ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА





Р4 - 7689



В.Н.Ефимов

# МОДЕЛЬ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В ЗАДАЧЕ ДВУХ И ТРЕХ ЧАСТИЦ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 7689

В.Н.Ефимов

# МОДЕЛЬ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ В ЗАДАЧЕ ДВУХ И ТРЕХ ЧАСТИЦ

*Направлено в ЯФ*

### §1. Введение

Одним из важнейших вопросов ядерной физики является установление вида нуклон-нуклонного потенциала. Наиболее последовательным методом решения этого вопроса было бы получение нуклон-нуклонного потенциала на основе мезонной теории ядерных сил. Однако эту теорию в настоящее время нельзя считать полностью завершенной и внутренне непротиворечивой. Поэтому в решении вопроса о виде нуклон-нуклонного потенциала находит широкое применение феноменологический подход, основанный на использовании экспериментальных данных по нуклон- нуклонному взаимодействию, в частности, данных по фазам упругого нуклон-нуклонного рассеяния до 400 *МэВ* и данных по дейтону. Примером таких потенциалов служат потенциалы Рейда /1/, содержащие наряду с хорошо обоснованным в мезонной теории OPEP-потенциалом ряд компонент, феноменологически описывающих взаимодействие на малых расстояниях. В частности, взаимодействие на весьма малых расстояниях / $r \lesssim 0{,}4$ *ф*/ имитируется или твердым кором, или сильным отталкивательным потенциалом с малым радиусом действия. Однако при построении феноменологических потенциалов кажется более логичным использовать модель граничных условий, введенную для описания сильных взаимодействий между элементарными частицами /2,3/. Согласно этой модели, область взаимодействия делится на внешнюю ($r > c$) и внутреннюю ($r < c$). Во внешней области взаимодействие описывается сравнительно простым потенциалом, а эффект короткодействующих сил учитывается путем введения при $r = c$ граничного условия на логарифмическую производную волновой функции. Следует заметить, что потенциал с твердым кором является частным случаем модели граничных условий. Для интерпретации нуклон-нуклонного взаимодействия с успехом использовалась модель граничных условий как без внешнего /см. работы [2, 4–6]/, так и с внешним потенциалом [7].

При введении феноменологических нуклон-нуклонных потенциалов возникает известная неоднозначность, обусловленная тем, что с экспериментальными данными по упругому нуклон-нуклонному рассеянию и по дейтону совместимо много потенциалов с различными функциональными формами, содержащими достаточное число параметров. Дополнительным критерием отбора таких потенциалов могут служить экспериментальные данные, касающиеся системы трех нуклонов. Корректные уравнения для системы трех сильно взаимодействующих частиц были получены Фаддеевым [8]. Как известно, ядра интегральных трехчастичных уравнений Фаддеева выражаются через двухчастичные внемассовые $t$ -матрицы. Следовательно, возникает вопрос об определении внемассовой $t$-матрицы для потенциалов, учитывающих короткодействующие силы по модели граничных условий, так как в этом случае нельзя записать уравнения Липпманна-Швингера. Одним из методов построения $t$ -матрицы в модели граничных условий является введение псевдопотенциала во внутренней области [6,9]. Другой подход развит в работах [10,11], где показано, что не зависящая от энергии логарифмическая производная волновой функции на радиусе граничных условий может быть получена с помощью некоторой предельной процедуры, применяемой к локальному потенциалу специального вида, действующему во внутренней области. В этом случае как массовая, так и внемассовая волновые функции обращаются в нуль во внутренней области. Последнее обстоятельство может быть использовано как исходный пункт для получения внемассовой $t$ -матрицы. Ниже будет показано, что введения граничного условия для логарифмической производной внемассовой волновой функции и условия обращения в нуль этой функции во внутренней области вполне достаточно для получения правильной двухчастичной внемассовой $t$ -матрицы в модели граничных условий без внешнего потенциала. Такой метод можно считать "чистым" методом граничных условий, так как он не требует введения во внутренней области ни псевдопотенциалов, ни предельных форм специально подобранных локальных потенциалов. В работе [12] показано, что предлагаемый метод может быть с успехом использован и в более реалистическом случае модели граничных условий с некоторым потенциалом во внешней области.

