ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 7520

С.В.Темко

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 7520

С.В.Темко

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Обычно проблему удержания скопления частиц в данной области с фиксированной геометрической конфигурацией подразделяют на две части /см., к примеру, [1]/, одна из которых заключается в исследовании равновесия скопления, другая - в изучении его устойчивости по отношению к различным малым возмущениям его состояния, обусловленным малыми возмущениями параметров скопления и, в частности, малыми изменениями его геометрической конфигурации. Обе части этой общей проблемы обычно рассматриваются отдельно.

В настоящей работе показано, что применение предложенного в [2-6] общего метода оптимизации позволяет провести совместное рассмотрение обоих указанных задач и выяснить те условия, при которых будет сохраняться состояние квазистатического равновесия скопления для выбранного вида взаимодействия между частицами и для фиксированной фазовой геометрической конфигурации электронейтрального скопления. В результате вся проблема сводится к нахождению инвариантных по отношению к малым возмущениям распределений частиц всех образующих сортов в заданной области фазового пространства координат и импульсов. Согласно [2-4] частицы каждого отдельного сорта сосредоточиваются на своем носителе распределения, который устанавливается в результате решения задачи оптимизации и находится внутри заданной фазовой области с геометрической конфигурацией F. Настоящая работа является развитием основных результатов, полученных Н.Н. Боголюбовым и Н.М. Крыловым в известной работе по общей теории меры в нелинейной механике [7].

1. Для примера исследуем макроскопическую устойчивость скопления частиц, взаимодействующих по закону Кулона, с фазовой геометрической конфигурацией F, находящегося во внешнем магнитном поле $\vec{H}$ по отноше-

нию к малым возмущениям состояния скопления. В частности, такие возмущения обусловлены малыми изменениями геометрической конфигурации F и дрейфовыми движениями заряженных частиц, возникающими из-за взаимодействия между частицами или благодаря слабой пространственной неоднородности внешнего магнитного поля $\vec{H}$. Для отыскания простейшего подхода к решению проблемы удержания частиц, следуя Н.Н. Боголюбову [8], разобьем все процессы в скоплении на "быстрые" и "медленные", отнеся к "быстрым" взаимодействие частиц и циклотронное вращение. Ограничимся здесь рассмотрением квазистатического равновесия газа "ларморовских кружков", предполагая, что их ведущие центры совершают очень медленное движение по сравнению с быстрым вращением заряженных частиц в магнитном поле $\vec{H}$ под действием силы Лоренца. Движение скопления как целого во внешнем магнитном поле $\vec{H}$ учитывать не будем. Процессы образования скопления частиц здесь не рассматриваются. Этому посвящены, с одной стороны, например, работы Ляпунова и Пуанкаре [9], с другой - П.Л. Капицы [10].

Пусть скопление образовано частицами, которые можно отнести к $M \geq 2$ различным сортам. Обозначим через e_a и m_a соответственно заряд и массу частиц a-го сорта, $a = 1, 2, \dots, M$. Выпишем теперь уравнения движения заряженной частицы в магнитном поле $\vec{H}$ при полном пренебрежении его пространственной неоднородностью, что отвечает сделанному выше предположению о слабой пространственной неоднородности поля $\vec{H}$. В этом случае [11]

$$\dot{p}_1 = \omega_a p_2 \,; \quad \dot{p}_2 = -\omega_a p_1 \,; \quad \dot{p}_3 = 0, \qquad /1.1/$$

где ω_a - циклотронная частота,

$$\omega_a = e_a H / m_a c \,, \qquad /1.2/$$

p_1, p_2, p_3 - составляющие импульса частицы в направлениях осей прямоугольной декартовой системы координат. Проинтегрируем уравнения /1.2/ по времени $\tau = t - t_0$, t_0 - начальный момент времени, в результате получим выражения для составляющих импульса заряженной частицы в поле $\vec{H}$:

$$p_1 = p_\perp^{(0)} \cos(\omega_a \tau + \alpha_a); \quad p_2 = -p_\perp^{(0)} \sin(\omega_a \tau + \alpha_a), \qquad /1.3/$$
$$p_3 = p_{||}^{(0)},$$

