ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 7735

Й.Г.Бранков, В.А.Загребнов, Н.С.Тончев

АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ДИККЕ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 7735

Й.Г.Бранков, В.А.Загребнов, Н.С.Тончев

АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ДИККЕ

Направлено в ТМФ

Бранков Й.Г., Загребнов В.А., Тончев Н.С. P4 - 7735

Асимптотически точное решение обобщенной модели Дикке

Точное решение обобщенной модели Дикке получено с помощью модифицированного метода Н.Н.Боголюбова (мл.). Исследована термодинамика бозонной и спиновой подсистем. Показано, что исходная система, содержащая взаимодействие с бозонным полем, термодинамически эквивалентна анизотропной X-Y -модели с дальнодействием.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1974

Brankov J.G., Zagrebnov V.A., Tonchev N.S. P4 - 7735

Asymptotically Exact Solution for the Generalized Dicke Model

The exact solution for the generalized Dicke model is obtained by using a modification of the method of N.N.Bogolubov (Jr.). Thermodynamics of the boson and spin subsystems is studied. It is shown that the initial system, containing interaction with a boson field, is thermodynamically equivalent to an anisotropic X-Y model with infinitely long range of interaction.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1974

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе рассматривается статистическая система, являющаяся обобщением известной модели Дикке /1/

$$H_D = a^+ a + \epsilon S^z + \frac{\lambda}{\sqrt{N}}[J^+ a + J^- a^+], \qquad /1/$$

где

$$J^{\pm} = S^{\pm} + \mu S^{\mp}, \quad S^{\pm} = S^x \pm i S^y, \quad S^{\alpha} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \sigma_j^{\alpha},$$

σ^{α} ($\alpha = 1,2,3$) - матрицы Паули, a, a^+ - бозе-операторы.

Гамильтониан /1/ изучался /обычно при $\mu = 0$ / в многочисленных работах /2–7/, посвященных исследованию системы N двухуровневых атомов, взаимодействующих с электромагнитным излучением, представляющей интерес для ряда проблем квантовой радиофизики /8/. Отметим также, что аналогичным гамильтонианом описывается в некотором приближении система электронов, взаимодействующих с одной модой фононного поля, или взаимодействие квазиспиновой системы с одной модой электромагнитного излучения.

Недавно Хепп и Либ /9/ показали, что термодинамическая задача, соответствующая гамильтониану /1/ и его обобщению на случай конечного числа мод, имеет точное решение. Ими было показано также, что при определенных условиях исследуемая модель обнаруживает фазовый переход второго рода в так называемое "сверхизлучающее" состояние. Этому состоянию соответствует макроскопическое заполнение бозонной моды и появление упорядочения в спиновой подсистеме, взаимодействие в которой осуществляется за счет обмена с бозонным полем. Термодинамическое поведение системы /1/

характеризуется особенностями, специфическими для фазовых переходов в системах с дальнодействием типа Ван-дер-Ваальса [9,10].

Здесь предлагается математически строгое и достаточно простое /ср. [9]/ исследование модели /1/. Метод, использованный ниже, основан на обобщении мажорационной техники Н.Н.Боголюбова /мл./[11–12], развитой первоначально для гамильтонианов, построенных на ограниченных операторах.

Мы покажем, что исходная система /1/ термодинамически эквивалентна системе эффективно взаимодействующих между собой спинов, т.е.

$$\lim_{N\to\infty} f_N[H_D] = \lim_{N\to\infty} f_N[H_{SB}] , \qquad /2/$$

где

$$H_{SB} = H_S + H_B , \quad f_N[H] = -\frac{\theta}{N}\ln \mathrm{Sp}\, e^{-\beta H} \qquad /3/$$

$\theta = \frac{1}{\beta}$ - температура системы и

$$H_S = \epsilon S^z - \frac{\lambda^2}{N} J^+ J^- , \quad H_B = \tilde{a}^+ \tilde{a} ,$$
$$/4/$$
$$\tilde{a}^+ = a^+ + \lambda\sqrt{N}\,\bar{\eta}^* , \quad \tilde{a} = a + \lambda\sqrt{N}\,\bar{\eta} .$$

Здесь $\bar{\eta}$ является параметром порядка спиновой системы.