Использование внемассовых $t$ -матриц, соответствующих модели граничных условий, в трехчастичных уравнениях Фадеева приводит к определенным трудностям, связанным с тем, что эти уравнения не имеют однозначного решения [13]. В работе [14] было показано, что в этом случае ядра интегральных уравнений Фаддеева нефредгольмовы даже для связанного состояния трех частиц с учетом двухчастичного взаимодействия только в $S$-состоянии. Следовательно, в случае двухчастичных взаимодействий, описываемых с помощью модели граничных условий, уравнения Фаддеева должны быть модифицированы. Ниже предлагается простой способ такой модификации, основанный на том, что трехчастичная волновая функция должна удовлетворять определенным граничным условиям, вытекающим из характера двухчастичного взаимодействия. Показано, что соответствующие граничные условия для трехчастичной волновой функции эквивалентны некоторому интегральному уравнению для функций от двух векторных переменных. Предложен основанный на методе Бубнова-Галеркина [15] способ алгебраического решения этого уравнения, что позволяет в случае модели граничных условий без внешнего потенциала свести решение трехчастичной задачи к решению системы одномерных интегральных уравнений, ранг которой определяется числом учитываемых парциальных волн. Ядра этих интегральных уравнений имеют простой вид и относятся к фредгольмовскому типу.

## §2. Внемассовая $t$-матрица в модели граничных условий

Для того чтобы получить некоторые соотношения, необходимые в дальнейшем, рассмотрим двухчастичный потенциал $V(r)$, удовлетворяющий условиям, при которых имеют место уравнения типа Липпманна-Швингера. В этом случае парциальную $\ell$-компоненту двухчастичной $t$-матрицы $t_\ell(k,p,Z)$ можно определить соотношением

$$t_\ell(k,p,Z) = -\int_0^\infty r^2 dr\, j_\ell(kr)\, V(r)\, \Psi_{\ell p}(r,Z) \qquad /1/$$

со следующей нормировкой:

$$t_\ell(k,k,k^2+i0) = \frac{1}{k} e^{i\delta_\ell} \sin\delta_\ell ,$$

где $\delta_\ell$ - парциальная фаза рассеяния.

Внемассовая волновая функция $\Psi_{\ell p}(r,Z)$ в /1/ удовлетворяет интегральному уравнению:

$$\Psi_{\ell p}(r,Z) = j_\ell(pr) - \int_0^\infty r'^2 dr' K_\ell(r,r',Z)\, V(r')\, \Psi_{\ell p}(r',Z), \qquad /2/$$

где

$$K_\ell(r,r',Z) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty p^2 dp \frac{j_\ell(pr)\, j_\ell(pr')}{p^2 - Z}, \qquad /3/$$

$j_\ell(x)$ - сферическая функция Бесселя, $Z = E + i\epsilon$, $E$ - энергия в с.ц.м. Для потенциалов $V(r)$ с конечным радиусом действия из выражений /1-3/ следует асимптотический вид волновой функции $\Psi_{\ell p}(r,Z)$:

$$\Psi_{\ell p}(r,Z) \underset{r\to\infty}{\approx} j_\ell(pr) + i\sqrt{Z}\, t_\ell(\sqrt{Z},p,Z)\, h_\ell^{(1)}(\sqrt{Z}r), \qquad /4/$$

где $h_\ell^{(1)}(x)$ - сферическая функция Ганкеля первого рода. Легко видеть, что матрицу $t_\ell(k,p,Z)$ /1/ можно выразить через фурье-компоненту $\Phi_{\ell p}(k,Z)$ внемассовой волновой функции $\Psi_{\ell p}(r,z)$:

$$t_\ell(k,p,Z) = (k^2 - Z)\left[\Phi_{\ell p}(k,Z) - \frac{\pi}{2k^2}\delta(k-p)\right]. \qquad /5/$$



Рассмотрим далее модель граничных условий без внешнего потенциала во внешней области. При определении внемассовой $t$-матрицы будем считать, что выполнены следующие предположения:

1/ для модельной внемассовой волновой функции $\Psi_{\ell p}(r,Z)$ и модельной $t$-матрицы справедливы соотношения /4/ и /5/;

2/ модельная внемассовая волновая функция удовлетворяет граничным условиям:

$$\Psi_{\ell p}(r,Z) = 0, \quad r < c, \qquad /6/$$

$$c\left[\frac{d}{dr} r\Psi_{\ell p}(r,Z)\right]_{r=c} = f_\ell\left[r\Psi_{\ell p}(r,Z)\right]_{r=c}, \qquad /7/$$

где $c$ - радиус граничных условий, который может зависеть от $\ell$, $f_\ell$ - некоторый вещественный параметр. Модели твердого кора радиуса $c$ соответствуют $f_\ell = \infty$.