где $p_\perp^{(0)}$, $p_{||}^{(0)}$ - соответственно поперечная и продольная составляющие начального импульса заряженной частицы в поле $\vec{H}$, направление которого совпадает с направлением оси Ox_3; α_a - начальная фаза вращения частицы сорта a под действием силы Лоренца. /Составляющая импульса заряженной частицы в плоскости $x_1 O x_2$, расположенной перпендикулярно магнитному полю $\vec{H}$, не испытывает изменений во все время движения/.

Вновь выполняя интегрирование по времени τ, получим

$$x_1 = x_1^{(0)} + \frac{p_\perp}{m_a \omega_a} \sin(\omega_a \tau + \alpha_a),$$

$$x_2 = x_2^{(0)} + \frac{p_\perp}{m_a \omega_a} \cos(\omega_a \tau + \alpha_a),$$

$$x_3 = x_3^{(0)} + p_{||} \tau / m_a . \qquad /1.4/$$

Законы движения заряженной частицы в магнитном поле с учетом его пространственной неоднородности подробно изучены сначала Н.Н. Боголюбовым и Д.Н. Зубаревым [12], а затем С.И. Брагинским [13].

Пусть $\phi_{ab}(r)$ - потенциальная функция, соответствующая энергии взаимодействия двух частиц сортов a и b, расположенных на расстоянии r друг от друга. В данной работе ограничимся простейшим случаем и примем потенциальную функцию $\phi_{ab}(r)$ соответствующей "чистому" кулоновскому взаимодействию.

$$\phi_{ab}(r)=e_a e_b/r. \qquad /1.5/$$

Поскольку потенциальная функция $\phi_{ab}(r)$, взятая в виде /1.5/, является гармонической функцией x_1, x_2, x_3, она заведомо удовлетворяет условиям теоремы равновесия из [2-4] и, более того, условиям теоремы равновесия Гаусса. Взаимодействие между частицами не будем предполагать слабым, причем взаимодействие на малых расстояниях учтем лишь с помощью предположения о конечной величине радиуса частиц скопления, который будем считать малым по сравнению с размерами скопления.

Пусть T - характерный промежуток времени, который будем предполагать фиксированным. Промежуток времени T отвечает времени, в течение которого совокупность частиц с геометрической конфигурацией F для выбранной потенциальной функции $\phi_{ab}(r)$ может считаться находящейся в состоянии устойчивого квазистатического равновесия при наличии внешнего магнитного поля $\vec H$. Пока промежуток времени выбран произвольно. Относительно T будем лишь предполагать, что время T достаточно велико по сравнению со временем ларморовского вращения заряженной частицы около силовой линии внешнего магнитного поля $\vec H$, т.е. $T \gg 1/\omega_a$, $a=1,2,\dots,M$. Усредним теперь потенциальную функцию $\phi_{ab}(r)$ по времени T с учетом законов движения заряженной частицы в магнитном поле $\vec H$

$$\tilde\phi_{ab}(|\vec r-\vec r\,'|,T)=\frac{1}{T}\int_0^T S_{-\tau}\,\phi_{ab}\,(|\vec r(\tau)-\vec r\,'(\tau)|)\,d\tau, \qquad /1.6/$$

