СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

С326
Л-246

8/IV-74

1373/2-74

Р4 - 7738

С.С.Лапушкин

ОБ ОБОБЩЕНИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 7738

С.С.Лапушкин

ОБ ОБОБЩЕНИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Объединенный институт ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Лапушкин С.С. P4 - 7738

Об обобщении предельных соотношений для некоторых модельных систем

Показано, что соотношения между свободными энергиями, вычисленными для модельного и аппроксимирующего гамильтонианов, в термодинамическом пределе могут быть использованы как в случае отрицательного, так и положительного взаимодействия.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1974

Lapushkin S.S. P4 - 7738

To Generalization of Limiting Ratios for Some Model Systems

Ratios between thermodynamic limits of the free energies evaluated for the model and approximation hamiltonians are shown to be employed both for the negative and positive interactions.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1974

©1974 Объединенный институт ядерных исследований Дубна

I.

Одним из важных вопросов квантовой статистики является исследование модельных динамических систем с помощью асимптотически точных методов. Особый интерес представляет метод введения аппроксимирующего гамильтониана для получения асимптотически точного выражения свободной энергии системы в термодинамическом пределе, когда объем системы $V \to \infty$.
В работе [I] рассматривалась модельная система с отрицательным взаимодействием и решался вопрос о предельном выражении для свободной энергии при $V \to \infty$. В результате была сформулирована следующая теорема:

Теорема I. Пусть операторы $\mathcal{J}_\alpha, T$ в гамильтониане

$$H = T - 2V \sum_{1 \leq \alpha \leq S} g_\alpha \mathcal{J}_\alpha \mathcal{J}_\alpha^+, \qquad (\mathrm{I})$$

(здесь g_α - положительные параметры)
удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{J}_\alpha\| \leq M_1, \quad T = T^+, \\ &\|T\mathcal{J}_\alpha - \mathcal{J}_\alpha T\| \leq M_2, \\ &\|\mathcal{J}_\alpha \mathcal{J}_\beta - \mathcal{J}_\beta \mathcal{J}_\alpha\| \leq \frac{M_3}{V}, \\ &\|\mathcal{J}_\alpha^+ \mathcal{J}_\beta - \mathcal{J}_\beta \mathcal{J}_\alpha^+\| \leq \frac{M_3}{V}, \end{aligned} \qquad (2)$$

M_1, M_2, M_3 - константы при $V \to \infty$, $1 \leq \alpha \leq S; 1 \leq \beta \leq S$.
Пусть, кроме того, свободная энергия, вычисленная на единицу объема, для гамильтониана T ограничена постоянной:

$$|f_V(T)| \leq M_0 . \qquad (3)$$

Построим операторную форму аппроксимирующего гамильтониана:

$$H_0(C) = T - 2V\sum_{(\alpha)} g_\alpha (C_\alpha J_\alpha^+ + \overset{*}{C}_\alpha J_\alpha - C_\alpha \overset{*}{C}_\alpha), \qquad (4)$$

где $C = (C_1, C_2, \ldots C_S)$, а $C_1, \ldots C_S$ - комплексные числа.

Тогда справедливы неравенства

$$0 \leq f_V(H_0(\bar{C})) - f_V(H) \leq \mathcal{E}_V , \qquad (5)$$

где $f_V(H_0(\bar{C})) = \min_{(C)} f_V(H_0(C))$, причем $\mathcal{E}_V = \mathcal{E}\left(\frac{1}{V}\right) = \frac{Const}{V^{2/5}} \to 0$ при $V \to \infty$ равномерно по отношению к θ в интервале $0 \leq \theta \leq \theta_0$, где θ_0 - произвольная фиксированная температура.

Свободную энергию на единицу объема для какого-либо гамильтониана Γ будем обозначать

$$f_V(\Gamma) = -\frac{\theta}{V} \ln Sp\, e^{-\Gamma/\theta}.$$

Пусть модельный гамильтониан (I) имеет вид, рассматриваемый в теории сверхпроводимости [2].