В области $r > c$ вид внемассовой волновой функции определяется соотношением /4/:

$$\Psi_{\ell p}(r,Z) = j_\ell(pr) + i\sqrt{Z}\, t_\ell(\sqrt{Z},p,Z)\, h_\ell^{(1)}(\sqrt{Z}r), \qquad /8/$$

что при учете граничного условия /7/ непосредственно приводит к следующему выражению для полумассовой $t$-матрицы:

$$t_\ell(\sqrt{Z},p,Z) = \frac{i}{\sqrt{Z}} \frac{g_\ell(pc,f_\ell)}{D_\ell^{(1)}(\sqrt{Z}c,f_\ell)}, \qquad /9/$$

где

$$\begin{aligned} g_\ell(x,f_\ell) &= x\, j_{\ell-1}(x) - (\ell + f_\ell)\, j_\ell(x), \\ D_\ell^{(1)}(x,f_\ell) &= x\, h_{\ell-1}^{(1)}(x) - (\ell + f_\ell)\, h_\ell^{(1)}(x). \end{aligned} \qquad /10/$$

Внемассовая $t$-матрица определяется согласно соотношениям /5/ и /8/, с учетом условия /6/:

$$t_\ell(k,p,Z) = -(k^2 - Z)\, F_\ell(k,p) +$$

$$+ [\, j_\ell(kc) - i\sqrt{Z}(k^2 - z)\, h_\ell^{(1)}(\sqrt{Z}\,c)\, F_\ell(k,\sqrt{Z})\,] \frac{t_\ell(\sqrt{Z},p,Z)}{j_\ell(\sqrt{Z}\,c)}, \qquad /11/$$

где

$$F_\ell(k,p) = \int_0^c r^2 dr\, j_\ell(kr)\, j_\ell(pr).$$

Путем прямой проверки легко убедиться, что при вещественных $f_\ell$ выражение /11/ для $t$ -матрицы удовлетворяет условию симметрии

$$t_\ell(k,p,Z) = t_\ell^*(p,k,Z^*) = t_\ell(p,k,Z)$$

и совпадает с соответствующим выражением, полученным в работе /10/ на основе использования во внутренней области $r < c$ уравнения /2/ с потенциалом специальной формы. Основными моментами изложенного выше метода являются: а/ использование граничных условий /6/ и /7/; б/ предположение о том, что соотношения /4/ и /5/, не содержащие в явном виде потенциала, имеют место и в случае модели граничных условий. С этой точки зрения рассмотренный метод существенным образом отличается от метода работы /10/ и от метода псевдопотенциалов /6,9/.

## *§3. Модель граничных условий в задаче трех частиц*

Для простоты будем рассматривать простейший вариант трехчастичной задачи - связанное состояние трех бесспиновых тождественных частиц. Такое ограничение не принципиально и в то же время позволяет наиболее простым способом изложить предлагаемый метод модификации трехчастичных уравнений в случае, когда парные взаимодействия описываются моделью граничных условий. Рассмотрим сначала задачу о связанном состоянии трех тождественных бозонов, взаимодействие которых



определяется парными центральными потенциалами $V(r)$, такими, что имеют место как двухчастичные уравнения Липпманна-Швингера, так и трехчастичные уравнения Фаддеева. Как обычно, введем в системе центра масс координаты Якоби:

$$\vec{s}_1 = \vec{r}_2 - \vec{r}_3, \quad \vec{\rho}_1 = -\vec{r}_1 + \frac{1}{2}(\vec{r}_2 + \vec{r}_3), \qquad /12/$$

где $\vec{r}_i$ - радиус-вектор $i$ -й частицы.

Наряду с координатами /12/ будем в дальнейшем использовать координаты $\vec{s}_2, \vec{\rho}_2$ и $\vec{s}_3, \vec{\rho}_3$, получающиеся из /12/ путем циклических перестановок индексов, а также импульсы $\vec{k}_i, \vec{q}_i$, сопряженные соответствующим координатам Якоби $\vec{s}_i, \vec{\rho}_i$. Волновая функция системы трех тождественных бозонов $\Psi(\vec{s}_1, \vec{\rho}_1)$, симметричная относительно любых перестановок частиц, будет иметь вид

$$\Psi(\vec{s}_1, \vec{\rho}_1) = \psi(\vec{s}_1, \vec{\rho}_1) + \psi(\vec{s}_2, \vec{\rho}_2) + \psi(\vec{s}_3, \vec{\rho}_3), \qquad /13/$$

причем функция $\psi$ удовлетворяет уравнению Фаддеева в координатном представлении

$$(\nabla^2_{\vec{s}_1} + \frac{3}{4}\nabla^2_{\vec{\rho}_1} + E)\, \psi(\vec{s}_1, \vec{\rho}_1) = V(s_1)\, \Psi(\vec{s}_1, \vec{\rho}_1), \qquad /14/$$

где $-E$ - энергия связи трех бозонов.