где знак "~" используется для обозначения усреднения по времени T; $\vec r(\tau)$ и $\vec r\,'(\tau)$ - две точки, соответствующие двум частицам скопления, совершающим движение по спирали, координаты которых смещаются по законам движения заряженной частицы в магнитном поле $\vec H$; $S_{-\tau}$ - оператор, смещающий точки $\vec r(\tau)$ и $\vec r\,'(\tau)$ в момент времени $\tau>0$ в точки $\vec r$ и $\vec r\,'$ в момент времени $\tau=0$ [8]. Для простоты рассмотрения ограничимся учетом лишь свободного движения заряженной частицы в постоянном магнитном поле $\vec H$ при полном пренебрежении его слабой пространственной неоднородностью. Для нахождения усредненной потенциальной функции $\tilde\phi_{ab}(r;T)$ удобно исходную потенциальную функцию $\phi_{ab}(r)$ представить трехмерным интегралом Фурье:

$$\phi_{ab}(|\vec r-\vec r\,'|)=(2\pi)^{-3/2}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\phi^0_{ab}(k)\exp\{-i(\vec k(\vec r-\vec r\,'))\}\,d\vec k, \qquad /1.7/$$

где $\phi^0_{ab}(k)$ - образ Фурье потенциальной функции $\phi_{ab}(r)$,

$$\phi^0_{ab}(k)=\frac{e_a e_b}{k^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \qquad /1.8/$$

$\vec k=(k_1,k_2,k_3)$ - волновой вектор. Теперь находим

$$\tilde\phi_{ab}(|\vec r-\vec r\,'|,T)=(2\pi)^{-3/2}\int\limits_{(\vec k)}\phi^0_{ab}(k)\,f^0_{ab}(k,\vec p,\vec p\,';T)\,d\vec k, \qquad /1.9/$$

где

$$f^0_{ab}(k,\vec p,\vec p\,';T)=\frac{1}{T}\int_0^T S_{-\tau}\exp\{-i(\vec k(\vec r(\tau)-\vec r\,'(\tau)))\}\,d\tau. \qquad /1.10/$$

С учетом законов движения заряженной частицы в поле $\vec H$ получим

$$f^0_{ab}(k,\vec p,\vec p\,';T)=\exp\{-i(\vec k(\vec r-\vec r\,'))\}\,g^0_{ab}(k,\vec p,\vec p\,';T), \qquad /1.11/$$

где

$$g^0_{ab}=\frac{1}{T}\int_0^T\exp\{ik_\perp\lambda_{ab}(\tau)\sin(\phi_k+\gamma_{ab}(\tau))+ik_{\|}\left(\frac{p_{\|}}{m_a}-\frac{p'_{\|}}{m_b}\right)\tau\}\,d\tau; \qquad /1.12/$$

$$\lambda_{ab}(\tau) = \left[\left(\frac{p_\perp}{m_a\omega_a}\right)^2 + \left(\frac{p'_\perp}{m_b\omega_b}\right)^2 - 2\frac{p_\perp p'_\perp}{m_a\omega_a m_b\omega_b}\cos((\omega_a-\omega_b)\tau + (\alpha_a-\alpha_b))\right]^{1/2};$$

$$\operatorname{tg}\gamma_{ab}(\tau) = \frac{\dfrac{p_\perp}{m_a\omega_a}\sin(\omega_a\tau+\alpha_a) - \dfrac{p'_\perp}{m_b\omega_b}\sin(\omega_b\tau+\alpha_b)}{\dfrac{p_\perp}{m_a\omega_a}\cos(\omega_a\tau+\alpha_a) - \dfrac{p'_\perp}{m_b\omega_b}\cos(\omega_b\tau+\alpha_b)} . \qquad /1.13/$$

Будем рассматривать усредненную потенциальную функцию /1.9/ в качестве потенциальной функции, отвечающей взаимодействию двух "ларморовских кружков" с центрами в точках $\vec{r}$ и $\vec{r}\,'$.