Как показано в главе 4 книги [3], сформулированная выше теорема не распространяется на случай отрицательных g_α.

В самом деле, допустим, что операторы J_α, T, входящие в (I), $(g_\alpha \leq 0)$ удовлетворяют условиям (2,3). Можно ли утверждать, что

$$f_V(H) - f_V(H(\bar{C})) \to 0 \quad \text{при } V \to \infty \quad ? \qquad (6)$$

Покажем, что такое утверждение неверно уже в простейшем случае $S = 1$, когда

$$H = T + 2VgJJ^+, \; g > 0 . \qquad (7)$$

Для этого рассмотрим оператор J вида [2]:

$$J = \frac{1}{2V}\sum_{(f)} \lambda(f)\, a_f^+ a_{-f}^+ , \qquad (8)$$

где

$$\lambda(f) = \lambda(p,\sigma) = \begin{cases} \lambda(\sigma), & \left|\frac{p^2}{2m} - \mu\right| \leq \Delta; \\ 0, & \left|\frac{p^2}{2m} - \mu\right| > \Delta . \end{cases}$$

$$\lambda(\sigma) = \begin{cases} \lambda_0, & \sigma = \frac{1}{2}; \\ -\lambda_0, & \sigma = -\frac{1}{2}. \end{cases} \qquad \begin{matrix} \Delta = Const > 0; \\ \lambda_0 = Const > 0. \end{matrix} \qquad (9)$$

В качестве оператора T возьмем в (7)

$$T = H_0 = T_0 - 2VgJJ^+;$$

$$T_0 = \sum_{(f)} \left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right) a_f^+ a_f . \qquad (10)$$

Такой гамильтониан H_0 благодаря (8, 9, 10), очевидно, принадлежит к классу гамильтонианов, рассмотренных в работе [I], и удовлетворяет условиям теоремы I.

Пусть при этом значения g, λ_0, θ выбраны таким путем, что величина $S=\bar{S}$, реализующая абсолютный минимум

$$\min_{(S)} f_\infty\{H_0(S)\} = f_\infty\{H_0(\bar{S})\},$$

отлична от нуля.

Тогда

$$f_\infty\{H_0(\bar{S})\} < f_\infty\{H_0(0)\} = f_\infty(T_0).$$

А на основании теоремы I

$$\lim_{V\to\infty} f_V(H_0) = f_\infty\{H_0(\bar{S})\}.$$

Имеем, следовательно,

$$\lim_{V\to\infty}\{f_V(T_0) - f_V(T)\} > 0. \qquad \text{(II)}$$

С другой стороны, благодаря (8, 9, I0) операторы $\mathcal{J}_\alpha, T$ в (7) удовлетворяют условиям (2, 3). Поэтому, если бы утверждение (6) было верно для модельной системы (7), то мы могли бы написать

$$f_V(T_0) - f_V\{H(\bar{C})\} \to 0,\ V\to\infty, \qquad \text{(I2)}$$

поскольку в рассматриваемом случае имеем тождественно

$$H = T_0 .$$

Найдем теперь $\bar{C}$. Имеем

$$H(C) = T + 2Vg(C\mathcal{J}^+ + \overset{*}{C}\mathcal{J} - C\overset{*}{C}).$$

Значение $C=\bar{C}$ определяется из уравнений:

$$\frac{\partial f_V\{H(C)\}}{\partial C} = 0, \quad \frac{\partial f_V\{H(C)\}}{\partial \overset{*}{C}} = 0, \qquad \text{(I3)}$$

т.е.

$$\bar{C} = \langle \mathcal{J} \rangle_{H(C)}, \quad \bar{\overset{*}{C}} = \langle \mathcal{J}^+ \rangle_{H(C)} .$$

Ясно, что эти уравнения имеют тривиальное решение $C=\overset{*}{C}=0$, поскольку ввиду (8) справедливы тождества

$$\langle \mathcal{J} \rangle_{H(0)} = \langle \mathcal{J} \rangle_T = 0,$$

$$\langle \mathcal{J}^+ \rangle_{H(0)} = \langle \mathcal{J}^+ \rangle_T = 0.$$

Так как уравнения (I3) имеют единственное решение, то

$$\bar{C} = 0,\ H(\bar{C}) = T .$$

Поэтому из (I2) получим

$$\lim\{f_V(T_0) - f_V(T)\} = 0 \quad \text{при } V\to\infty,$$

что противоречит (II).