Если рассматривать состояние с фиксированным полным моментом $L$, то $\psi(\vec{s}, \vec{\rho})$ можно разложить по обобщенным угловым функциям $Y^{LM}_{\ell\lambda}$:

$$\psi(\vec{s}, \vec{\rho}) = \sum_{\ell\lambda} \psi^L_{\ell\lambda}(s,\rho)\, Y^{LM}_{\ell\lambda}(\vec{s}, \vec{\rho}), \qquad /15/$$

$$Y^{LM}_{\ell\lambda}(\vec{s}, \vec{\rho}) = \sum_{m\mu} (\ell\lambda m\mu | LM)\, Y_{\ell m}(\vec{s})\, Y_{\lambda\mu}(\vec{\rho}), \qquad /16/$$

$Y_{\ell m}(\vec{s})$ - сферические гармоники, зависящие от единичного вектора в направлении $\vec{s}$.

Функцию $\psi^L_{\ell\lambda}(s,\rho)$ в /15/ представим в виде

$$\psi^L_{\ell\lambda}(s,\rho) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty q^2\, dq\, \psi^L_{\ell\lambda}(s,q)\, j_\lambda(q\rho) . \qquad /17/$$

Тогда из /13/-/15/ следует, что фурье-компонента $\psi^L_{\ell\lambda}(s,q)$ будет удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$\left[\frac{d^2}{ds_1^2} + \frac{2}{s_1}\frac{d}{ds_1} - \frac{\ell(\ell+1)}{s_1^2} + E - \frac{3}{4}q^2 - V(s_1)\right]\psi^L_{\ell\lambda}(s_1,q) = \qquad /18/$$

$$= V(s_1)\, S^L_{\ell\lambda}(s_1,q) ,$$

где

$$S^L_{\ell\lambda}(s_1,q) = \int\limits_0^\infty \rho_1^2\, d\rho_1\, j_\lambda(q\rho_1)\, S^L_{\ell\lambda}(s_1,\rho_1) , \qquad /19/$$

$$S^L_{\ell\lambda}(s_1,\rho_1) = \int d\Omega_{\vec{s}_1}\, d\Omega_{\vec{\rho}_1}\, Y^{*LM}_{\ell\lambda}(\vec{s}_1,\vec{\rho}_1)\,[\psi(\vec{s}_2,\vec{\rho}_2) + \psi(\vec{s}_3,\vec{\rho}_3)]. \qquad /20/$$

Наличие связанного состояния трех частиц возможно лишь при условии $-E > \epsilon_i$ , где $\epsilon_i$ - двухчастичные энергии связи для потенциала $V(s)$. В этом случае легко построить функцию Грина $G_\ell(s_1, s_1', E - \frac{3}{4}q^2)$ уравнения /18/, так как соответствующее однородное уравнение не будет иметь решения ни при каком $q$:

$$G_\ell(s,s',E_q) = -i\sqrt{E_q}\;\Psi_{\ell\sqrt{E_q}}(s_<,E_q)\,\phi_\ell(s'_>,E_q) , \qquad /21/$$

где

$$E_q = E - \frac{3}{4}q^2, \quad \sqrt{E_q} = i\sqrt{-E + \frac{3}{4}q^2} , \qquad /22/$$

$\Psi_{\ell\sqrt{E}}(s,E)$ , $\phi_\ell(s,E)$ - линейно независимые решения однородного уравнения /18/, ведущие себя асимптотически как /4/ и $h^{(1)}_\ell(\sqrt{E}s)$ , соответственно.