Рассмотрим теперь газ, образованный "ларморовскими кружками" $M \geq 2$ различных сортов. Для каждого такого сорта введем распределение, обозначив его через μ_a, $a = 1, 2, \ldots, M$. Будем эти распределения частиц искать в виде

$$d\mu_a = \chi_a(x;T)\,dx, \qquad /1.14/$$

где $x = (\vec{r}, \vec{p})$ - точка фазового пространства координат и импульсов; $\chi_a(x;T)$ - плотность распределения "ларморовских кружков" сорта a в точке x, расположенной в фазовом объеме скопления частиц. Будем считать, что распределения частиц μ_a сосредоточены в объеме скопления с фиксированной геометрической конфигурацией F, т.е. μ_a - функции множества, определенные и нормированные в фазовом объеме скопления частиц ($\mu_a \propto F$). Последнее отвечает предположению, что вне скопления частицы образующей его системы практически отсутствуют, т.е. в течение достаточно большого промежутка времени лишь очень малое число частиц покидает скопление. В силу теоремы Лиувилля величина фазового объема скопления будет сохраняться.

2. Для нахождения распределений μ_a газов "ларморовских кружков" составляющих сортов в фазовом пространстве воспользуемся результатами работ [4-6]. Фиксируем некоторый достаточно большой промежуток времени T. Можно показать, что усредненные потенциальные функции $\tilde{\phi}(r, \vec{p}, \vec{p}\,'; T)$ удовлетворяют условиям теоремы равновесия [2-4]. Будем искать такие распределения частиц μ_a, сосредоточенные в фазовом объеме скопления с фиксированной геометрической конфигурацией F, заданными периодом T и полем $\vec{H}$, при которых потенциальная энергия всего скопления достигает своего минимума. Это возможно тогда, когда потенциальные энергии газов частиц составляющих сортов, выражаемые функционалами вида

$$I_a(\mu_1, \ldots, \mu_M) = \sum_{(1 \leq b \leq M)} \iint_{FF} \tilde{\phi}_{ab}(|\vec{r} - \vec{r}\,'|, \vec{p}, \vec{p}\,'; T) \times \chi_a(x,T)\,\chi_b(x',T)\,dx\,dx', \qquad /2.1/$$

где $a = 1, 2, \ldots, M$, достигают своего минимума. Интегрирование в /2.1/ ведется по всему фазовому объему скопления, имеющего фазовую геометрическую конфигурацию F; $I_a > 0$.

Пусть $W_a(F;\vec{H}, T)$ - минимум потенциальной энергии газа "ларморовских кружков" сорта a для заданного промежутка времени T. Теперь имеем

$$W_a(F;\vec{H},T) = \min_{\mu_1 \propto F,\ \mu_2 \propto F, \ldots, \mu_M \propto F} I_a(\mu_1, \ldots, \mu_M) . \qquad /2.2/$$

Здесь минимум потенциальной энергии $I_a(\mu_1, \ldots, \mu_M)$ ищется по всем возможным при данном T распределениям частиц составляющих сортов, сосредоточенным в фазовом объеме скопления, т.е. при $\mu_b \propto F$, $b = 1, 2, \ldots, M$. Так как промежуток времени T выбран произвольно, то функции множества μ_b и потенциальные энергии $W_a(F; \vec{H}, T)$ будут функциями времени T, которое входит в μ_b и W_a в качестве непрерывного параметра.

Пусть μ^*_a - распределения частиц, при которых потенциальная энергия скопления для заданного T обращается в минимум при наличии внешнего постоянного магнитного поля, т.е.

$$I_a(\mu^*_1, \ldots, \mu^*_M) = W_a(F; \vec{H}, T), \quad a = 1,2,\ldots,M.$$

Для нахождения распределений частиц μ^*_a рассмотрим вариационную задачу о минимизации потенциальной энергии скопления. Эта вариационная задача, согласно /2-6/, сводится к решению соответствующей обратной задачи теории потенциала, которая в силу теоремы равновесия, доказанной в /2-4/, и теоремы устойчивости Ляпунова /14/ ставится математически корректно.