Итак, в отличие от случая отрицательного взаимодействия (I) в рассматриваемом случае положительного взаимодействия (7) предельное соотношение (5) может оказаться неверным даже при выполнении условий (2, 3).

Отсутствие аналога теоремы I, которая служила основой для исследования в работе [I] , вообще говоря, затрудняет рассмотрение модельного гамильтониана в общем случае.

В настоящей работе покажем, что при некоторых условиях эта теорема будет справедлива в случае отрицательных g_α.

Введем некоторые определения. Пусть гильбертово пространство $\mathcal{L}_2$, в котором действуют наши операторы, может быть реализовано так, чтобы его элементы представлялись функциями дискретной системы индексов n_j, каждый из которых пробегает конечное число значений: $\{n_{j1}, \ldots\ldots n_{jr}\}$.

$$\Phi(\ldots n_j \ldots); \quad j = 1, 2, \ldots\ldots N,$$

N - фиксировано. Например, если рассматривается спиновый гамильтониан, то тогда за n_j можно взять Z-компоненту спинов, и они будут принимать значения соответственно $1/2$, $-1/2$ в случае спина $S = 1/2$, I, 0, -I в случае спина $S = 1$, и т.д.

$$\Phi(\sigma_1^{(z)}, \sigma_2^{(z)}, \ldots \sigma_j^{(z)}, \ldots)$$

Будем говорить, что некоторый оператор $\mathfrak{A}$ действует на переменную n_j, если

$$\mathfrak{A}\Phi(\ldots n_k \ldots n_j \ldots) = \sum_{n_j'} \mathfrak{A}_{n_j n_j'} \Phi(\ldots n_k \ldots n_j' \ldots) \qquad (I4)$$

(j - фиксировано). Такие операторы будем обозначать символом $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{j\alpha}$, что будет указывать, что они действуют только на $n_{j\alpha}$. Здесь α - дискретный индекс, n_j пробегает r значений:

$$n_j = n_{j\alpha} = \{n_{j1}, n_{j2}, \ldots\ldots n_{jr}\}, \quad 1 \leq \alpha \leq r,$$

r - фиксированное число, независящее от V. Оператор $\mathfrak{A}_\nu$ можно изображать квадратной матрицей. Очевидно, что операторы $\mathfrak{A}_\nu$ и $\mathfrak{B}_\mu$ коммутируют, если действуют на разные числа n_ν, n_μ $(\nu \neq \mu)$, $\nu = \alpha j$.

Теперь предположим, что операторы $\mathcal{J}_\alpha$ в гамильтониане (I), $g_\alpha < 0$, имеют вид

$$\mathcal{J}_\alpha = \frac{1}{V} \sum_{(j)} \mathcal{J}_{\alpha j}, \qquad (I5)$$

где $\mathcal{J}_{\alpha j}$ - оператор, действующий на переменную $n_{\alpha j}$. На эти операторы наложим следующие ограничения:

$$\frac{1}{V} \sum_{\alpha, j} \| \mathcal{J}_{\alpha j} \| \leq K_1,$$
$$\frac{1}{V} \sum_{\alpha, j} \| \mathcal{J}_{\alpha j} \|^2 \leq K_2. \qquad (I6)$$

В отношении оператора T будем предполагать, как и раньше, что

$$\left| \frac{\theta}{V} \ln Sp\, e^{-\frac{T}{\theta}} \right| \leq M_0 \qquad (I7)$$

существует хотя бы при каждом конечном значении объема V.

