begin{bmatrix} \Sigma_{13,13} - c\det\Sigma, & \Sigma_{13,\overline{13}} \\ \Sigma_{\overline{13},13} & , \Sigma_{\overline{13},\overline{13}} - d\det\Sigma \end{bmatrix} . \qquad /10/$$

$$c = J(\vec{k}) - \frac{1}{2}K(\vec{k}), \quad d = \frac{3}{2}K(\vec{k}),$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{13,13} & \Sigma_{13,\overline{13}} \\ \Sigma_{\overline{13},13} & \Sigma_{\overline{13},\overline{13}} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

Функции $\Sigma^{-+}_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ и $\Sigma_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ представляют собой *неприводимые собственно энергетические* части соответствующих функций Грина.

Рассмотрим первоначально функции Грина, построенные из недиагональных операторов. Функции $G^{-+}(\vec{k}, i\omega_n)$ вычислим в первом приближении по $\frac{1}{z}$ / z - число ближайших соседей/. Диаграммы, дающие вклад в функции $\Sigma^{-+}_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ для данного случая, приведены в приложении. Из условия

$$\det(1 - \Sigma^{-+} V^{+-}) = 0$$

находим спектр элементарных возбуждений. Первая подсистема функций Грина дает две ветви элементарных возбуждений:

$$\epsilon_{\binom{1}{2}}(\vec{k}) = h + [\frac{1}{2}(J_0 - J_{\vec{k}}) + \frac{1}{2}(J_0 - K_0)]\langle S^z\rangle_0 \pm \delta_{\vec{k}} ;$$

$$\delta^2_{\vec{k}} = (D + \frac{3}{2}K_0 \langle Q\rangle_0)^2 + (\frac{1}{2}J_{\vec{k}} \langle S^z\rangle_0)^2 - $$

$$-3J_{\vec{k}}\langle Q\rangle_0 (D + \frac{3}{2}K_0 \langle Q\rangle_0) \qquad /11/$$

$$-\frac{1}{2}K_{\vec{k}}(J_{\vec{k}} - \frac{1}{2}K_{\vec{k}})(\langle S^z\rangle_0 + 3\langle Q\rangle_0)(\langle S^z\rangle_0 - 3\langle Q\rangle_0).$$

Функция Грина второй подсистемы дает еще одну ветвь элементарных возбуждений:

$$\epsilon_3(\vec{k}) = 2\{h + [J_0 - \frac{1}{2}(K_0 + K_{\vec{k}})]\langle S^z\rangle_0\}. \qquad /12/$$

Параметры порядка $\langle S^z\rangle_0$ и $\langle Q\rangle_0$ должны находиться из *решения системы* уравнений молекулярного поля /4/.

По принятой терминологии, спиновыми волнами называются элементарные возбуждения, сопровождающиеся изменением S^z на единицу. В нашем случае возбуждения с законом дисперсии $\epsilon_{1,2}(\vec{k})$ являются спиновыми волнами. *Появление* двух ветвей спектра, соответствующих изменению S^z на единицу, не случайно. Дело в том, что если одноионный спектр неэквидистантный, то существуют два различных перехода, при которых S^z меняется на единицу. Изменения энергии в обоих случаях, естественно, различны. Элементарные возбуждения с законом дисперсии $\epsilon_3(\vec{k})$ сопровождаются изменением S^z на два. Из выражений для спектра $\epsilon_\lambda(\vec{k})$ /11/, /12/ следует, что по крайней мере одна ветвь является акустической /при $h = D = 0$ /. Интересно отметить, что дисперсия $\epsilon_3(\vec{k})$ обусловлена только биквадратным взаимодействием. При $K_{ij} = 0$ выражение для $\epsilon_\lambda(\vec{k})$ переходит в известные выражения работ /7,9/.

