

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



20/2-74

P4 - 7722

E-912

1863/2-74

В.Н.Ефимов, Г.Шульц

ВНЕМАССОВЫЕ Т - И К-МАТРИЦЫ
ДЛЯ НУКЛОН-НУКЛОННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ
С УЧЕТОМ КОРОТКОДЕЙСТВУЮЩИХ СИЛ
ПО МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

1974

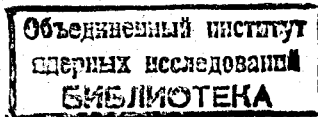
ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 7722

В.Н.Ефимов,* Г.Шульц

ВНЕМАССОВЫЕ T - И K-МАТРИЦЫ
ДЛЯ НУКЛОН-НУКЛОННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ
С УЧЕТОМ КОРОТКОДЕЙСТВУЮЩИХ СИЛ
ПО МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Направлено в Nuclear Physics



* ЛНФ ОИЯИ.

Ефимов В.Н., Шульц Г.

P4 - 7722

Внемассовые T- и K- матрицы для нуклон-нуклонных потенциалов с учётом короткодействующих сил по модели граничных условий

Показано, что внемассовые t- и K-матрицы в модели граничных условий могут быть получены с использованием только граничных условий для внемассовых волновых функций. В случае потенциала, действующего вне радиуса граничных условий, рассматриваемый метод позволяет простым образом получить перенормированные уравнения типа Липпмана-Швингера. Детально рассмотрены S-компоненты t- и K-матриц для внешнего потенциала экспоненциальной формы. Показано, что с экспериментальными S-фазами нуклон-нуклонного рассеяния до 400 МэВ совместима целая серия таких потенциалов, отличающихся радиусом граничных условий.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.

Дубна, 1974

Efimov V.N., Schulz G.

P4 - 7722

Off-Shell T and K-Matrices for N-N Potentials Taking into Account Short-Range Forces by Boundary-Condition Model

It has been shown that the off-shell T and K-matrices can be obtained by means of boundary conditions imposed upon the off-shell wave function only. With a potential outside the boundary condition radius the proposed method permits to deduce, in a rather simple way, a renormalized Lippman-Schwinger equation. The S-components of the T and K-matrices are considered in detail using a potential of the exponential type in the exterior region. For such types of potentials a rather effective method for factorizing the K matrix is given. Parameter fits to the 1S_0 and 3S_1 phases are presented for several values of the boundary condition radius.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna, 1974

§1. Введение

В теоретических расчетах свойств трехнуклонных систем на основе уравнений Фаддеева в последнее время широко используются так называемые реалистические потенциалы, согласованные с экспериментальными данными по нуклон-нуклонному взаимодействию в широкой области энергий /до 300-400 МэВ/. При энергиях порядка нескольких сотен МэВ существенным образом проявляется сильное отталкивание в области малых междуклонных расстояний. Такой характер ядерных сил на малых расстояниях можно имитировать в феноменологических потенциалах с помощью простых моделей - модели твердого ядра /1/ или более общей модели граничных условий /2/. В модели граничных условий вклад короткодействующих сил учитывается введением на некотором радиусе /радиус ядра/ граничного условия для логарифмической производной волновой функции. На расстояниях, превышающих радиус граничных условий, взаимодействие может описываться некоторым потенциалом.

Как известно, ядра интегральных уравнений Фаддеева выражаются через двухчастичные внемассовые t-матрицы. Следовательно, возникает вопрос об определении внемассовой t-матрицы для реалистических потенциалов с отталкиванием на малых расстояниях, описываемым моделью граничных условий. В частности, в этом случае для t-матрицы нельзя записать уравнение Липпмана-Швингера. Одним из методов построения t-матрицы в модели граничных условий является введение псевдопотенциала, воспроизводящего для волновой функции правильное значение логарифмической производной на радиусе ядра /3/.

Другой подход развит в работах /4/, где показано, что не зависящая от энергии логарифмическая производная на радиусе кора может быть получена с помощью некоторой предельной процедуры, примененной к локальному потенциалу специального вида. В этом случае волновая функция внутри радиуса кора тождественно обращается в нуль. Аналогичное обстоятельство имеет место и для псевдопотенциала /3/ с граничными условиями, не зависящими от энергии. Этот факт может быть использован как исходный пункт для получения правильного выражения для немассовой t -матрицы. В работе /5/ было показано, что введение граничного условия на радиусе кора для логарифмической производной немассовой волновой функции и условия обращения в нуль этой функции в области кора оказывается вполне достаточным для получения немассовой t -матрицы в модели граничных условий.

Рассмотренный в /5/ метод можно считать в некотором смысле "чистым" методом граничных условий, так как он не требует введения псевдопотенциалов или использования предельных процедур для локальных потенциалов специального вида. Ниже показано, как в рамках этого метода могут быть получены немассовые t - и K -матрицы в модели граничных условий. В более реалистическом случае, когда вне радиуса кора действует некоторый потенциал, предлагаемый метод позволяет легко получить перенормированные уравнения типа Липпмана-Швингера для частей немассовых t - и K -матриц, связанных с внешним потенциалом.