Примеры такого типа нетрудно подобрать. Например, в спиновом гамильтониане [4]

$$H = +\frac{J}{2N}\sum_{f,g}\vec{\sigma}_f\vec{\sigma}_g - \mu h\sum_f \vec{\sigma}_f\vec{n},\quad J>0,$$

Положив $V=N$, имеем $J_\alpha = \frac{1}{N}\sum_{(j)}\sigma_j^\alpha$, $J_{\alpha j} = \sigma_j^\alpha$,

где $J_{\alpha j}$ состоят из спиновых операторов, действующих на спин j-го узла.

Возьмем в качестве оператора

$$T = \sum_{(j)} T_j\,, \tag{I9}$$

а в качестве

$$J_\alpha = \frac{1}{N}\sum_{(j)} J_{\alpha j} = \frac{1}{N}\sum_{(j)}\sigma_j^\alpha .$$

Тогда условия (I6) выполнены, а условие (I7) потребует существования предела

$$-\frac{\theta}{V}\sum_{(j)}\ln Sp\, e^{-\{T_j + 2\sum_{(\alpha)} g_\alpha (C_\alpha J_{\alpha j}^+ + \overset{*}{C}_\alpha J_{\alpha j})\}/\theta} - 2\sum_{(\alpha)} g_\alpha |C_\alpha|^2 \longrightarrow f_\infty(C)$$

(Шпур берется по r-мерной матрице).

Нетрудно видеть, что при наличии (I6) условия нашей теоремы выполнены.

В качестве примера можно также взять

$$J_\alpha = \frac{1}{N}\sum_{(j)} S_{\alpha j}\lambda_{\alpha j} \quad ,\text{где} \quad S^2 = \ell(\ell+1).$$

Спин S можно брать любой, ℓ - полуцелое или целое

число. $S_{\alpha j}$ есть α-компонента на j-ом узле. В этом случае, по существу, гильбертово пространство функций $\Phi(\ldots n_j\ldots)$ является конечномерным эвклидовым пространством, т.к. при каждом фиксированном N имеет конечное число узлов. Операторы (I5) в этом пространстве по-прежнему ограничены (I6), K_1 и K_2 не зависят от V.

II.

Рассмотрим модельные системы, когда в гамильтониане (I) теоремы I операторы J_α, T выбраны соответственно условиям (I5), (I9), и покажем, что в этом случае предельные соотношения типа (5) можно обобщить не только на системы с отрицательным взаимодействием, но и на системы с положительным взаимодействием. Тогда разность между свободными энергиями, вычисленными для модельного (I) и аппроксимирующего (4) гамильтонианов с положительным взаимодействием $(g_\alpha < 0)$, будет асимптотически мала в процессе предельного перехода $V\to\infty$, что означает асимптотическую эквивалентность гамильтониана

$$H = T + 2V\sum_{(\alpha)} g_\alpha J_\alpha J_\alpha^+ \tag{20}$$

(где положено $g_\alpha = |g_\alpha|$. $\max(\ldots,|g_\alpha|,\ldots) = g;\ 1\le\alpha\le r$) аппроксимирующему гамильтониану

$$H(C) = T + 2V\sum_{(\alpha)} g_\alpha (C_\alpha J_\alpha^+ + \overset{*}{C}_\alpha J_\alpha - C_\alpha \overset{*}{C}_\alpha). \tag{21}$$

Имеем тождественно

$$H = H(C) + 2V\sum_{(\alpha)} g_\alpha (\mathcal{J}_\alpha - C_\alpha)(\mathcal{J}_\alpha^+ - \overset{*}{C}_\alpha) \geq H(C). \qquad (22)$$

Поэтому в отличие от теоремы I здесь

$$f_V(H) \geq f_V\{H(C)\}, \qquad (23)$$

причем это неравенство выполняется для любых комплексных C. Следовательно, если желаем подобрать числа C в формуле (21) таким образом, чтобы

$$f_V\{H(C)\}$$

оказалось возможно ближе к выражению $f_V(H)$, мы должны определить C из условия абсолютного максимума $(C = \overline{C})$,

$$f_V\{H(\overline{C})\} = \max_{(C)} f_V\{H(C)\}.$$

При конечном объеме V все производные – функции аналитические, абсолютный максимум существует [5]. Покажем сначала, что задача о нахождении абсолютного максимума имеет единственное, ограниченное решение.