Так как вклад гамильтониана H_B в плотность свободной энергии системы /3/ при переходе к термодинамическому пределу $N\to\infty$, $V\to\infty$, $\frac{N}{V} = \mathrm{const}$. стремится к нулю, взаимодействие с бозонным полем в системе /1/ сводится к появлению дальнодействующих обменных сил притяжения в спиновой подсистеме:

$$\lim_{N\to\infty} f_N[H_D] = \lim_{N\to\infty} f_N[H_{SB}] = \lim_{N\to\infty} f_N[H_S] . \qquad /5/$$

Следует заметить, однако, что хотя гамильтониан H_B термодинамически пренебрежим, плотность числа заполнения бозонов $\langle \frac{a^+ a}{N} \rangle$ /см. формулу /29а// пропорциональна параметру порядка $\bar{\eta}$ в спиновой подсистеме H_S. Таким образом, при появлении упорядочения спинов возникает макроскопическое заполнение бозонного уровня, т.е. "сверхизлучающее" состояние системы.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Преобразуем гамильтониан /1/ к виду:

$$H = (a^+ + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} J^+)(a + \frac{\lambda}{\sqrt{N}} J^-) + \epsilon S^z - \frac{\lambda^2}{N} J^+ J^- , \qquad /6/$$

и, используя метод Н.Н.Боголюбова [13, 14], построим аппроксимирующий гамильтониан путем замены в /6/ операторов $J^{\pm}/N$, асимптотически коммутирующих со всей алгеброй матриц Паули, на c-числа:

$$H_0(\eta) = (a^+ + \lambda\sqrt{N}\eta^*)(a + \lambda\sqrt{N}\eta) + \epsilon S^z -$$
$$- \lambda^2 (J^+\eta + J^-\eta^*) + \lambda^2 N \eta^*\eta . \qquad /7/$$

С помощью теоремы Н.Н.Боголюбова [x] /цитируемой далее как теорема 1/ для разности плотностей свободных энергий исходного и аппроксимирующего гамильтонианов получим оценку:

$$-\frac{1}{N}\langle H_I(\eta)\rangle_0 \le f_N[H_0(\eta)] - f_N[H] \le -\frac{1}{N}\langle H_I(\eta)\rangle , \qquad /8/$$

где

$$H_I(\eta) = \frac{\lambda}{\sqrt{N}}(J^+ - N\eta^*)(a + \lambda\sqrt{N}\eta) + \text{э.с.} = H - H_0(\eta) .$$

---

[x] Доказательство см. в [12].

Здесь $\langle \ldots \rangle$ и $\langle \ldots \rangle_0$ термодинамические средние по модельному и аппроксимирующему гамильтонианом. Поскольку гамильтониан $H_0(\eta)$ инвариантен по отношению к градиентному преобразованию операторов

$$\tilde{a}^{+} = a^{+} + \lambda\sqrt{N}\eta^{*}, \qquad \tilde{a} = a + \lambda\sqrt{N}\eta ,$$

то $\langle H_I(\eta)\rangle_0 = 0$.

Для правой части неравенства /8/ имеем оценку

$$|\langle H_I(\eta)\rangle| \le |\lambda| \Big[|\langle (J^{+}-N\eta^{*})\frac{a}{\sqrt{N}}\rangle| + |\lambda|\,|\eta|\,|\langle J^{+}-N\eta^{*}\rangle| +$$

$$+ |\langle (J^{-}-N\eta)\frac{a^{+}}{\sqrt{N}}\rangle| + |\lambda|\,|\eta|\,|\langle J^{-}-N\eta\rangle| \Big],$$

которую с помощью неравенства Н.Н.Боголюбова

$$|\langle AB\rangle| \le \sqrt{\langle AA^{+}\rangle\langle B^{+}B\rangle} \qquad /9/$$

перепишем в виде:

$$|\langle H_I(\eta)\rangle| \le 2|\lambda| \Big[\big(|\lambda|\,|\eta| + \langle \frac{a^{+}a}{N}\rangle^{1/2}\big) \langle (J^{+}-N\eta^{*})(J^{-}-N\eta)\rangle^{1/2} \Big]. \qquad /10/$$

Покажем сперва, что $\langle \frac{a^{+}a}{N}\rangle$ ограничено константой, не зависящей от N. С этой целью воспользуемся теоремой 1 для гамильтонианов H /см. /1// и T, где:

$$T = \epsilon S^{z} - 2\frac{\lambda^{2}}{N}J^{+}J^{-} + \frac{1}{2}a^{+}a , \qquad |f_N[T]| \le \text{const}.$$