В качестве конкретного примера рассмотрен центральный внешний потенциал экспоненциальной формы. В этом случае можно ввести серию потенциалов с различными радиусами кора, одинаково хорошо описывающих S -фазы нуклон-нуклонного рассеяния вплоть до 400 МэВ. Для внешнего потенциала экспоненциальной формы дан эффективный способ факторизации S -компоненты K -матрицы, основанный на методе моментов /6/ решения интегральных уравнений.

§2. Немассовые t - и K -матрицы в модели граничных условий

Рассмотрим потенциал $V(r)$, удовлетворяющий условиям, при которых имеют место уравнения Липпмана-Швингера. Считая энергию E положительной, можно определить парциальные ℓ -компоненты t - и K -матриц следующим образом:

$$t_{\ell}(p, k, Z) = - \int_0^{\infty} r^2 dr j_{\ell}(pr) V(r) \Psi_{\ell k}(r, Z), \quad /1/$$

$$K_{\ell}(p, k, E) = - \int_0^{\infty} r^2 dr j_{\ell}(pr) V(r) \Psi_{\ell k}(r, E), \quad /2/$$

$$Z = E + i\epsilon, \quad E > 0.$$

Компоненты t_{ℓ} и K_{ℓ} нормированы условиями:

$$t_{\ell}(k, k, k^2 + i0) = \frac{1}{k} e^{i\delta_{\ell}} \sin \delta_{\ell},$$

$$K_{\ell}(k, k, k^2) = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \delta_{\ell},$$

где δ_{ℓ} - парциальная фаза рассеяния. Немассовые волновые функции $\Psi_{\ell k}$, входящие в /1/ и /2/, удовлетворяют уравнениям Липпмана-Швингера:

$$\Psi_{\ell k}(r, Z) = j_{\ell}(kr) - \int_0^{\infty} r'^2 dr' G_{\ell}(r, r', Z) V(r') \Psi_{\ell k}(r', Z), \quad /3/$$

$$\Psi_{\ell k}^{(0)}(r, E) = j_{\ell}(kr) - \int_0^{\infty} r'^2 dr' G_{\ell}^{(0)}(r, r', E) V(r') \Psi_{\ell k}^{(0)}(r', E), \quad /4/$$

где

$$G_{\ell}(r, r', Z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p^2 dp \frac{j_{\ell}(pr) j_{\ell}(pr')}{p^2 - Z}, \quad /5/$$

$$G_{\ell}^{(0)}(r, r', E) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p^2 dp \frac{j_{\ell}(pr) j_{\ell}(pr')}{p^2 - E}, \quad /6/$$

$j_\ell(x)$ - сферические функции Бесселя.

Для короткодействующих потенциалов $V(r)$ из выражений /5/ и /6/ непосредственно следует асимптотический вид немассовых волновых функций $\Psi_{\ell k}(r \rightarrow \infty)$:

$$\Psi_{\ell k}(r, Z) \approx j_\ell(kr) + i\sqrt{Z} t_\ell(\sqrt{Z}, k, Z) h_\ell^{(1)}(\sqrt{Z}r), \quad /7/$$

$$\Psi_{\ell k}(r, E) \approx j_\ell(kr) - \sqrt{E} K_\ell(\sqrt{E}, k, E) n_\ell(\sqrt{E}r), \quad /8/$$

где $h_\ell^{(1)}(x)$, $n_\ell(x)$ - сферические функции Ганкеля и Неймана. Немассовые значения матриц t_ℓ и K_ℓ можно выразить через фурье-компоненты $\Psi_{\ell k}(p, Z)$, $\Psi_{\ell k}(p, E)$ соответствующих немассовых волновых функций:

$$t_\ell(p, k, Z) = \frac{\pi}{2} (p^2 - Z) [\Psi_{\ell k}(p, Z) - \frac{1}{p^2} \delta(p-k)], \quad /9/$$

$$K_\ell(p, k, E) = \frac{\pi}{2} (p^2 - E) [\Psi_{\ell k}(p, E) - \frac{1}{p^2} \delta(p-k)]. \quad /10/$$

При получении последнего соотношения: определение /6/ считается, как обычно, эквивалентным следующему:

$$G_\ell^{(0)}(r, r', E) = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [G_\ell(r, r', E + i\epsilon) + G_\ell(r, r', E - i\epsilon)]. \quad /11/$$

Отметим далее два факта. Во-первых, интегральные уравнения /3/ и /4/ эквивалентны дифференциальным уравнениям

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + Z - V(r) \right] \Psi_{\ell k}(r, Z) = (Z - k^2) j_\ell(kr), \quad /12/$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + E - V(r) \right] \Psi_{\ell k}(r, E) = (E - k^2) j_\ell(kr) \quad /13/$$

соответственно с граничными условиями /7/ и /8/ при $r \rightarrow \infty$. Во-вторых, из определений /5/ и /6/ следует связь между t_ℓ и K_ℓ - матрицами /7/:

$$K_\ell(p, k, s^2) = t_\ell(p, k, s^2 + i0) - is \frac{t_\ell(p, s, s^2 + i0) t_\ell(s, k, s^2 + i0)}{1 + ist_\ell(s, s, s^2 + i0)}. \quad /14/$$