Будем далее считать, что потенциал $V(s)$ имеет конечный радиус действия $c$, не зависящий от $\ell$. Тогда с помощью функции Грина /21/ легко убедиться, что решение уравнения /18/ можно представить в виде /16/

$$\psi^L_{\ell\lambda}(s,q) = \theta(c-s)\, X^L_{\ell\lambda}(s,q) + \theta(s-c)\, i\sqrt{E_q}\, h^{(1)}_\ell(\sqrt{E_q}\,s)\, F^L_{\ell\lambda}(q) , \qquad /23/$$

где $\theta(x) = 1,\ x > 0;\ \theta(x) = 0,\ x < 0$ ,

$$F^L_{\ell\lambda}(q) = \int\limits_0^\infty k^2\, dk\, t_\ell(k, \sqrt{E_q}, E_q)\, Z^L_{\ell\lambda}(k,q) , \qquad /24/$$

$$Z^L_{\ell\lambda}(k,q) = \int\limits_0^\infty s^2\, ds\, \theta(c-s)\, j_\ell(ks)\, S^L_{\ell\lambda}(s,q) , \qquad /25/$$

$$X^L_{\ell\lambda}(s,q) = \int\limits_0^\infty s'^2\, ds' \int\limits_0^\infty k^2\, dk\, j_\ell(ks')\, G_\ell(s,s',E_q)\, V(s')\, Z^L_{\ell\lambda}(k,q) , \qquad /26/$$

$t_\ell(k,\sqrt{E},E)$ - полумассовая двухчастичная $t$-матрица. Представление функции $\psi^L_{\ell\lambda}(s,q)$ в виде /23/ эквивалентно выражению /4/ для двухчастичной волновой функции и будет служить одним из основных моментов при выводе модифицированных трехчастичных уравнений, явным образом учитывающих сингулярные короткодействующие силы, описываемые моделью граничных условий.

При получении двухчастичной $t$-матрицы /11/ наряду с выражением /8/, вытекающим из /4/, использовалось также условие /6/. Чтобы получить эквивалентное условие для трехчастичной функции, рассмотрим уравнение Фаддеева /14/ с нормальными потенциалами $V(s)$ в импульсном представлении:

$$\psi(\vec{k},\vec{q}) = [\,2\pi^2(k^2 + \frac{3}{4}q^2 - E)]^{-1} \int d\vec{q}\,'\,[\,t(\vec{k}, \frac{1}{2}\vec{q} + \vec{q}\,', E - \frac{3}{4}q^2)\times$$

$$\times\psi(-\vec q-\frac{1}{2}\vec q',\vec q')+t(\vec k,-\frac{1}{2}\vec q-\vec q',E-\frac{3}{4}q^2)\psi(\vec q+\frac{1}{2}\vec q',\vec q')]. \qquad /27/$$

Определим далее внемассовую двухчастичную волновую функцию $\Psi_{\vec p}(\vec r,Z)$ с помощью разложения:

$$\Psi_{\vec p}(\vec r,Z) = 4\pi\sum_{\ell m} i^{\ell}\,\Psi_{\ell p}(r,Z)\,Y_{\ell m}(\vec r)\,Y^{*}_{\ell m}(\vec p). \qquad /28/$$

Тогда, согласно /5/, двухчастичная $t$-матрица будет следующим образом выражаться через фурье-компоненту $\Phi_{\vec p}(\vec k,Z)$ волновой функции $\Psi_{\vec p}(\vec r,Z)$:

$$t(\vec k,\vec p,z) = \frac{1}{4\pi}(k^2-Z)[\Phi_{\vec p}(\vec k,Z)-(2\pi)^3\delta(\vec k-\vec p)]. \qquad /29/$$

Подстановка /29/ в уравнение Фаддеева /27/ и использование соотношения /13/ приводят к следующему выражению для полной волновой функции в импульсном представлении:

$$\Psi(\vec k_1,\vec q_1) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec p\,\Phi_{\vec p}(\vec k_1,E-\frac{3}{4}q_1^2)\times$$

$$\times[\psi(-\frac{1}{2}\vec p-\frac{3}{4}\vec q_1,\ \vec p-\frac{1}{2}\vec q_1)+ \qquad /30/$$

$$+\psi(-\frac{1}{2}\vec p+\frac{3}{4}\vec q_1,\ -\vec p-\frac{1}{2}\vec q_1)].$$

Как уже указывалось, приведенные выше соотношения получены для обычных двухчастичных потенциалов $V(s)$. Предположим теперь, что взаимодействие между двумя частицами описывается моделью граничных условий без внешнего потенциала. В этом случае нет никаких оснований отказываться от соотношения /13/, определяющего структуру трехчастичной волновой функции. В модели граничных условий выражения /6-8/ однозначно определяют парциальную внемассовую волновую функцию $\Psi_{\ell p}(r,Z)$