Предположим, что в рассматриваемом гамильтониане (20) операторы $\mathcal{J}_\alpha, T$ удовлетворяют условиям

$$\|\mathcal{J}_\alpha\| \leq M_1, \quad |f_V(T)| \leq M_0. \qquad (24)$$

Введем выражение

$$F_V(C) = f_V\{H(C)\} + 2\sum_{(\alpha)} g_\alpha C_\alpha \overset{*}{C}_\alpha =$$

$$= f_V\{T + 2V\sum_{(\alpha)} g_\alpha (C_\alpha \mathcal{J}_\alpha^+ + \overset{*}{C}_\alpha \mathcal{J}_\alpha)\},$$

и заметим, что

$$\frac{\partial F_V(C)}{\partial C_\alpha} = 2g_\alpha \langle \mathcal{J}_\alpha^+ \rangle_{H(C)}; \quad \frac{\partial F_V(C)}{\partial \overset{*}{C}_\alpha} = 2g_\alpha \langle \mathcal{J}_\alpha \rangle_{H(C)}.$$

Отсюда в силу условий (24) получаем:

$$\left|\frac{\partial F_V(C)}{\partial C_\alpha}\right| \leq 2g_\alpha M_1; \left|\frac{\partial F_V(C)}{\partial \overset{*}{C}_\alpha}\right| \leq 2g_\alpha M_1. \qquad (25)$$

С другой стороны, проблема абсолютного максимума функции

$$f_V\{H(C)\} \qquad (26)$$

эквивалентна проблеме абсолютного минимума функции

$$-f_V\{H(C)\} = -F_V(C) + 2\sum_{(\alpha)} g_\alpha C_\alpha \overset{*}{C}_\alpha.$$

Поэтому, принимая во внимание неравенства (25) и повторяя рассуждения из работы [I], убеждаемся в существовании величин $C = \overline{C}$, реализующих абсолютный максимум функции (26) в пространстве всех точек $C(C_1, C_2, \ldots C_r)$ с комплексными значениями C_α.

Поскольку функция (26) обладает непрерывными частными производными всех порядков по переменным $\ldots C_\alpha \ldots, \ldots \overset{*}{C}_\alpha \ldots,$

видим, что значения

$$C_\alpha = \bar{C}_\alpha , \quad \overset{*}{C}_\alpha = \overset{*}{\bar{C}}_\alpha$$

являются решениями уравнений

$$\frac{\partial f_V(H(c))}{\partial C_\alpha} = 0; \qquad \frac{\partial f_V(H(c))}{\partial \overset{*}{C}_\alpha} = 0. \tag{27}$$

Отсюда

$$\bar{C}_\alpha = \langle J_\alpha \rangle_{H(c)}; \quad \overset{*}{\bar{C}}_\alpha = \langle J_\alpha^+ \rangle_{H(c)}. \tag{28}$$

Следовательно, на основании (24) число $\bar{C}_\alpha$ ограничено:

$$|\bar{C}_\alpha| \leq M_1 , \quad 1 \leq \alpha \leq r .$$

Докажем, что точка $C = \bar{C}$ является единственной. Более того, покажем, что решение уравнений (27) единственно.

В нашем рассуждении будем использовать неравенство из работы [6] :

$$\frac{1}{V} \langle \Gamma_1 \rangle_{\Gamma_0 + \Gamma_1} \leq f_V(\Gamma_0 + \Gamma_1) - f_V(\Gamma_0) \leq \frac{1}{V} \langle \Gamma_1 \rangle_{\Gamma_0}, \tag{29}$$

которое относится к произвольным эрмитовым гамильтонианам Γ_0, Γ_1. Итак, покажем, что уравнения для определения максимума (27) имеют только одно единственное решение $C = \bar{C}$.