Приведенных выше соотношений вполне достаточно для того, чтобы получить правильные выражения для немассовых t - и K -матриц в модели граничных условий. Будем считать, следуя работе /5/, что модельные немассовые волновые функции $\Psi_{\ell k}^{(c)}$ удовлетворяют условиям:

$$\Psi_{\ell k}^{(c)} = 0, \quad r < c, \quad /15/$$

$$c \left[\frac{d}{dr} r \Psi_{\ell k}^{(c)} \right]_{r=c} = f_\ell \left[r \Psi_{\ell k}^{(c)} \right]_{r=c}, \quad /16/$$

где c - радиус граничных условий, f_ℓ - некоторый вещественный модельный параметр. В частности, $f_\ell = \infty$ соответствует модели твердого шара радиуса c . Кроме того, будем также считать, что в области $r > c$ выполняются соотношения /7-10/. Такой подход кажется наиболее простым и логичным и в принципе отличается от метода, развитого в работе /4/, основанного на использовании уравнений /1-4/ и некоторой предельной процедуры, применяемой к локальному потенциалу специального вида в области $r < c$.

Из выражений /7-8/ следует, что в области $r > c$ волновые функции $\Psi_{\ell k}^{(c)}$ будут иметь вид:

$$\Psi_{\ell k}^{(c)}(r, Z) = j_\ell(kr) + i\sqrt{Z} t_\ell^{(c)}(\sqrt{Z}, k, Z) h_\ell^{(1)}(\sqrt{Z}r), \quad /17/$$

$$\Psi_{\ell k}^{(c)}(r, E) = j_\ell(kr) - \sqrt{E} K_\ell^{(c)}(\sqrt{E}, k, E) n_\ell(\sqrt{E}r), \quad /18/$$

согласно которому, учитывая граничное условие /16/, находим выражения для значений матриц $t_{\ell}^{(c)}$ и $K_{\ell}^{(c)}$ на полумассовой поверхности:

$$t_{\ell}^{(c)}(\sqrt{Z}, k, Z) = \frac{i}{\sqrt{Z}} \frac{g_{\ell}(kc, f_{\ell})}{D_{\ell}^{(1)}(\sqrt{Z}c, f_{\ell})}, \quad /19/$$

$$K_{\ell}^{(c)}(\sqrt{E}, k, E) = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{g_{\ell}(kc, f_{\ell})}{D_{\ell}(\sqrt{E}c, f_{\ell})}, \quad /20/$$

где

$$g_{\ell}(x, f_{\ell}) = x j_{\ell-1}(x) - (\ell + f_{\ell}) j_{\ell}(x),$$

$$D_{\ell}^{(1)}(x, f_{\ell}) = x h_{\ell-1}^{(1)}(x) - (\ell + f_{\ell}) h_{\ell}^{(1)}(x),$$

$$D_{\ell}(x, f_{\ell}) = x n_{\ell-1}(x) - (\ell + f_{\ell}) n_{\ell}(x).$$

Внемассовые элементы $t_{\ell}^{(c)}$ и $K_{\ell}^{(c)}$ -матриц находят-ся из выражений /9-10/ и /17-18/ с учетом условия /15/:

$$t_{\ell}^{(c)}(p, k, Z) = \frac{t_{\ell}^{(c)}(\sqrt{Z}, k, Z)}{j_{\ell}(\sqrt{Z}c)} [j_{\ell}(pc) - i\sqrt{Z}(p^2 - Z) \times \quad /21/$$

$$\times h_{\ell}^{(1)}(\sqrt{Z}c) F_{\ell}(p, \sqrt{Z})] - (p^2 - Z) F_{\ell}(p, k),$$

$$K_{\ell}^{(c)}(p, k, E) = \frac{K_{\ell}^{(c)}(\sqrt{E}, k, E)}{j_{\ell}(\sqrt{E}c)} [j_{\ell}(pc) + \sqrt{E}(p^2 - E) \times \quad /22/$$

$$\times n_{\ell}(\sqrt{E}c) F_{\ell}(p, \sqrt{E})] - (p^2 - E) F_{\ell}(p, k),$$

где

$$F_{\ell}(p, k) = \int_0^c r^2 dr j_{\ell}(pr) j_{\ell}(kr).$$

Как указывалось выше, в /21/, $Z = E + i\epsilon$, $\epsilon \neq 0$, что обеспечивает сходимость интегралов при вычислении фурье-компоненты волновой функции $\Psi_{\ell k}^{(c)}(r, Z)$ /17/. При отрицательных энергиях ($E = -\gamma^2 < 0$) в /21/ следует считать $Z = -\gamma^2$, $\sqrt{Z} = i\gamma$. Выражение /22/ имеет смысл только при положительных энергиях ($E > 0$). В этом случае фурье-компонента волновой функции $\Psi_{\ell k}^{(c)}(r, E)$ /18/ имеет особенности и необходимы

определенные правила для вычисления некоторых интегралов. Выражение /22/ получается при условии, что функция Неймана в /18/ выражается следующим образом:

$$n_{\ell}(\sqrt{E}r) = -\frac{1}{\sqrt{E} j_{\ell}(\sqrt{E}c)} G_{\ell}^{(0)}(r, c, E).$$