и, согласно /28/, внемассовую функцию $\Psi_{\vec p}(\vec r,Z)$ и ее фурье-компоненту $\Phi_{\vec p}(\vec k,Z)$. Следовательно, в данном случае будет справедливым соотношение /30/, связывающее полную трехчастичную функцию $\Psi(\vec k,\vec q)$ с внемассовой двухчастичной функцией $\Phi_{\vec p}(\vec k,E_q)$. Из выражений /30/ и /6/ следует, что волновая функция /13/ должна подчиняться условию:

$$\Psi(\vec s_1,\vec\rho_1) = 0,\quad s_1 < c, \qquad /31/$$

в предположении, что радиус граничных условий не зависит от $\ell$. Это предположение не является принципиальным и делается только ради простоты. Заметим, что из-за симметрии функции $\Psi(\vec s_1,\vec\rho_1)$ /13/ в /31/ вместо $s_1$ можно писать $s_2$ или $s_3$. Для системы трех различных частиц граничное условие /31/ должно быть заменено тремя различными условиями соответственно по переменным $s_1$, $s_2$, $s_3$. Соотношение /23/, полученное для нормальных потенциалов $V(s)$, представляет собой простое разбиение фурье-компоненты на два слагаемых: факторизованную асимптотическую часть вне области действия потенциала $V(s)\,(s>c)$ и остаток, отличный от нуля при $s<c$. В случае модели граничных условий без внешнего потенциала нет оснований отказываться от асимптотической части в /23/ и в то же время, согласно /31/ и /13/, нельзя полагать $X^{L}_{\ell\lambda}(s,q)=0$ при $s<c$. Функции $F^{L}_{\ell\lambda}(q)$ и $X^{L}_{\ell\lambda}(s,q)\,(s<c)$ следует рассматривать как неизвестные функции, для которых необходимо получить соответствующие уравнения.

Введем функции $X(\vec s,\vec\rho)$ и $\Phi(\vec s,\vec\rho)$ согласно следующим определениям:

$$X(\vec s,\vec\rho) = \frac{2}{\pi}\sum_{\ell\lambda}\int_0^\infty q^2\,dq\,X^{L}_{\ell\lambda}(s,q)\,j_\lambda(q\rho)\,Y^{LM}_{\ell\lambda}(\vec s,\vec\rho), \qquad /32/$$

$$\Phi(\vec s,\vec\rho) = \frac{2}{\pi}\sum_{\ell\lambda}\int_0^\infty q^2\,dq\,i\sqrt{E_q}\,h^{(1)}_{\ell}(\sqrt{E_q}\,s)\times \qquad /33/$$

$$\times F^{L}_{\ell\lambda}(q)\,j_\lambda(q\rho)\,Y^{LM}_{\ell\lambda}(\vec s,\vec\rho).$$

Тогда, согласно /23/ и /17/, условие /31/ с помощью соотношений /13/ и /15/ можно представить в виде

$$\theta(c-s_1)\,X(\vec{s}_1,\vec{\rho}_1)+\theta(c-s_1)\,\theta(c-s_2)\,X(\vec{s}_2,\vec{\rho}_2)+$$
$$+\theta(c-s_1)\,\theta(c-s_3)\,X(\vec{s}_3,\vec{\rho}_3)=-R(\vec{s}_1,\vec{\rho}_1), \qquad /34/$$

где

$$R(\vec{s}_1,\vec{\rho}_1)=\theta(c-s_1)[\theta(s_2-c)\,\Phi(\vec{s}_2,\vec{\rho}_2)+\theta(s_3-c)\,\Phi(\vec{s}_3,\vec{\rho}_3)].$$

Если ввести фурье-компоненту $F(\vec{s},\vec{q})$ :

$$\theta(c-s)\,X(\vec{s},\vec{\rho})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{q}\,e^{i\vec{q}\vec{\rho}}F(\vec{s},\vec{q}), \qquad /35/$$

то равенство /34/ приводит к интегральному уравнению для $F(\vec{s},\vec{q})$ :

$$F(\vec{s}_1,\vec{q}_1)=-\frac{1}{(2\pi)^6}\int d\vec{k}_1\,d\vec{q}'d\vec{s}_2'\,d\vec{\rho}_2'\,e^{i\vec{k}_1\vec{s}_1-i\vec{k}_2\vec{s}_2'-i\vec{q}_2\vec{\rho}_2'}\theta(c-s_1')\times$$
$$\times[e^{i\vec{q}'\vec{\rho}_2'}F(\vec{s}_2',\vec{q}')+e^{i\vec{q}'\vec{\rho}_3'}F(\vec{s}_3',\vec{q}')]-\int d\vec{\rho}_1\,e^{-i\vec{q}_1\vec{\rho}_1}R(\vec{s}_1,\vec{\rho}_1). \qquad /36/$$