Допустим, что эти уравнения имеют два решения:

$$C^{(0)} \text{ и } C^{(1)}.$$

Всегда можно подобрать их так, что свободная энергия, соответствующая одному из них, будет больше или равна свободной энергии, соответствующей другому решению.

Применим теперь неравенство (29) и положим в нем

$$H(C^{(0)}) = \Gamma_0 , \quad H(C^{(1)}) = \Gamma_1 + \Gamma_0 ;$$

тогда

$$\Gamma_1 = 2V \sum_{(\alpha)} g_\alpha \Big\{ J_\alpha (\overset{*}{C}{}_\alpha^{(1)} - \overset{*}{C}{}_\alpha^{(0)}) + \overset{+}{J}_\alpha (C_\alpha^{(1)} - C_\alpha^{(0)}) - C_\alpha^{(1)} \overset{*}{C}{}_\alpha^{(1)} + C_\alpha^{(0)} \overset{*}{C}{}_\alpha^{(0)} \Big\}.$$

Поэтому имеем

$$\frac{1}{V} \langle \Gamma_1 \rangle_{\Gamma_0 + \Gamma_1} = \frac{1}{V} \langle \Gamma_1 \rangle_{H(C^{(1)})} =$$

$$= 2 \sum_{(\alpha)} g_\alpha \Big\{ C_\alpha^{(1)} (\overset{*}{C}{}_\alpha^{(1)} - \overset{*}{C}{}_\alpha^{(0)}) + \overset{*}{C}{}_\alpha^{(1)} (C_\alpha^{(1)} - C_\alpha^{(0)}) - C_\alpha^{(1)} \overset{*}{C}{}_\alpha^{(1)} + C_\alpha^{(0)} \overset{*}{C}{}_\alpha^{(0)} \Big\} = 2 \sum_{(\alpha)} g_\alpha \left| C_\alpha^{(1)} - C_\alpha^{(0)} \right|^2 ; \tag{30}$$

$$2 \sum_{(\alpha)} g_\alpha \left| C_\alpha^{(1)} - C_\alpha^{(0)} \right|^2 \leq f_V\{H(C_\alpha^{(1)})\} - f_V\{H(C_\alpha^{(0)})\} \leq 0 .$$

Отсюда тождественно следует, что

$$C_\alpha^{(1)} \equiv C_\alpha^{(0)} .$$

Теперь нам нужно показать, что разность

$$f_V\{H(C^V)\} - f_V(H) \tag{31}$$

действительно стремится к нулю, когда $V \to \infty$. Здесь $C = C^V$ обозначает точку абсолютного максимума для свободной энергии. Для доказательства ее существования можно также повторить рассуждения работы [7], касающиеся точки абсолютного минимума. Воспользуемся соотношениями (29), в качестве Γ_0 возьмем

$$\Gamma_0 = H(C),$$

а в качестве

$$\Gamma_1 = H - H(C) = 2V\sum_{(\alpha)} g_\alpha (\mathcal{J}_\alpha - C_\alpha)(\mathcal{J}_\alpha^+ - \overset{*}{C}_\alpha).$$

Таким образом

$$2\sum_{(\alpha)} g_\alpha < (\mathcal{J}_\alpha - C_\alpha)(\mathcal{J}_\alpha^+ - \overset{*}{C}_\alpha) >_H \leqslant$$

$$\leqslant f_V(H) - f_V(H(C^V)) \leqslant \qquad (32)$$

$$\leqslant 2\sum_{(\alpha)} g_\alpha < (\mathcal{J}_\alpha - C_\alpha)(\mathcal{J}_\alpha^+ - \overset{*}{C}_\alpha) >_{H(C)}.$$