С помощью /11/ приходим к существенному при получении К-матрицы результату, который можно считать некоторым эквивалентом предельной процедуры, используемой в /4/ :

$$\int_c^{\infty} r^2 dr j_{\ell}(pr) G_{\ell}^{(0)}(r, c, E) = \frac{j_{\ell}(pc)}{p^2 - E} + \quad /23/$$

$$\sqrt{E} n_{\ell}(\sqrt{E}c) F_{\ell}(p, \sqrt{E}).$$

Легко проверить, что выражения /21/ и /22/ удовлетворяют условиям симметрии

$$t_{\ell}^{(c)}(p, k, Z) = t_{\ell}^{(c)}(k, p, Z),$$

$$K_{\ell}^{(c)}(p, k, E) = K_{\ell}^{(c)}(k, p, E)$$

и что при $E > 0$ выполняется соотношение /14/.

§3. Модель граничных условий с потенциалом во внешней области

В общем случае, когда в области вне радиуса граничных условий ($r > c$) действует потенциал $V(r)$, будем считать, как и прежде, что немассовые волновые функции $\Psi_{\ell k}$ подчиняются условиям, аналогичным /15/ и /16/:

$$\Psi_{\ell k} = 0, \quad r < c,$$

$$c \left[\frac{d}{dr} r \Psi_{\ell k} \right]_{r=c} = f_{\ell} \left[r \Psi_{\ell k} \right]_{r=c}, \quad /24/$$

а немассовые значения матриц t_{ℓ} и K_{ℓ} определяются соотношениями /9/ и /10/. Представим в области $r > c$ волновые функции $\Psi_{\ell k}$ в виде

$$\Psi_{\ell k} = \Psi_{\ell k}^{(c)} + \Phi_{\ell k}, \quad /25/$$

где $\Psi_{\ell k}^{(c)}$ - немассовые волновые функции /17/ и /18/

в модели граничных условий без внешнего потенциала. Из /12/ и /13/ следует, что функции $\Phi_{\ell k}$ в /25/ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + Z \right] \Phi_{\ell k}(r, Z) = V(r) \Psi_{\ell k}(r, Z), \quad /26/$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + E \right] \Phi_{\ell k}(r, E) = V(r) \Psi_{\ell k}(r, E) \quad /27/$$

с потенциалом $V(r)$, отличным от нуля только при $r > c$, и соответственно граничными условиями /24/ при $r \leq c$ и /7/, /8/ при $r \rightarrow \infty$. Уравнения /26/ и /27/ можно представить в интегральном виде, используя функции Грина H_{ℓ} и $H_{\ell}^{(0)}$ соответствующих однородных уравнений

$$\Psi_{\ell k}(r, Z) = \Psi_{\ell k}^{(c)}(r, Z) - \int_c^{\infty} r'^2 dr' H_{\ell}(r, r', Z) V(r') \Psi_{\ell k}(r', Z), \quad /28/$$

$$\Psi_{\ell k}(r, E) = \Psi_{\ell k}^{(c)}(r, E) - \int_c^{\infty} r'^2 dr' H_{\ell}^{(0)}(r, r', E) V(r') \Psi_{\ell k}(r', E). \quad /29/$$

В случае, когда модель граничных условий имитирует такое взаимодействие в области $r < c$, которое не приводит к образованию связанного состояния, функции Грина H_{ℓ} и $H_{\ell}^{(0)}$ легко вычисляются и имеют следующий вид:

$$H_{\ell}(r, r', Z) = G_{\ell}(r, r', Z) - Z t_{\ell}^{(c)}(\sqrt{Z}, \sqrt{Z}, Z) \times \\ \times h_{\ell}^{(1)}(\sqrt{Z}r) h_{\ell}^{(1)}(\sqrt{Z}r'), \quad /30/$$

$$H_{\ell}^{(0)}(r, r', E) = G_{\ell}^{(0)}(r, r', E) + E K_{\ell}^{(c)}(\sqrt{E}, \sqrt{E}, E) \times \\ \times n_{\ell}(\sqrt{E}r) n_{\ell}(\sqrt{E}r'), \quad /31/$$

где G_{ℓ} и $G_{\ell}^{(0)}$ определяются выражениями /5/ и /6/. Для функций Грина H_{ℓ} и $H_{\ell}^{(0)}$ можно получить интегральные представления через немассовые волновые функции $\Psi_{\ell k}^{(c)}$ /17/ и /18/.