Это интегральное уравнение удобно решать с помощью метода Бубнова-Галеркина /15/. Для этого, согласно работам /17/, введем полную систему ортогональных функций $\phi_n(\vec{s})$ :

$$\int d\vec{s}\,\phi_n(\vec{s})\,\phi^*_{n'}(\vec{s})=\delta_{nn'},\quad \sum_n\phi_n(\vec{s})\,\phi^*_n(\vec{s}')=\delta(\vec{s}-\vec{s}'). \qquad /37/$$

Такую систему всегда можно построить, если учесть, что $\theta^2(x)=\theta(x)$ и $\phi_n(\vec{s})$ выбрать в виде

$$\phi_n(\vec{s})=\theta(c-s)\,Y_{\ell m}(\vec{s})\,s^{\ell}\chi_{\ell\nu}(s),\quad n=\{\ell m\nu\}, \qquad /38/$$



где $\chi_{\ell\nu}(s)$ - полиномы степени $\nu$ с условием ортогональности

$$\int_0^\infty ds\,\theta(c-s)\,s^{2\ell+2}\chi_{\ell\nu}(s)\,\chi_{\ell\nu'}(s)=\delta_{\nu\nu'},$$

с точностью до нормировочной константы совпадающие с полиномами Якоби $P_\nu^{(0,2\ell+2)}(\frac{2s}{c}-1)$. Учитывая свойства функций $\phi_n(\vec{s})$, можно представить $F(\vec{s},\vec{q})$ в /35/ в виде

$$F(\vec{s},\vec{q})=\sum_n\phi_n(\vec{s})\,F_n(\vec{q}). \qquad /39/$$

Введем далее функции $M_n(\vec{q})$ :

$$M_n(\vec{q})=\int d\vec{s}\,\phi^*_n(\vec{s})\,e^{i\vec{q}\vec{s}}. \qquad /40/$$

Из условия /37/ полноты и ортогональности функций $\phi_n(\vec{s})$ следует полнота и ортогональность функций $M_n(\vec{q})$ /40/:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{q}\,M_n(\vec{q})\,M^*_{n'}(\vec{q})=\delta_{nn'},\quad \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_n M_n(\vec{q})\,M^*_n(\vec{q}')=\delta(\vec{q}-\vec{q}').$$

Следовательно, в /39/ $F_n(\vec{q})$ можно разложить по системе функций $M_m(\vec{q})$ и получить для $F(\vec{s},\vec{q})$ окончательное разложение:

$$F(\vec{s},\vec{q})=\sum_{nm}C_{nm}\phi_n(\vec{s})\,M_m(\vec{q}), \qquad /41/$$

причем для коэффициентов $C_{nm}$ из интегрального уравнения /36/ получается система линейных неоднородных уравнений. Окончательно для этих коэффициентов получаем следующее выражение:

$$C_{nm}=-\sum_{n'm'}(A^{-1})^{nm}_{n'm'}N_{n'm'}, \qquad /42/$$

где матрица $A^{nm}_{n'm'}$ имеет вид

$$A^{nm}_{n'm'}=\delta_{nn'}\,\delta_{mm'}+B^{nm}_{n'm'}+B^{*\,n'm'}_{nm}$$

$$B^{nm}_{n'm'} = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\vec{q}\, d\vec{q}\,' M_n\left(-\frac{1}{2}\vec{q} - \vec{q}\,'\right) M^*_m(\vec{q})\, M^*_{n'}\left(\vec{q} + \frac{1}{2}\vec{q}\,'\right) M_{m'}(\vec{q}\,') ,$$

$$N_{nm} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{s}\, d\vec{\rho}\, d\vec{q}\ \phi^*_n(\vec{s})\, M^*_m(\vec{q})\, e^{-i\vec{q}\vec{\rho}}\, R(\vec{s},\vec{\rho}) . \qquad /43/$$

Подстановка в /20/ $\psi(\vec{s}_i, \vec{\rho}_i)$, согласно /32/ и /33/, в виде

$$\psi(\vec{s}_i, \vec{\rho}_i) = \theta(c - s_i)\, X(\vec{s}_i, \vec{\rho}_i) + \theta(s_i - c)\, \Phi(\vec{s}_i, \vec{\rho}_i)$$

и использование выражения /42/ для коэффициентов разложения $F(\vec{s},\vec{q})$ в /35/ позволяет с помощью /25/ свести трехчастичную задачу к решению системы одномерных интегральных уравнений для функций $F^L_{\ell\lambda}(q)$, причем ранг системы будет определяться значением полного момента $L$ и числом учитываемых парциальных компонент $\ell$ и $\lambda$.