Рассмотрим теперь выражения для спектра $\epsilon_\lambda(\vec{k})$ в различных фазах при $T \to 0$. В ферромагнитной фазе, когда $\langle S^z\rangle_0 = 1$, $\langle Q\rangle_0 = \frac{1}{3}$, имеем

$$\epsilon_1(\vec{k}) = h + D + (J_0 - J_{\vec{k}}),$$
$$\epsilon_2(\vec{k}) = h - D + J_0 - K_0, \qquad /13/$$
$$\epsilon_3(\vec{k}) = 2[h + J_0 - \frac{1}{2}(K_0 + K_{\vec{k}})].$$

При этом выражения для $\epsilon_1(\vec{k})$ и $\epsilon_2(\vec{k})$ совпадают с выражениями для $\omega^a(\vec{k})$ и $\omega^b(\vec{k})$ работы [5]. Ветвь ϵ_2 от $\vec{k}$ не зависит и в [5] потеряна. Как отмечалось в работе [5] при $h = D$, $J = K$ ветви $\epsilon_1(\vec{k})$ и $\epsilon_3(\vec{k})$ сливаются и при $h \simeq D$, $J \simeq K$ возможны процессы взаимного превращения ветвей $\epsilon_1(\vec{k})$ и $\epsilon_3(\vec{k})$ друг в друга /кросс-релаксация/. Ветвь ϵ_2 в кроссрелаксации не участвует. Первая ветвь спектра была также получена в работе [1] при $h = D = 0$. Вторая и третья ветви в этой работе потеряны. В полуупорядоченном состоянии, в котором $\langle S^z\rangle_0 = 0$, $\langle Q_0\rangle = \frac{1}{3}$, имеем при $h = 0$:

$$\epsilon^2_{\binom{1}{2}}(\vec{k}) = (D + \frac{1}{2}(K_0 - J_{\vec{k}}))^2 - \frac{1}{4}(J_{\vec{k}} - K_{\vec{k}})^2, \qquad /14/$$
$$\epsilon_3(\vec{k}) = 0.$$

Соотношение /14/ дает вырожденный спектр, связанный с переходом

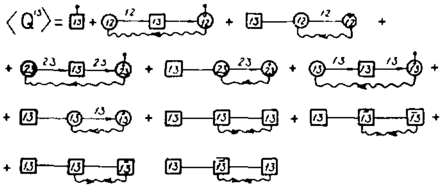
$$S^z = 1 \to S^z = 0 .$$

В квантовом квадрупольном состоянии, когда $\langle S^z\rangle_0 = 0$, $\langle Q\rangle_0 = -\frac{2}{3}$, получаем при $h = 0$

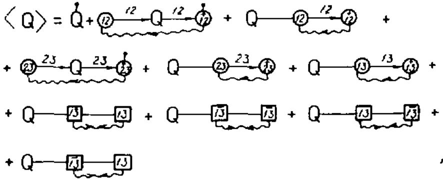
$$\epsilon^2_{\binom{1}{2}}(\vec{k}) = (D - K_0 + J_{\vec{k}})^2 - (K_{\vec{k}} - J_{\vec{k}})^2, \qquad /15/$$
$$\epsilon_3(\vec{k}) = 0.$$

В этом случае также получается вырожденный спектр, однако теперь спиновая волна связана с переходом $S^z = 0 \to S^z = -1$. Возможные переходы определяются различными энергиями основного состояния. Если в полуупорядоченном состоянии энергия системы с $S^z = 0$ лежит "выше" энергии с $S^z = \pm 1$ /вырожденный уровень/, то во втором случае наоборот. Отметим еще, что и в полуупорядоченном состоянии и в квантовом квадрупольном состоянии третья ветвь спектра отсутствует. Формула /15/ совпадает с выражением для спектра работы [1]. Выражения /11/-/12/ дают спектр элементарных возбуждений при любых температурах /в отличие от результатов работ /4–5/ /.