Легко видеть, что $H_{\ell}(r, r', Z)$ /30/ выражается следующим образом:

$$H_{\ell}(r, r', Z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p^2 dp \frac{j_{\ell}(pr) \Psi_{\ell p}^{(c)}(r', Z)}{p^2 - Z} \quad /32/$$

Используя соотношения /11/ и /23/, можно получить подобное выражение и для $H_{\ell}^{(0)}(r, r', E)$ /31/:

$$H_{\ell}^{(0)}(r, r', E) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p'^2 dp' \frac{j_{\ell}(pr) \Psi_{\ell p}^{(c)}(r', E)}{p'^2 - E} \quad /33/$$

Выражения для t - и K - матриц при наличии потенциала $V(r)$ в области $r > c$ следуют из соотношений /9/ и /10/, если учесть, что немассовые волновые функции $\Psi_{\ell k}^{(c)}$ удовлетворяют интегральным уравнениям /28/ и /29/ и что функции Грина $H_{\ell}^{(0)}$ и $H_{\ell}^{(0)}$ определяются выражениями /32/ и /33/:

$$t_{\ell}(p, k, Z) = t_{\ell}^{(c)}(p, k, Z) + t_{\ell}^{(V)}(p, k, Z), \quad /34/$$

$$K_{\ell}(p, k, E) = K_{\ell}^{(c)}(p, k, E) + K_{\ell}^{(V)}(p, k, E), \quad /35/$$

где $t_{\ell}^{(c)}(p, k, Z)$ и $K_{\ell}^{(c)}(p, k, E)$ - значения /21/ и /22/

t - и K - матриц при $V(r) = 0$. Связанные с внешним потенциалом $V(r)$ части $t^{(V)}$ и $K^{(V)}$ полных t - и K - матриц по аналогии с /1/ и /2/ определяются выражениями

$$t_{\ell}^{(V)}(p, k, Z) = - \int_c^{\infty} r^2 dr \Psi_{\ell p}^{(c)}(r, Z) V(r) \Psi_{\ell k}^{(c)}(r, Z), \quad /36/$$

$$K_{\ell}^{(V)}(p, k, E) = - \int_c^{\infty} r^2 dr \Psi_{\ell p}^{(c)}(r, E) V(r) \Psi_{\ell k}^{(c)}(r, E). \quad /37/$$

и удовлетворяют интегральным уравнениям типа Липмана-Швингера:

$$t_{\ell}^{(V)}(p, k, Z) = V_{\ell}^{(1)}(p, k, Z) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p'^2 dp' \frac{V_{\ell}(p, p', Z) t_{\ell}^{(V)}(p', k, Z)}{p'^2 - Z}, \quad /38/$$

$$K_{\ell}^{(V)}(p, k, E) = V_{\ell}^{(1)}(p, k, E) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p'^2 dp' \frac{V_{\ell}(p, p', E) K_{\ell}^{(V)}(p', k, E)}{p'^2 - E}, \quad /39/$$

где обобщенные фурье-компоненты потенциала $V(r)$ имеют вид:

$$V_{\ell}^{(1)}(p, k, Z) = - \int_c^{\infty} r^2 dr \Psi_{\ell p}^{(c)}(r, Z) V(r) \Psi_{\ell k}^{(c)}(r, Z),$$

$$V_{\ell}^{(1)}(p, k, E) = - \int_c^{\infty} r^2 dr \Psi_{\ell p}^{(c)}(r, E) V(r) \Psi_{\ell k}^{(c)}(r, E),$$

$$V_{\ell}^{(2)}(p, k, Z) = - \int_c^{\infty} r^2 dr \Psi_{\ell p}^{(c)}(r, Z) V(r) j_{\ell}(kr),$$

$$V_{\ell}^{(2)}(p, k, E) = - \int_c^{\infty} r^2 dr \Psi_{\ell p}^{(c)}(r, E) V(r) j_{\ell}(kr).$$

В частном случае S - рассеяния на потенциале $V(r)$ с твердым кором ($f_0 = \infty$) полученные выше соотношения для K - матрицы приводят к известному результату:

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \delta_c + \frac{1}{\cos^2 \delta_c} \frac{\operatorname{tg} \delta_V}{1 - \operatorname{tg} \delta_c \operatorname{tg} \delta_V} = \operatorname{tg}(\delta_c + \delta_V),$$

где δ - полная S - фаза рассеяния, $\delta_c = -kc$ - фаза рассеяния на твердом коре, δ_V - фаза рассеяния на сдвинутом потенциале $V(r+c)$.

§4. Экспоненциальный потенциал во внешней области

В качестве конкретного примера нами рассмотрен случай, когда во внешней области ($r > c$) действует центральный потенциал экспоненциальной формы:

$$V(r) = -V_0 e^{-\beta(r-c)}, \quad r > c. \quad /40/$$

Вид потенциала /40/ взят из соображений, что этот потенциал имеет спадающий по экспоненте хвост и что при $\ell = 0$ задача рассеяния имеет точное аналитическое решение ^{18/}. Кроме того, для потенциала /40/ с твердым

кором радиуса c при $\ell=0$ существует весьма эффективный способ факторизации K -матрицы ^{/9/}, который основан на методе моментов ^{/6/} и который может быть проведен до конца аналитически. Этот способ легко обобщается и на случай, когда отталкивание в области $r < c$ описывается с помощью граничных условий ^{/24/}.