Тогда:

$$0 \le \frac{1}{2N}\langle (a^{+} + \frac{2\lambda}{\sqrt{N}}J^{+})(a + \frac{2\lambda}{\sqrt{N}}J^{-})\rangle \le f_N[H] - f_N[T] \le$$

$$\le \frac{1}{2N}\langle (a^{+} + \frac{2\lambda}{\sqrt{N}}J^{+})(a + \frac{2\lambda}{\sqrt{N}}J^{-})\rangle_T . \qquad /11/$$

Поскольку правая часть неравенства /11/ ограничена, в чем можно убедиться прямым вычислением, то отсюда следует ограниченность плотности свободной энергии модельного гамильтониана $f_N[H]$. Кроме того, из /11/ следует ограниченность суммы средних:

$$0 \le \frac{1}{2}\Big[\langle \frac{a^{+}a}{N}\rangle + 4\lambda^{2}\langle \frac{J^{+}J^{-}}{N^{2}}\rangle + 2\lambda\langle \frac{J^{+}}{N}\frac{a}{\sqrt{N}}\rangle + 2\lambda\langle \frac{J^{-}}{N}\frac{a^{+}}{\sqrt{N}}\rangle\Big] \le K ,$$

где K конечно и не зависит от N.

Так как

$$0 \le \langle \frac{J^{+}}{N}\frac{J^{-}}{N}\rangle \le \Big\|\frac{J^{\pm}}{N}\Big\|^{2} = M ,$$

где $\|\ldots\|$ - обозначает норму оператора, то для оценки $\langle \frac{a^{+}a}{N}\rangle$ с помощью соотношения /12/ необходимо показать ограниченность снизу величины

$$\langle \frac{J^{+}}{N}\frac{a}{\sqrt{N}}\rangle + \langle \frac{J^{-}}{N}\frac{a^{+}}{\sqrt{N}}\rangle .$$

Искомую оценку нетрудно получить из теоремы 1 для исходного гамильтониана H и гамильтониана $H^{2\lambda}$ с удвоенной константой взаимодействия:

$$f_N[H^{2\lambda}] - f_N[H] \le \lambda\langle \frac{J^{+}}{N}\frac{a}{\sqrt{N}} + \frac{J^{-}}{N}\frac{a^{+}}{\sqrt{N}}\rangle .$$

С учетом неравенства /12/, для $\langle \frac{a^{+}a}{N}\rangle$ находим:

$$0 \le \langle \frac{a^{+}a}{N}\rangle \le 2K + f_N[H] - f_N[H^{2\lambda}] \le L . \qquad /13/$$

Подставляя далее оценку /13/ в неравенство /10/, получим

$$|\langle H_I(\eta)\rangle| \le 2|\lambda|(L^{1/2} + |\lambda|\,|\eta|)\langle (J^{+}-N\eta^{*})(J^{-}-N\eta)\rangle^{1/2}. \qquad /14/$$

Вернемся теперь к оценке /8/ для разности плотностей свободных энергий модельного и аппроксимирующего гамильтонианов:

$$0 \le f_N[H_0(\eta)] - f_N[H] \le -\frac{1}{N}\langle H_I(\eta)\rangle . \qquad /15/$$

Принимая во внимание, что параметр η в /15/ пока произволен, выберем его значение из условия наилучшей аппроксимации:

$$\min_{(\eta)} f_N[H_0(\eta)] = f_N[H_0(\bar{\eta})] , \qquad /16/$$

приводящего к уравнениям:

$$\eta = \langle \frac{J^-}{N} \rangle_{H_0(\eta)} , \quad \eta^* = \langle \frac{J^+}{N} \rangle_{H_0(\eta)} . \qquad /16a/$$

Тогда

$$0 \le f_N[H_0(\bar{\eta})] - f_N[H] \le f_N[H(\langle \frac{J^-}{N} \rangle)] - f_N[H] \le \qquad /17/$$

$$\le 2 \frac{|\lambda|}{N} (L^{½} + |\lambda| M^{½}) \langle (J^+ - \langle J^+ \rangle)(J^- - \langle J^- \rangle) \rangle^{½} ,$$