4. Обратимся теперь к получению более точных, чем в работе [1], уравнений для параметров порядка. Для этих параметров можно нарисовать диаграммы, дающие вклад в первом порядке по $\frac{1}{z}$. Диаграммные равенства имеют следующий вид:



/16/



/17/

Подробное объяснение диаграмм такого типа приведено в работах /7,10/. Особенности биквадратного взаимодействия связаны с выражениями для волнистых линий.

$$\tilde V^{+-}_{\alpha\beta,\gamma\delta} =$$

$$\tilde V_{\alpha\beta,\gamma\delta} =$$

Эффективные взаимодействия $\tilde V^{+-}$ и $\tilde V$ определяются /7,10,12/ с помощью функций Грина /8-10/ в первом приближении *по* $\frac{1}{z}$ *и имеют вид*

$$\tilde V^{+-} = \begin{bmatrix} \tilde V^{+-}_{12,12} & \tilde V^{+-}_{12,23} \\ \tilde V^{+-}_{23,12} & \tilde V^{+-}_{23,23} \end{bmatrix} = \frac{(i\omega_n + H_0'^{12})(i\omega_n + H_0'^{23})}{(i\omega_n + \epsilon_1)(i\omega_n + \epsilon_2)} \begin{bmatrix} a + (b^2 - a^2)\,\mathring{\Sigma}^{-+}_{23,23} & b \\ b & a + (b^2 - a^2)\,\mathring{\Sigma}^{-+}_{12,12} \end{bmatrix}, \qquad /18/$$

$$\tilde V = \begin{bmatrix} \tilde V_{13,13} & \tilde V_{13,\overline{13}} \\ \tilde V_{\overline{13},13} & \tilde V_{\overline{13},\overline{13}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c - cd\,\mathring{\Sigma}_{\overline{13},\overline{13}} & cd\,\mathring{\Sigma}_{13,\overline{13}} \\ cd\,\mathring{\Sigma}_{\overline{13},13} & d - cd\,\mathring{\Sigma}_{13,13} \end{bmatrix} \times$$

$$\times\ (\det(1 - \mathring{\Sigma}\, V))^{-1},$$

$$\tilde{V}^{+-}_{13,13} = \frac{1}{4} K_{\vec{k}} \, \frac{i\omega_n + H_0^{\prime\,13}}{i\omega_n + \epsilon_3} .$$

Здесь

$$H_0^{\prime\,\alpha\beta} = H_0^{\prime\,\beta} - H_0^{\prime\,\alpha} .$$

Используя теперь равенства /16/-/18/, получаем выражения для параметров порядка:

$$\langle Q^{13}\rangle = \langle Q^{13}\rangle_0 + \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}} \{ n(12) + n(23) + \frac{1}{2} J_{\vec{q}} [\beta (b^2_{(2)1,\vec{q}} D^{12} \langle Q^{13}\rangle_0$$

$$+ b^1_{(2)1,\vec{q}} D^{23} \langle Q^{13}\rangle_0) - (a^2_{(12,2)1,\vec{q}} \langle Q^{12}\rangle_0 + a^1_{(23,2)1,\vec{q}} \langle Q^{23}\rangle_0)]$$

$$\times n(\epsilon_{1\vec{q}}) + \frac{1}{2} J_{\vec{q}} [\beta (b^2_{(1)2,\vec{q}} D^{12} \langle Q^{13}\rangle_0 + b^1_{(1)2,\vec{q}} D^{23} \langle Q^{13}\rangle_0)$$

$$- (a^2_{(12,1)2,\vec{q}} \langle Q^{12}\rangle_0 + a^1_{(23,1)2,\vec{q}} \langle Q^{23}\rangle_0)] n(\epsilon_{2\vec{q}}) \} + \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}} \{ 2n(13) \qquad /19/$$

$$+ [\beta K_{\vec{q}} D^{13} \langle Q^{13}\rangle_0 - 2] n(\epsilon_{3\vec{q}}) \} + \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}} \frac{1}{2}\beta \{ (D^{13})^2 \langle Q^{13}\rangle_0 \, c_{\vec{q}}$$