С помощью хорошо известной подстановки

$$x = \frac{2\sqrt{V_0}}{\beta} e^{-\frac{\beta}{2}(r-c)} \quad /41/$$

получаем, что в области $r > c$ решение уравнения ^{/12/} на массовой поверхности $Z = k^2 + i0$, k - волновое число в системе центра масс/ выражается через функции Бесселя $J_\nu(x)$ /далее индекс $\ell=0$ опускается/:

$$\Psi_k(r, k^2 + i0) = C_1 J_{ik}(x) + C_2 J_{-ik}(x), \quad /42/$$

где C_1, C_2 - некоторые константы, $\kappa = \frac{2k}{\beta}$. Из граничного условия ^{/24/} и выражения ^{/42/} легко получить для S -фазы δ следующее соотношение:

$$\text{tg } \delta = -i \frac{e^{-2ikc} F(k) - F^*(k)}{e^{-2ikc} F(k) + F^*(k)}, \quad /43/$$

где

$$F(k) = 2ik R(i\kappa - 1, \frac{V_0}{\beta^2}) + (\frac{f}{c} - ik) R(i\kappa, \frac{V_0}{\beta^2}), \quad /44/$$

$$R(z, \frac{V_0}{\beta^2}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)(z+n-1)\dots(z+1)} (\frac{V_0}{\beta^2})^n \quad /45/$$

При $f \rightarrow \infty$ из ^{/43/} - ^{/45/} следует выражение для S -фазы рассеяния на потенциале ^{/40/} с твердым кором радиуса c . Такой потенциал рассмотрен, например, в работах ^{/10/}. Таким образом, учет короткодействующих сил в нуклон-нуклонном взаимодействии с помощью граничных условий позволяет ввести в выражения для фаз рассеяния

по сравнению с твердым кором лишней параметр $f\ell$, что дает возможность при заданном функциональном виде потенциала в области $r > c$ варьировать значения c , не ухудшая существенно согласия теоретических фаз с экспериментальными. В табл. 1 приведены полученные нами параметры потенциала ^{/40/} и параметры f для ряда значений c соответственно для триплетного и синглетного состояний двух нуклонов. Параметры определялись методом наименьших квадратов с использованием точных выражений ^{/43/} - ^{/45/} и экспериментальных значений 1S_0 и 3S_1 фаз рассеяния ^{/11/} до 360 МэВ в лабораторной системе. При определении параметров использовались также экспериментальные значения длины рассеяния a и эффективного радиуса r_0 ^{/12/}. В табл. 1 указаны также значения величины χ^2 , вычисляемой по 29 точкам для энергий от 1 МэВ до 360 МэВ в лабораторной системе. Выбор параметров, указанных в табл. 1, производился по минимуму χ^2 .

Для потенциала ^{/40/} при $\ell=0$ можно получить также точные аналитические выражения для внемассовых t - и K -матриц, содержащих двойные ряды типа ^{/45/}. Нами было получено точное выражение для S -компоненты t -матрицы путем введения согласно ^{/25/} новой функции $\Phi_k(r, Z)$, которая удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению ^{/26/}. С помощью подстановки ^{/41/} находятся два линейно независимых решения $J_{\pm ik}(x)$ соответствующего однородного уравнения, что позволяет определить внемассовую волновую функцию $\Psi_k(r, Z)$ и полную t -матрицу согласно соотношениям ^{/34/} и ^{/36/}. По известной t -матрице в соответствии с ^{/14/} находится полная K -матрица.

Знание точных значений $K(p, k, E)$ дает возможность проверить сходимость факторизованного приближения $\bar{K}^{(V)}(p, k, E)$, полученного нами с помощью метода моментов ^{/6/}. Этот метод был использован для нахождения приближенного решения интегрального уравнения ^{/29/}, которое аппроксимировалось выражением

$$\Psi_k(r, E) = \sum_n C_n(k, E) \phi_n(r, E), \quad /46/$$

Таблица 1

Значение параметров потенциала (40) и параметра f для S-состояния в зависимости от c . Приведены значения длины рассеяния a , эффективного радиуса r_0 и χ^2 .

Триpletное состояние

c	f	V_0	β	a	r_0	χ^2
0.2	1090.54	6.108	1.734	5.407	1.781	217.51
0.4	1100.31	10.528	2.406	5.396	1.762	8.97
0.6	5.13	7.176	2.486	5.393	1.771	2.37
0.7	17.87	23.008	4.177	5.426	1.726	61.41
0.8	23.22	48.972	6.356	5.435	1.696	84.49
эксперимент/ $T_2/$ 5.396 \pm 0.011 1.726 \pm 0.014						

Таблица 1 (продолжение)

Синглетное состояние

c	f	V_0	β	a	r_0	χ^2
0.2	1109.22	4.468	1.810	-23.692	2.499	3.71
0.4	4.61	3.039	1.798	-23.668	2.506	2.67
0.6	7.69	6.151	2.460	-23.620	2.527	38.45
0.7	6.57	7.631	2.876	-23.334	2.480	66.89
0.8	20.08	18.906	4.028	-23.722	2.512	106.4
эксперимент/ $T_2/$ -23.678 \pm 0.028 2.51 \pm 0.11						

где базисные функции $\phi_n(r, E)$ определялись с помощью соотношения

$$\phi_{n+1}(r, E) = - \int_c^{\infty} r'^2 dr' N^{(0)}(r, r', E) V(r') \phi_n(r', E). \quad /47/$$