где мы учли, что, согласно /16a/:

$$|\eta| \le \| \frac{J^\pm}{N} \| = M^{½} .$$

Для оценки коррелятора в правой части /17/ применим мажорационную технику Н.Н.Боголюбова /мл./ /11, 12/. Введем в исходный и аппроксимирующий гамильтонианы /7/ члены с источниками:

$$\mathcal{H} = H + \nu J^- + \nu^* J^+ , \qquad /18/$$

$$\mathcal{H}_0(\eta) = H_0(\eta) + \nu J^- + \nu^* J^+ .$$

Корреляционное среднее в правой части неравенства /17/ путем известных формальных преобразований /11/ нетрудно оценить через вторые производные от плотности свободной энергии по источникам:

$$\langle (J^+ - \langle J^+ \rangle_{\mathcal{H}})(J^- - \langle J^- \rangle_{\mathcal{H}}) \rangle \le \theta N \left(- \frac{\partial^2 f[\mathcal{H}]}{\partial \nu\, \partial \nu^*}\right) + \qquad /19/$$

$$+ N^{4/3} \left\{ \frac{2}{N^2} \langle [\mathcal{H}, J^+][J^-, \mathcal{H}] \rangle_{\mathcal{H}} \right\}^{1/3} \left(- \frac{\partial^2 f[\mathcal{H}]}{\partial \nu^* \partial \nu}\right)^{2/3} .$$

С учетом явного вида гамильтониана $\mathcal{H}$ /18/ имеем:

$$\frac{1}{N}[\mathcal{H}, J^+] = \frac{\epsilon}{N}[S^z, J^+] + \frac{\lambda}{N} \frac{a^+}{\sqrt{N}} [J^-, J^+] + \frac{\nu}{N}[J^-, J^+] , \qquad /20/$$

где:

$$\frac{1}{N} \| [J^\mp, J^\pm] \| \le \text{const}, \quad \frac{1}{N} \| [S^z, J^\pm] \| \le \text{const}.$$

Используя неравенство /9/ и оценку /13/, получаем

$$\frac{2}{N^2} \langle [\mathcal{H}; J^+][J^-, \mathcal{H}] \rangle_{\mathcal{H}} \le R(\nu) , \qquad /21/$$

где $R(\nu)$ не зависит от N и конечно при любом фиксированном ν.

Таким образом, неравенство /17/ принимает вид

$$0 \le f_N[\mathcal{H}_0(\bar{\eta})] - f_N[\mathcal{H}] \le \qquad /22/$$

$$\le 2|\lambda| (L^{½} + |\lambda| M^{½}) \left\{ \frac{\theta}{N} \left(- \frac{\partial^2 f_N[\mathcal{H}]}{\partial \nu\, \partial \nu^*}\right) + \frac{1}{N^{2/3}} R^{1/3}(\nu) \left(- \frac{\partial^2 f_N[\mathcal{H}]}{\partial \nu\, \partial \nu^*}\right)^{2/3} \right\}^{½} .$$

Для проведения оценки разности плотностей свободных энергий учтем, что $f_N[\mathcal{H}_0(\bar{\eta})]$ и $f_N[\mathcal{H}]$ не зависят от фазы источников ν, ν^*, а только от их модуля x/ $r = \sqrt{\nu \nu^*}$. Тогда:

$$\frac{\partial f_N}{\partial \nu^*} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{\nu^*}} \frac{\partial}{\partial r} f_N ,$$

$$\frac{\partial^2 f_N}{\partial \nu\, \partial \nu^*} = \frac{1}{4r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f_N}{\partial r} \right) .$$

x/ Независимость $f_N[\mathcal{H}]$ от фазы ϕ источников $\nu = |\nu| e^{i\phi}$ легко показать с помощью канонического преобразования $a \to a e^{-i\phi}$, $J^+ \to J^+ e^{i\phi}$. Аналогичное доказательство можно провести и для $f_N[\mathcal{H}_0(\bar{\eta})]$ /см. /12//.