$$[1 - \beta d_{\vec{q}} D^{\overline{13}} \langle Q^{\overline{13}}\rangle_0] + 2\beta D^{13} \langle Q^{\overline{13}}\rangle_0 \cdot D^{13} D^{\overline{13}} \langle Q^{13}\rangle_0 \, c_{\vec{q}} d_{\vec{q}}$$

$$+ (D^{\overline{13}})^2 \langle Q^{13}\rangle_0 \, d_{\vec{q}} [1 - \beta c_{\vec{q}} D^{13} \langle Q^{13}\rangle_0] \} \{ 1 - \beta c_{\vec{q}} D^{13} \langle Q^{13}\rangle_0$$

$$- \beta d_{\vec{q}} D^{\overline{13}} \langle Q^{\overline{13}}\rangle_0 + \beta^2 c_{\vec{q}} d_{\vec{q}} (D^{13} \langle Q^{13}\rangle_0 \cdot D^{\overline{13}} \langle Q^{\overline{13}}\rangle_0 - D^{13} \langle Q^{\overline{13}}\rangle_0$$

$$\times D^{\overline{13}} \langle Q^{13}\rangle_0) \}^{-1} ;$$

$$
\begin{aligned}
\langle Q\rangle = {} & \langle Q\rangle_0 + \frac{1}{N}\sum_{\vec q}\Big\{ n(12)-n(23)+\frac{1}{2}J_{\vec q}\,[\beta(b^{2}_{(2)1,\vec q}\,D^{12}\langle Q\rangle_0 \\
& + b^{1}_{(2)1,\vec q}\,D^{23}\langle Q\rangle_0) - (a^{2}_{(12,2)1,\vec q}\,\langle Q^{12}\rangle_0 - a^{1}_{(23,2)1,\vec q}\,\langle Q^{23}\rangle_0)] \\
& \times n(\epsilon_{1\vec q}) + \frac{1}{2}J_{\vec q}\,[\beta(b^{2}_{(1)2,\vec q}\,D^{12}\langle Q\rangle_0 + b^{1}_{(1)2,\vec q}\,D^{23}\langle Q\rangle_0) \\
& - (a^{2}_{(12,1)2,\vec q}\,\langle Q^{12}\rangle_0 - a^{1}_{(23,1)2,\vec q}\,\langle Q^{23}\rangle_0)]\,n(\epsilon_{2\vec q})\Big\} + \beta D^{13}\langle Q\rangle_0 \\
& \times \frac{1}{N}\sum_{\vec q} K_{\vec q}\,n(\epsilon_{3\vec q}) + \frac{1}{N}\sum_{\vec q}\frac{1}{2}\beta\Big\{ (D^{13})^{2}\langle Q\rangle_0\, c_{\vec q}\,[1-\beta d_{\vec q}D^{\overline{13}}\langle Q^{\overline{13}}\rangle_0] \\
& + 2\beta D^{13}\langle Q^{\overline{13}}\rangle_0 \cdot D^{13}D^{\overline{13}}\langle Q\rangle_0\, c_{\vec q}\, d_{\vec q} + (D^{\overline{13}})^{2}\langle Q\rangle_0\, d_{\vec q}\,[1-\beta c_{\vec q} \\
& \times D^{13}\langle Q^{13}\rangle_0]\Big\}\Big\{1-\beta c_{\vec q}\,D^{13}\langle Q^{13}\rangle_0 - \beta d_{\vec q}\,D^{\overline{13}}\langle Q^{\overline{13}}\rangle_0 \qquad /20/ \\
& + \beta^{2} c_{\vec q}\, d_{\vec q}\,(D^{13}\langle Q^{13}\rangle_0 \cdot D^{\overline{13}}\langle Q^{\overline{13}}\rangle_0 - D^{13}\langle Q^{\overline{13}}\rangle_0 \cdot D^{\overline{13}}\langle Q^{13}\rangle_0)\Big\}^{-1}.
\end{aligned}
$$