В качестве исходного элемента $\phi_1(r, E)$ было взято значение волновой функции $\Psi_k^{(c)}(r, E)$ /18/ на массовой поверхности:

$$\phi_1(r, E) = \Psi_k^{(c)}(r, E). \quad /48/$$

Из соотношения /37/ и определений /46/ и /47/ следует, что факторизованное приближение $\bar{K}^{(V)}(p, k, E)$, как в работе /9/, имеет вид

$$\bar{K}^{(V)}(p, k, E) = \sum_{nn'} M_n(p, E) S_{nn'}^{-1}(E) M_{n'}(k, E), \quad /49/$$

где

$$M_n(p, E) = - \int_c^{\infty} r^2 dr \Psi_p^{(c)}(r, E) V(r) \phi_n(r, E),$$

$$S_{nn'}(E) = a_{nn'}(E) - a_{nn'+1}(E),$$

$$a_{nn'}(E) = - \int_c^{\infty} r^2 dr \phi_n(r, E) V(r) \phi_{n'}(r, E).$$

Для потенциала /40/ из /47/ и /48/ следует, что базисные функции $\phi_n(r, E)$ имеют простой вид:

$$\phi_n(r, E) = \frac{1}{r} \cos \sqrt{E} \rho \sum_{\nu=1}^n A_{n\nu} e^{-b_{n\nu} \rho} +$$

$$+ \frac{1}{r\sqrt{E}} \sin \sqrt{E} \rho \sum_{\nu=1}^n B_{n\nu} e^{-b_{n\nu} \rho},$$

где $\rho = r - c$

Коэффициенты $b_{n\nu}$, $A_{n\nu}$ и $B_{n\nu}$ могут быть получены для произвольного n , как и в случае твердого ковра ⁹, с помощью простых рекуррентных соотношений в алгебраической форме, что полностью решает задачу построения факторизованного приближения /49/ любого порядка.

Характер построения базисных функций приводит к выводу, что немассовые значения $\bar{K}^{(V)}(p, k, E)/49/$ ($p \neq k \neq \sqrt{E}$) будут обладать более плохой сходимостью, чем полумассовые ($p \neq k, k = \sqrt{E}$) и массовые ($p = k = \sqrt{E}$) значения $\bar{K}^{(V)}(p, k, E)$. Сходимость факторизованного приближения /49/ на массовой поверхности иллюстрируется табл. 2, где приведены значения $\bar{K}(k, k, k^2)$ в зависимости от числа n базисных функций /50/, вычисленные для $f = 3,077$ и параметров потенциала /40/ $V_0 = -7,176 \Phi^{-2}$, $\beta = 2,486 \Phi^{-1}$ /триплетное состояние двух нуклонов с $c = 0,6 \Phi$. В последней строке табл. 2 указаны точные значения $K(k, k, k^2)$. В табл. 3 и 4 для тех же самых значений параметров /как в табл. 2/ указана зависимость от n значений приближения /49/ на полумассовой ($p \neq k, k = \sqrt{E}$) и полностью немассовой ($p \neq k \neq \sqrt{E}$) поверхностях. Из табл. 2 и 3 видно, что приближенные значения $\bar{K}(k, k, k^2)$ и $\bar{K}(p, k, k^2)$ обладают очень хорошей сходимостью, тогда как сходимость значений $\bar{K}(p, k, E)$ /табл. 4/ несколько хуже.

§5. Заключение

Модель граничных условий является удобным способом описания короткодействующей отталкивательной компоненты нуклон-нуклонного потенциала, относительно которой мезонная теория в настоящее время не может дать надежных предсказаний. Выше было показано, что правильные выражения для t - и K -матриц и перенормированные уравнения Липпмана-Швингера могут быть получены на основе использования только граничных условий, накладываемых на немассовые волновые функции. Изложенный метод представляется более простым, чем метод, развитый в работах /4/, и не приводит к существен-

Таблица 2

Зависимость массовых значений $\bar{K}(k, k, k^2)$ от числа n базисных функций (50). Значения \bar{K} вычислены для $f = 3,077$ и параметров потенциала (40) $V_0 = 7,176 \phi^{-2}$, $\beta = 2,486\phi^{-1}$, $c = -0,6\phi$. В последней строке приведены точные значения $\bar{K}(k, k, k^2)$.

n	$K_{\phi^{-1}}$	0,1	0,3	0,5	0,8	1,0	1,5	2,0
1	-11,9410	-2,8512	10^4 5,5965	1,4440	0,7666	0,15563	-0,063722	
2	-5,6768	-9,6432	20,2562	2,0936	1,0351	0,23273	-0,024220	
3	-5,6448	-9,5406	20,8367	2,1034	1,0388	0,23368	-0,023761	
4	-5,6447	-9,5404	20,8377	2,1034	1,0388	0,23368	-0,023760	
Точн.	-5,6447	-9,5404	20,8376	2,1034	1,0388	0,23368	-0,023760	

Таблица 3

Зависимость значений $\bar{K}(p, k, k^2)$ от числа n базисных функций (50). Параметры те же, что и в табл. 2. В последней строке указаны точные значения $\bar{K}(p, k, k^2)$

n	$K_{\phi^{-1}}$	0,1	0,3	0,5	0,8	1,0	1,5	2,0
1	2,0834	1,3457	0,3517	-7,8268	0,9570	0,28406		
2	2,6434	1,4728	0,23011	-4,2853	1,1925	0,20448		
3	2,6671	1,4883	0,24175	-4,2522	1,1985	0,21137		
4	2,6668	1,4880	0,24141	-4,2523	1,1985	0,21121		
Точн.	2,6668	1,4880	0,24142	-4,2523	1,1985	0,21122		