Далее усредним неравенство /22/ с весом r на отрезке $[0,\ell]$. Учитывая ограниченность первой производной

$$\left|\frac{\partial f_N}{\partial r}\right| \le \frac{2}{N}\,\|J^{\pm}\| = 2M^{1/2},$$

применяя интегральное неравенство Гельдера и теорему о среднем, получаем:

$$\Delta_N(\zeta) \le 4|\lambda|(L^{1/2}+|\lambda|M^{1/2})\sqrt{\frac{\theta M^{1/2}}{2N\ell}+\frac{R^{1/3}(\ell)\,M^{1/3}}{(2N\ell)^{2/3}}}, \qquad /23/$$

где

$$\Delta_N(r) = f_N[\mathcal{H}_0(\bar\eta)] - f_N[\mathcal{H}], \quad \zeta\in[0,\ell].$$

Заметим, что

$$\Delta_N(0) \le \ell \max_{r\in[0,\ell]}\left|\frac{\partial \Delta_N(r)}{\partial r}\right| + \Delta_N(\zeta) \le 4M^{1/2}\ell + \Delta_N(\zeta),$$

тогда, подставляя выражение /23/ в последнее неравенство, находим:

$$0 \le \Delta_N(0) \le 4M^{1/2}\ell + 2|\lambda|(L^{1/2}+|\lambda|M^{1/2})\sqrt{\frac{\theta M^{1/2}}{2N\ell}+\frac{R^{1/3}(\ell)\,M^{1/3}}{(2N\ell)^{2/3}}}. \qquad /24/$$

Воспользуемся теперь произвольностью ℓ в правой части /24/ и положим $\ell \sim N^{1/4}$. Тогда для разности плотностей свободных энергий исходного гамильтониана /1/ и аппроксимирующего /7/ получаем оценку вида:

$$0 \le f_N[H_0(\bar\eta)] - f_N[H] \le O\left(\frac{1}{N^{1/4}}\right). \qquad /25/$$

Таким образом, термодинамическая эквивалентность $H_0(\bar\eta)$ и H доказана.

Представим далее $H_0(\bar\eta)$ тождественным образом в виде /см. /4/ и /7//:

$$H_0(\bar\eta) = H_B + H_{S0}(\bar\eta), \qquad /26/$$

где

$$H_{S0}(\bar\eta) = \epsilon S^z - \lambda^2(J^+\bar\eta + J^-\bar\eta^*) + \lambda^2 N|\bar\eta|^2, \qquad /27/$$

и заметим, что H_{S0} термодинамически эквивалентен гамильтониану анизотропной X–Y модели H_S /см. /4//, т.е. /15/ :

$$|f_N[H_S] - f_N[H_{S0}]| \le \epsilon_N \to 0, \quad N\to\infty.$$

Тем самым доказана термодинамическая эквивалентность гамильтонианов H_D и H_{SB} /см. /4//.

3. ТЕРМОДИНАМИКА БОЗОННОЙ ПОДСИСТЕМЫ

Плотность свободной энергии, соответствующую гамильтониану H_B, теперь нетрудно вычислить, она равна

$$f_N[H_B] = \frac{\theta}{N}\ln\,[1-e^{-\beta}]\underset{N\to\infty}{\to} 0. \qquad /28/$$

Следовательно, ее вклад в термодинамику системы H_{SB} равен нулю /при $N\to\infty$ /, т.е. исходный гамильтониан H_D термодинамически эквивалентен H_S /или $H_{S0}(\bar\eta)$ / /см. /5//. Тем не менее, термодинамика системы "голых бозонов" a^+, a, как отмечалось выше, нетривиальна. Действительно, рассмотрим плотность среднего числа заполнения $\langle \frac{a^+a}{N}\rangle$. Покажем вначале, что в термодинамическом пределе

$$\lim_{N\to\infty}\left[\left\langle\frac{a^+a}{N}\right\rangle - \left\langle\frac{a^+a}{N}\right\rangle_{H_B}\right] = 0, \qquad /29/$$

где

$$\left\langle\frac{a^+a}{N}\right\rangle_{H_B} = \lambda^2|\bar\eta|^2. \qquad /29a/$$

Введем для этого в исходный гамильтониан H_D параметр $\omega \ge \delta > 0$:

$$H_{D;\omega} = \omega a^+a + \epsilon S^z + \frac{\lambda}{\sqrt{N}}[J^+a + J^-a^+]; \qquad /30/$$

тогда термодинамически эквивалентный ему /ср. /7// имеет вид:

$$H_{0,\omega}(\bar\eta_\omega) = \omega\, a^+ a + \lambda\sqrt{N}(\bar\eta^*_\omega\, a + \bar\eta_\omega\, a^+) + 2|\bar\eta_\omega|^2 \lambda^2 \frac{N}{\omega} +$$

$$+\epsilon S^z - \frac{\lambda^2}{\omega}[\,J^+\bar\eta_\omega + J^-\bar\eta^*_\omega\,]\,. \qquad /31/$$