Параметры a и b имеют следующий вид:

$$a^{j}_{(l,p)i,\vec q} = (\eta_j - \epsilon_i)(\epsilon_l - \epsilon_i)^{-1}\,(\epsilon_p - \epsilon_i)^{-1},$$

$$b^{j}_{(l)i,\vec q} = (\eta_j - \epsilon_i)(\epsilon_l - \epsilon_i)^{-1}, \quad \epsilon_{\substack{12\\23}} = H'^{\substack{12\\23}}_{6},$$

$$\eta_{\substack{1\\2}} \equiv \eta_{\substack{1\\2}}(\vec q) = H'^{\substack{12\\23}}_{\circ} - K_{\vec q}\,(J_{\vec q} - \frac{1}{2}K_{\vec q})\,J^{-1}_{\vec q}\,\langle Q^{\substack{12\\23}}\rangle_0,$$

$$n(ij) = (\exp(\beta\epsilon_{ij})-1)^{-1} \qquad (ij = 12, 23, 13),$$

$$n(\epsilon_{\lambda q}) = (\exp(\beta\epsilon_{\lambda q}) - 1)^{-1}.$$

Операторы $D^{\alpha\beta}$, $Q^{\alpha\beta}$ приведены в приложении. Равенства /19/–/20/ являются прямым обобщением уравнения для параметра порядка работы [12]. Анализ уравнений /19/-/20/ затруднителен и нами не проводится.

5. В работе выполнены вычисление и анализ спектра элементарных возбуждений для модели Гейзенберга с биквадратным обменом. В общем случае спектр элементарных возбуждений имеет три ветви $\epsilon_\lambda(\vec{k})(\lambda = 1,2,3)$. Возбуждения с $\lambda = 1,2$ являются спиновыми волнами /S^z меняется на единицу/. Возбуждения с $\lambda = 3$ происходят с изменением S^z на два. Если значение спина S произвольно, то в рассматриваемой модели получается $2S$ ветвей с $|\Delta S^z| = 1$ и $2S - 1$ ветвей с $|\Delta S^z| = 2$. Ветви $\epsilon_{1,2}(\vec{k})$ могут быть измерены обычными методами рассеяния нейтронов или ферромагнитного резонанса. Однако с ветвью $\epsilon_3(\vec{k})$ ситуация другая. И сечение рассеяния нейтронов, и поглощаемая энергия переменного поля определяются корреляционной функцией $\langle S^+ S^-(t)\rangle$ и не "чувствуют" переходов с $|\Delta S^z| = 2$. Однако существует возможность детектирования и таких возбуждений. Если мы начнем модулировать обменные интегралы J_{ij} и K_{ij} звуком, то возможны переходы, при которых $|\Delta S^z| = 2$. Т.е. интересующие нас возбуждения можно обнаружить при изучении коэффициента поглощения звука. Используя экспериментальные данные по величине обменных интегралов [2], можно грубо оценить требуемую частоту звука. Эта частота лежит в области гиперзвука и примерно равна 10^{10} - 10^{11} *Гц*. Генерация гиперзвука такой частоты в принципе возможна.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выражения для функций $\overset{\circ}{\Sigma}{}^{+-}$ и $\overset{\circ}{\Sigma}$ имеют в используемых нами приближениях следующий вид:

$$\overset{\circ}{\Sigma}{}^{-+}_{ij,ij} = \bigcirc\!\!\!\!\!\!\;\; ij \xrightarrow{\;ij\;} \overset{+}{ij} = \langle Q^{ij}\rangle_0 \,(i\omega_n + H'^{ij}_{\circ})^{-1} \quad (ij = 12, 23),$$

$$\overset{\circ}{\Sigma}{}^{-+}_{13,13} = 13 \xrightarrow{\;13\;} \overset{+}{13} = 4\langle Q^{13}\rangle_0 \,(i\omega_n + H'^{13}_{\circ})^{-1},$$

$$\overset{\circ}{\Sigma}{}^{-+}_{12,23} = \overset{\circ}{\Sigma}{}^{-+}_{23,12} = 0,$$

$$\overset{\circ}{\Sigma}_{ij,ij} = \boxed{ij} \text{———} \boxed{ij} = \delta_{n,0}\,\beta\, D^{ij} \langle Q^{ij}\rangle_0 \quad (ij = 13, \overline{13}),$$

$$\overset{\circ}{\Sigma}_{13,\overline{13}} = \overset{\circ}{\Sigma}_{\overline{13},13} = \boxed{13} \text{————} \boxed{\overline{13}} = \delta_{n,0}\,\beta\, D^{13} \langle Q^{\overline{13}}\rangle_0,$$