Рассмотрим несколько подробнее состояние $L = 0$ при учете только нулевых парциальных компонент $\ell=\lambda=0$. В этом случае функции $\phi_n(\vec{s})$ имеют вид:

$$\phi_n(\vec{s}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\, \theta(c - s)\, \chi_n(s) ,$$

где $\chi_n(s)$ выражаются через полиномы Якоби $P_n^{(0,2)}\left(\frac{2s}{c} - 1\right)$.

Явный вид этих функций, а также функций $M_n(q)$ приведен в работе /18/. В данном случае рассматриваемая трехчастичная задача сводится к решению одного интегрального уравнения для функции $F(q) \equiv F^0_{00}(q)$ :

$$F(q) = \int_0^\infty q'^2 dq'\, S(q,q')\, F(q') .$$

Легко видеть, что при переходе к новой функции $\bar{F}(q) = \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma_q c\right) q F(q)$ это уравнение приобретает вид:

$$\bar{F}(q) = \int_0^\infty q q' dq' \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma_q c - \frac{1}{2}\gamma_{q'} c\right) \bar{S}(q,q')\, \bar{F}(q'), \qquad /44/$$

где $\gamma_q^2 = -E + \frac{3}{4} q^2$.



Наличие экспоненциального множителя обеспечивает квадратичную интегрируемость ядра уравнения /44/.

Следует заметить, что рассмотренный выше метод модификации трехчастичных уравнений является, по сути дела, приближенным методом. В этом отношении он отличается от метода, использованного в работе /19/ и основанного на использовании некоторых свойств двухчастичной $t$-матрицы в модели граничных условий. В заключение следует сделать два замечания. Во-первых, в работе /18/ показано, что сходимость разложений по функциям $\phi_n(s)$ и $M_n(q)$ для $S$-состояния очень хорошая. Во-вторых, в частном случае твердого кора изложенный метод дает приближенное решение трехчастичной задачи, точное решение которой при учете только $S$-компонент было получено в работе /20/*.

## *Литература*


1. R.V.Reid. Ann.Phys., 50, 411 (1968).
2. H.Feshbach, E.L.Lomon. Phys.Rev., 102, 891 (1956).
3. H.Feshbach, E.L.Lomon. Ann.Phys., 29, 19 (1964).
4. G.Breit, W.G.Bouricius. Phys.Rev., 75, 1029 (1949).
5. E.L.Lomon, M.McMillan. Ann.Phys., 23, 439 (1963).
6. M.M.Hoenig, E.L.Lomon. Ann.Phys., 36, 363 (1969).
7. E.L.Lomon, H.Feshbach. Ann.Phys., 48, 94 (1968).
8. Л.Д.Фаддеев. ЖЭТФ, 39, 1459 /1960/.
9. M.M.Hoenig. Nucl.Phys., A206, 169 (1973).
10. Y.E.Kim, A.Tubis. Phys.Rev., C1, 414 (1970).
11. Y.E.Kim, A.Tubis. Phys.Rev., C2, 2118 (1970).
12. В.Н.Ефимов. ОИЯИ, Р4-6708, Дубна, 1972.
13. D.D.Brayshaw. Phys.Rev.Lett., 26, 659 (1971).
14. Y.E.Kim, A.Tubis. Phys.Rev., C4, 693 (1971).
15. С.Г.Михлин. Вариационные методы в математической физике. ГИТТЛ, Москва, 1957.
16. H.P.Noyes. Phys.Rev.Lett., 23, 1201 (1969).
17. V.N.Efimov. Comptes Rendus du Congres International de Physique Nucléaire. v. II, p. 258, Paris, 1964.
В.Н.Ефимов. ОИЯИ, Р-2546, Дубна, 1966.


---

* Автор работы /20/ В.Ефимов /Ленинград/ - однофамилец автора данной статьи.

18. В.Н.Ефимов. ОИЯИ, 4-5741, Дубна, 1971.
19. D.D.Brayshaw. Phys. Rev., D7, 1835 (1973).
20. В.Ефимов. ЯФ, 10, 107 /1969/.

*Рукопись поступила в издательский отдел*
*24 января 1974 года.*