Здесь

$$C^V = C_\alpha^V,$$

а C_α удовлетворяет соотношениям

$$< \mathcal{J}_\alpha >_{H(C)} = C_\alpha .$$

Теперь вспомним наше основное допущение (I5) о том, что $\mathcal{J}_\alpha$ представляется в виде

$$\mathcal{J}_\alpha = \frac{1}{V}\sum_{(j)} \mathcal{J}_{\alpha j} .$$

Обозначая для удобства

$$I_{\alpha j} = \mathcal{J}_{\alpha j} - < \mathcal{J}_{\alpha j} >_{H(C)},$$

имеем из (32):

$$\leqslant \frac{2}{V^2}\sum_{(\alpha)} g_\alpha \sum_{j,k} < I_{\alpha j}\, I_{\alpha k}^+ >_{H(C)}. \qquad (33)$$

Но при $j = k$ $H(C)$ – аддитивная величина, т.к. $T = \sum_{(j)} T_j$. Нетрудно видеть, что если $j \neq k$, то среднее от произведения равно произведению средних. Именно благодаря аддитивности гамильтониана $H(C) = \sum_{(j)} H_j(C)$,

$$H_j(C) = T_j + 2\sum_{(\alpha)} g_\alpha (C_\alpha \overset{+}{\mathcal{J}}_{\alpha j} + \overset{*}{C}_\alpha \mathcal{J}_{\alpha j} - |C_\alpha|^2), \qquad (34)$$

по самому подбору $I_{\alpha j}$ получаем:

$$< I_{\alpha j} >_{H(C)} < I_{\alpha k}^+ >_{H(C)} = 0 .$$

Остается рассмотреть только диагональные элементы $j = k$. Получаем окончательно неравенство типа (5):

$$2\sum_{(\alpha)} g_\alpha < (\mathcal{J}_\alpha - C_\alpha)(\overset{+}{\mathcal{J}}_\alpha - \overset{*}{C}_\alpha) >_H \leqslant f_V(H) - f_V(H(C^V)) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{V^2}\sum_{\alpha, j} g_\alpha < I_{\alpha j}\, I_{\alpha j}^+ >_{H(C)} \leqslant \frac{8 g K_2}{V}; \qquad (35)$$

$$0 \leqslant f_V(H) - f_V(H(C^V)) \leqslant \xi_V;$$

$$\xi_V = \xi\left(\frac{1}{V}\right) = \frac{Const}{V},\ \xi_V = O(\varepsilon_V).$$

Здесь существенно использован тот факт, что, согласно условиям (I6), $\mathcal{J}_{\alpha j}$ ограничены по норме. Из этих неравенств получаем, что не только свободные энергии близки, но и оператор

$\mathcal{I}_\alpha$ асимптотически близок к соответствующему $\mathcal{C}_\alpha$. Знание этого, как известно [8, 9], (см. также [7]), весьма важно для доказательства близости корреляционных функций, построенных на основе модельного и соответствующего аппроксимирующего гамильтонианов.

В заключение автор выражает благодарность Н.Н.Боголюбову (мл.) за ценные советы и обсуждение.

Литература

1. N.N.Bogolubov (Jr.). Physica, 32, 933-944, 1966
2. Н.Н.Боголюбов. Препринт ОИЯИ, Р-5II, Дубна, I960.
3. N.N.Bogolubov (Jr.). A Method for Studying Model Hamiltonians, Pergamon Press, 1972.
4. С.В.Тябликов. Методы квантовой теории магнетизма, гл. П. М., Наука, I965.
5. N.N.Bogolubov (Jr.). Physica, 41, 601-621, 1969.
6. Н.Н.Боголюбов (мл.). ТМФ, том 5, № I, I36, I970.
7. Н.Н.Боголюбов (мл.), И.Г.Бранков. Сообщение ОИЯИ, Р4-7426, Дубна, I973.
8. Н.Н.Боголюбов (мл.). Препринт ИТФ-67-I, Киев, I967.
9. И.Г.Бранков, А.С.Шумовский. Сообщение ОИЯИ, Р4-6899, Дубна, I973.

Рукопись поступила в издательский отдел
I9 февраля I974 года.