где

$$H'^{ij}_{\circ} = H'^{j}_{\circ} - H'^{i}_{\circ}, \quad H'^{1}_{\circ} = -(\underline{h} + \underline{D}),\; H'^{2}_{\circ} = 0,\; H'^{3}_{\circ} = \underline{h} - \underline{D},$$

$$\underline{h} = h + (J_0 - \tfrac{1}{2}K_0)\langle S^z\rangle_0, \quad \underline{D} = D + \tfrac{3}{2}K_0\langle Q\rangle_0,$$

$$Q^{\binom{12}{23}} = Q^{13} \pm 3Q^{\overline{13}} \mp 2,$$

$$D^{13} = \frac{\partial}{\partial(\beta\underline{h})}, \quad D^{\overline{13}} = \frac{\partial}{\partial(\beta\underline{D})},$$

$$D^{\binom{12}{23}} = D^{13} \pm 3D^{\overline{13}}.$$

Литература

1. R.I.Joseph. Phys.Rev., 163, 523 (1967); H.H.Chen, R.I.Joseph. Phys.Rev., B2, 2706 (1970); G.A.Allan, D.D.Betts. Proc.Phys.Soc.,91,341(1967); H.H.Chen, R.I.Joseph. J.Math.Phys., 13, 725 (1972); L.L.Liu, R.I.Joseph. J.Phys.Chem.Solids, 33, 451 (1972); H.A.Brown. Phys.Rev, B4, 115 (1971); C.Rudowicz. Acta Phys.Polon, A44, 103 (1973).
2. G.Will, W.Schafer. J.Phys., C4, 811 (1971);
H.H.Chen, P.M.Levy. Phys.Rev.Lett., 27, 1383 (1971);
A.H.Cooke, D.M.Martin, M.R.Wells. Sol.St.Com., 9, 519 (1971)
3. M.E.Lines, E.D.Jones. Phys.Rev., 139, 1313 (1965);
Phys.Rev., 141, 525 (1966); M.Nauciel-Bloch, G.Sarma, A.Castets. Phys.Rev., 5B, 4603 (1972), D.A.Pink, P.Tremblay. Can.J.Phys., 50, 1728 (1972); J.Sivardière. Phys.Rev., 5B, 2094 (1972); 6B, 4284 (1972); 8B, 2004 (1973); J.Sivardière, A.N.Berker, M.Wortis. Phys.Rev., 7B, 343 (1973).
4. В.М.Матвеев. ЖЭТФ, 65, 1626 /1973/.
5. K.Becker. Int.J.Mag., 3, 239 (1972).
6. B.Westwański, A.Pawlikowski. Phys.Lett, A43, 201 (1973);
B.Westwański. Phys.Lett., A44, 27 (1973)
7. B.Westwański. JINR, E4-7624, Dubna, 1973;
JINR, E4-7625, Dubna, 1973.
8. А.Р.Кессель. ФТТ, 5, 1055 /1963/.
9. S.B.Haley, P.Erdös. Phys.Rev., 5B, 1106 (1972).
10. B.Westwański. Phys.Lett., A45, 449 (1973); JINR E4-7486, Dubna, 1973, JINR, E4-7487, Dubna, 1973.
11. M.Blume, Y.Y.Hsieh. J.Appl.Phys., 40, 1249 (1969).
12. В.Г.Вакс, А.И.Ларкин, С.А.Пикин. ЖЭТФ, 53, 281 /1967/; 53, 1089 /1967/.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 февраля 1974 года.