Дифференцируя плотности свободной энергии, соответствующие гамильтонианам /30/, /31/, находим:

$$\frac{d}{d\omega} f_N[H_{D,\omega}] = \left\langle \frac{a^+ a}{N} \right\rangle_{H_{D,\omega}},$$

$$/32/$$

$$\frac{d}{d\omega} f_N[H_{0,\omega}] = \frac{\partial f_N[H_{0,\omega}]}{\partial\omega} = \left\langle \frac{a^+ a}{N} \right\rangle_{H_{0,\omega}},$$

где принято во внимание, что по условию /16/

$$\frac{\partial}{\partial\eta} f_N[H_{0,\omega}(\eta)]\,\Big|_{\eta=\bar\eta} = 0\,.$$

Так как свободная энергия $f_N[H_{D,\omega}]$ является выпуклой функцией параметра ω при любом N:

$$\frac{\partial^2}{\partial\omega^2} f_N[H_{D,\omega}] \le 0\,, \qquad /33/$$

то воспользуемся теоремой Гриффитса о сходимости выпуклых функций и их производных /16/.

Теорема Гриффитса

Пусть $\{g_n(x)\}$ – последовательность выпуклых на интервале (a,b) функций, сходящихся поточечно к $g(x)$. Тогда в каждой точке дифференцируемости $g_n(x)$ и $g(x)$ последовательность $\{\frac{d}{dx}g_n(x)\}$ сходится к $\frac{d}{dx}g(x)$.

Учитывая, что производные /32/ существуют и ограничены для всех строго положительных ω /см. /13/, /29//, немедленно получаем:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{d}{d\omega} f_N[H_{D,\omega}] = \frac{d}{d\omega} f_N[H_{0,\omega}]\,,$$

т.е. соотношение /29/ доказано. Из /29/ следует, что

среднее число заполнения бозонов $\lim_{N\to\infty}\left\langle\frac{a^+a}{N}\right\rangle = \lambda^2|\bar\eta|^2$ становится макроскопическим при появлении упорядочения в спиновой подсистеме.

4. *ТЕРМОДИНАМИКА СПИНОВОЙ ПОДСИСТЕМЫ*

Выразим гамильтониан H_S, который, как показано выше, термодинамически эквивалентен исходному H_D, через спиновые операторы S^x, S^y, S^z:

$$H_S = \epsilon S^z - \frac{\lambda^2}{N}[(1+\mu)^2(S^x)^2 + (1-\mu)^2(S^y)^2]\,. \qquad /34/$$

Плотность свободной энергии $f_N(H_S)$ в термодинамическом пределе равна:

$$\lim_{N\to\infty} f_N[H_S] = f_N[H_{S0}(\bar\eta)] = -\theta\ln 2\,\mathrm{ch}\frac{\beta E}{2} + \lambda^2|\bar\eta|^2\,, \qquad /35/$$

где

$$E = \sqrt{\epsilon^2 + 4\lambda^4|\bar\eta|^2(1+\mu^2+2\mu\cos\bar\phi)}\,,$$

а $\bar\eta = |\bar\eta|\,e^{i\bar\phi}$ определяется из условия абсолютного минимума функции $f_N[H_{S0}(\eta)]$ /см. /16//. Уравнения /16а/ после вычисления средних по аппроксимирующему гамильтониану $H_{S0}(\eta)$ принимают вид:

$$\eta = \frac{\lambda^2}{E}\eta\,[(1+\mu^2)\eta + 2\mu\eta^*]\,\mathrm{th}\frac{1}{2}\beta E\,,$$

$$/36/$$

$$\eta^* = \frac{\lambda^2}{E}\eta^*[(1+\mu^2)\eta^* + 2\mu\eta]\,\mathrm{th}\frac{1}{2}\beta E\,.$$

Заметим, что при $\mu \ne 0$ функцию $f_N[H_{S0}(\eta)]$ /см. /35// можно сразу минимизировать по фазе

$$\sin\bar\phi = 0\,, \qquad /37/$$

т.е. параметр порядка $\bar{\eta}$ является действительным, $\bar{\eta} = \langle \frac{S^x}{N} \rangle_{H_{S0}(\bar{\eta})}$, и его величина определяется из уравнения

$$\eta = \frac{\lambda^2}{E}[(1+\mu)^2\eta]\,\mathrm{th}\,\frac{1}{2}\beta E, \qquad /38/$$