Продолжение таблицы 3

n	p_{p-1}	$I, 0$	$I, 0$	$I, 0$	$2, 0$	$2, 0$	$2, 0$	$2, 0$
	K_{p-1}	$0, 8$	$2, 0$	$0, 1$	$0, 8$	$0, 1$	$0, 8$	$I, 0$
1	-6,0012	I, 1406	0, 24209	I, 69696	-0, 299299	-0, 194118		
2	-3,5959	I, 7975	0, 18592	0, 081902	-0, 0268464	-0, 012733		
3	-3,5692	I, 8043	0, 19082	0, 040467	-0, 0088460	-0, 0032190		
4	-3,5693	I, 8044	0, 19073	0, 040960	-0, 0090978	-0, 0033611		
Точн.	-3,5693	I, 8044	0, 19074	0, 040958	-0, 0090966	-0, 0033602		

Таблица 4

Зависимость значений $\bar{K}(p, k, s^2)$ ($s = 0,8\Phi^{-1}$) от числа n базисных функций (50). Параметры те же, что и в табл. 2. В последней строке указаны точные значения $K(p, k, s^2)$

n	p_{p-1}	$0, 1$	$0, 1$	$0, 1$	$I, 0$	$I, 0$	$2, 0$	$2, 0$
	K_{p-1}	$0, 1$	$I, 0$	$2, 0$	$I, 0$	$2, 0$	$I, 0$	$2, 0$
1	2,9433	I, 6751	-0, 26548	0, 8870	-0, 31484	-0, 37771		
2	3,4261	2, 2415	-0, 030696	I, 5514	-0, 039294	-0, 26343		
3	3,4836	2, 2580	0, 013087	I, 5561	-0, 026763	-0, 23029		
4	3,4893	2, 2572	0, 017756	I, 5562	-0, 027402	-0, 22644		
5	3,4919	2, 2572	0, 018524	I, 5562	-0, 027402	-0, 22621		
6	3,4930	2, 2573	0, 018269	I, 5562	-0, 027414	-0, 22616		
Точн.	3,4946	2, 2574	0, 017538	I, 5562	-0, 027489	-0, 2272		

ным осложнениям при его обобщении на случай тензорного взаимодействия. В частном случае экспоненциального внешнего потенциала дан хорошо сходящийся метод факторизации S -компоненты K -матрицы. Показано, что с экспериментальными значениями S -фаз нуклон-нуклонного рассеяния совместимо целое семейство таких потенциалов, отличающихся радиусом кора. Для этих потенциалов представляет большой интерес определение на основе уравнений Фаддеева таких трехчастичных параметров, как энергия связи триния, дублетная длина nd -рассеяния, зависимость от переданного импульса формфактора ${}^3\text{H}$, так как модельные расчеты /13/ указывают на сильную зависимость этих величин от радиуса кора.

Литература

1. R.Jastrow. *Phys.Rev.*, 79, 389 (1950); R.V.Reid. *Ann.Phys.*, (N.Y.), 50, 411 (1968).
2. I.Breit, V.J.Bouricius. *Phys.Rev.*, 75, 1029 (1949);
H.Feshbach, E.L.Lomon. *Ann.Phys.*, (N.Y.), 29, 19 (1964);
E.L.Lomon, H.Feshbach. *Ann.Phys.*, (N.Y.), 48, 94 (1968).
3. M.M.Hoenig, E.L.Lomon. *Ann.Phys.* (N.Y.), 36, 363 (1966);
M.M.Hoenig. *Nucl.Phys.*, A206, 169 (1973).
4. Y.E.Kim, A.Tubis. *Phys.Rev.*, C1, 414 (1970); *Phys.Rev.*, C2, 2118 (1970).
5. В.Н.Ефимов. ОИЯИ, Р4-6708, Дубна, 1972.
6. Ю.В.Воробьев. Метод моментов в прикладной математике. ГИФМЛ, Москва, 1958.
7. C.Lovelace. *Phys.Rev.*, 135, B1225 (1964).
8. А.И.Базь, Я.Б.Зельдович. А.М.Переломов. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. Наука, Москва, 1971.
9. V.N.Efimov, Yu.I.Fenin, E.G.Tkachenko. *Phys.Lett.*, 37B, 269 (1971).
10. Y.C.Tang, E.W.Schmid, R.C.Herndon. *Nucl.Phys.*, 65, 203 (1965);
J.R.Afan, Y.C.Tang. *Phys.Rev.*, 175, 1337 (1968);
T.Ohmura. *Prog.Theor.Phys.*, 41, 419 (1969).
11. M.H.MarcGregor, R.A.Arndt, R.M.Wright. *Phys.Rev.*, 182, 1714 (1969).
12. H.P.Noyes. *Phys.Rev.*, 130, 2025 (1963).
13. Y.E.Kim, A.Tubis. *Phys.Lett.*, 36B, 354 (1972).

Рукопись поступила в издательский отдел
6 февраля 1974 года.