где

$$E = \sqrt{\epsilon^2 + 4\lambda^4(1+\mu)^2\eta^2}. \qquad /39/$$

Условием существования нетривиального решения уравнения /38/ является требование

$$\frac{\lambda^2(1+\mu)^2}{\epsilon} > 1. \qquad /40/$$

При этом критическая температура $\theta_c > 0$ и равна

$$\theta_c = \frac{1}{2}\epsilon\left[\mathrm{arcth}\,\frac{\epsilon}{\lambda^2(1+\mu)^2}\right]^{-1}. \qquad /41/$$

Следует отметить, что наиболее интересный с физической точки зрения случай $\mu = 1$ /6/ соответствует модели Изинга с взаимодействием $-\frac{\lambda^2}{N}$ /см. /10/ / в поперечном поле:

$$H_S|_{\mu=1} = \epsilon S^z - 4\frac{\lambda^2}{N}(S^x)^2. \qquad /42/$$

Перейдем теперь к рассмотрению случая $\mu = 0$, соответствующего изотропной X–Y модели с дальнодействием:

$$H_S|_{\mu=0} = \epsilon S^z - \frac{\lambda^2}{N}[(S^x)^2 + (S^y)^2]. \qquad /43/$$

Заметим, в первую очередь, что свободная энергия $f_N[H_S]$ при $\mu=0$ зависит только от $|\bar{\eta}|$, тем самым параметр порядка в отличие от анизотропного случая $\mu \neq 0$ определяется с точностью до фазового множителя /см. /37//.

Это, в частности, приводит к вырождению состояния статистического равновесия относительно вращения в плоскости X, Y при температурах ниже критической, определяемой условиями /40/, /41/ при $\mu = 0$.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Нетрудно видеть, что все полученные выше результаты легко обобщаются на случай взаимодействия с конечным числом мод бозонного поля, а также при учете взаимодействия в спиновой подсистеме, т.е. для гамильтониана вида /ср. /1//:

$$H_D^* = \sum_{k=1}^{m}\omega_k a_k^+ a_k + \epsilon S^z + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k[J_k^+ a_k + J_k^- a^+] + \tilde{H}_S, \qquad /44/$$

где $\omega_k \geq \omega_0 > 0$, $J_k^{\pm} = S^{\pm} + \mu_k S^{\mp}$, причем $\tilde{H}_S$ - произвольный спиновый гамильтониан, удовлетворяющий условиям:

$$|f_N[\tilde{H}_S]| \leq c_1, \qquad /45/$$
$$\frac{1}{N}\|[\tilde{H}_S, J_k^{\pm}]\| \leq c_2.$$

В этом случае термодинамически эквивалентный гамильтониан имеет вид:

$$H_0^*(\eta) = \sum_{k=1}^{m}\omega_k\left(a_k^+ + \frac{\lambda_k}{\omega_k}\sqrt{N}\eta_k^*\right)\left(a_k + \frac{\lambda_k}{\omega_k}\sqrt{N}\eta_k\right) +$$
$$+\epsilon S^z - \sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k^2}{\omega_k}(J_k^+\eta_k + J_k^-\eta_k^*) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} N \frac{\lambda_k^2}{\omega_k}\eta_k^* \eta_k + \tilde{H}_S , \qquad /46/$$

где

$$\eta_k = \left\langle \frac{J_k^-}{N} \right\rangle_{H_0^*(\eta)} , \qquad \eta_k^* = \left\langle \frac{J_k^+}{N} \right\rangle_{H_0^*(\eta)} .$$

Заметим, что для оценки разности плотностей свободных энергий $f_N[H_0^*(\eta)] - f_N[H_D^*]$ необходимо будет показать малость среднего от $H_I^*(\eta)$ по полному гамильтониану

$$|\langle H_I^*(\eta)\rangle| = \Big|\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k}{\sqrt{N}}\langle (J_k^+ - N\eta_k^*)(a_k + \frac{\lambda_k}{\omega}\sqrt{N}\eta_k) + \text{э.с.}\rangle\Big| \le \qquad /47/$$

$$\le 2\max_{(k)}|\lambda_k| \frac{m}{\sqrt{N}} |\langle (J_k^+ - N\eta_k^*)(a_k + \frac{\lambda_k}{\omega_k}\sqrt{N}\eta_k)\rangle| .$$

Прямая оценка правой части /47/ проводится по схеме, изложенной в §2 с учетом конечности m, ограниченности λ_k и существенной положительности спектра бозонов. При этом условия /45/ обеспечивают ограниченность $f_N[H_D^*]$ и выполнение неравенства вида /21/.

Отметим, что и в обобщенной модели /44/ взаимодействие с бозонным полем по-прежнему сводится к возникновению эффективного протяжения между спинами. Действительно, поскольку

$$|f_N[H_D^*] - f_N[H_0^*(\bar{\eta})]| \le \epsilon_N^* \underset{N\to\infty}{\to} 0 , \qquad /48/$$

то из термодинамической эквивалентности H_S^* и H_{S0}^* /9/:

$$H_S^* = \epsilon S^z - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k^2}{\omega_k}J_k^+ J_k^- + \tilde{H}_S , \qquad /49/$$

$$H_{S0}^* = \epsilon S - \sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k^2}{\omega_k}(J_k^+\eta_k + J_k^-\eta_k^*) + N\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k^2}{\omega_k}|\eta_k|^2 + \tilde{H}_S ,$$

следует термодинамическая эквивалентность H_{SB}^*:

$$H_{SB}^* = H_S^* + \sum_{k=1}^{m}\omega_k(a_k^+ + \frac{\lambda_k}{\omega_k}\sqrt{N}\eta_k^*)(a_k + \frac{\lambda_k}{\omega_k}\sqrt{N}\eta_k) \qquad /50/$$

и исходного гамильтониана H_D /46/.

В заключение заметим, что эвристическим принципом для построения аппроксимирующего гамильтониана $H_0(\eta)$ или $H_0^*(\eta)$ служила идея Н.Н.Боголюбова о "с-числовом характере" операторов, асимптотически коммутирующих с алгеброй наблюдаемых /13,14/. Последующее доказательство термодинамической эквивалентности H_0 и H_D /или H_0^*, H_D^*/ потребовало некоторого обобщения условий, необходимых для применения известной мажорационной техники /12/. Это проявляется в замене условия ограниченности нормы коммутатора

$$\|[\mathcal{H}, J^{\pm}]\| \le C ,$$

которое в нашем случае не выполняется из-за наличия неограниченных по норме операторов бозонного поля, на более слабое /21/. Для использованного нами метода последнее условие является необходимым.

Таким образом, применение метода доказательства термодинамической эквивалентности, предложенного в работах /11,12/, не встречает принципиальных трудностей для рассмотренного выше класса систем.

Авторы благодарят проф. Н.Н.Боголюбова /мл./ за внимание к работе и ценные замечания.

Литература

1. R.H.Dicke. Phys.Rev., 93, 99 (1954).
2. M.Tavis, F.W.Cummings. Phys.Rev., 170, 379 (1968).
3. R.Bonifacio, G.Preparata. Phys.Rev., A2, 336 (1970).
4. G.Scharf. Helv.Phys.Acta., 43, 806 (1970).
5. Y.K.Wang, F.T.Hioe. Phys.Rev., 7A, 831 (1973).
6. H.J.Carmichael, C.W.Gardiner, D.F.Walls. Phys.Lett., 46A, 47 (1973).
7. S.Stenholm. Phys.Rep., 6C, 88 (1973).
8. H.Haken. "Handbuch der Physik", vol. XXV/2C, Springer, Berlin, 1970.
9. K.Hepp, E.H.Lieb. Ann. of Phys., 76, 360 (1973).

10. *Й.Г.Бранков. Сообщения ОИЯИ, Р4-6998, Р4-7000, Дубна, 1973.*
11. *N.N.Bogolubov (Jr.) Physica, 32, 933 (1966).*
12. *N.N.Bogolubov (Jr.). Preprint ITP - 67 - I, Kiev, 1967; A Method for Studying Model Hamiltonians, Pergamon Press, 1972.*
13. *Н.Н.Боголюбов. Изв. АН СССР, сер. физ., 11, 77 /1947/.*
14. *Н.Н.Боголюбов. Избранные труды, т. 3, "Наукова думка", Киев, 1971.*
15. *J.G.Brankov, A.S.Shumovsky, V.A.Zagrebnov. Preprint JINR, E4-7150, Dubna, 1973.*
16. *R.B.Griffiths. J.Math.Phys., 5, 1215 (1964).*

Рукопись поступила в издательский отдел
18 февраля 1974 года.