Введем теперь в рассмотрение потенциал макроскопического поля, порожденный при заданном T распределениями частиц μ_b образующих сортов. Потенциал макроскопического поля в каждой точке фазового пространства $x = (\vec{r}, \vec{p})$ равен сумме потенциалов макроскопического поля $u_a(x, T)$, порожденных частицами образующих сортов. Эти потенциалы определяются выражениями

$$u_a(x,T) = \sum_{(1 \le b \le M)} \int_F \tilde{\phi}_{ab}(|\vec{r} - \vec{r}\,'|, \vec{p}, \vec{p}\,'; T)\chi_b(x', T)dx'. \qquad /2.3/$$

Если потенциал макроскопического поля $u_a(x, T)$ порожден распределениями частиц μ^*_b составляющих сортов, его будем называть потенциалом равновесия и обозначать через $u^*_a(x, T)$.

Для выбранной геометрической конфигурации F, удовлетворяющей условию Ляпунова-Пуанкаре [2], и для выбранной потенциальной функции $\phi_{ab}(r)$, для которой выполняются условия теоремы равновесия из /2-4/, в случае достаточно большого промежутка времени T существуют единственные распределения частиц μ^*_b, обращающие в минимум потенциальную энергию скопления. Такие распределения называют инвариантными, в смысле Ляпунова, распределениями частиц составляющих сортов. Очевидно, что распределения частиц μ^*_b сосредоточены в объеме скопления.

В силу /2-4/ для потенциалов макроскопического поля $u^*_a(x, T)$ имеем:

1/ потенциал $u^*_a(x, T) = W_a(F; \vec{H}, T)$ для всех точек x, расположенных в фазовом объеме скопления;

2/ потенциал $u^*_a(x, T) \le W_a(F; \vec{H}, T)$ для тех точек x, которые расположены вне фазового объема скопления.

Пусть точка x принадлежит фазовому объему скопления и распределения μ_b сосредоточены в фазовом объеме скопления, тогда в силу теоремы равновесия из /2-4/ находим

$$W_a(F; \vec{H}, T) = \sum_{(1 \le b \le M)} \int_F \tilde{\phi}_{ab}(|\vec{r} - \vec{r}\,'|, \vec{p}, \vec{p}\,'; T) \times \chi_b(x', T)dx', \qquad /2.4/$$

где $a = 1, 2, \ldots, M$. Таким образом, задача минимизации потенциальной энергии скопления при фиксированном T сведена к решению системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода /2.4/ с дополнительными условиями нормировки на распределения частиц μ_b составляющих сортов, т.е.

$$\int_F \chi_b(x, T)dx = n_b, \qquad /2.5/$$

где n_b - средняя концентрация частиц b-го сорта. В /5/ было показано, что распределения частиц μ_b, удовлетворяющие системе интегральных уравнений первого рода типа /2.4/ и условиям нормировки /2.5/, обращают в минимум потенциальную энергию скопления частиц.

Пусть область фазового пространства F равна произведению эллипсоидальной области F_r в пространстве координат на шаровую область F_p в пространстве импульсов. Теперь для решения системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода /2.4/ можно воспользоваться интегральными преобразованиями Фурье, взятыми по всему фазовому пространству координат и импульсов /4,5/. После преобразования свертки Фурье по координате $\vec{r}\,'$ в уравнениях системы /2.4/, в силу свойства функции Хевисайда, приходим к следующей системе интегральных уравнений:

$$W_a(F;\vec{H},T)R^{-3/2}J_{3/2}(R)=(2\pi)^{-3/2}\sum_{(1\le b\le M)}\int_{(\vec{p}\,')}\chi_b^0(R,\vec{p}\,';T)\times$$

$$\times\tilde{\phi}^0_{ab}(k,\vec{p},\vec{p}\,';T)\,d\vec{p}\,', \qquad /2.6/$$

где $\chi_b^0(R,\vec{p}\,';T)$ - образы Ханкеля искомых плотностей распределения частиц $\chi_b(x';T)$:

$$R^2=k_1^2/A_1^2+k_2^2/A_2^2+k_3^2/A_3^2; \qquad /2.7/$$

A_1, A_2, A_3 - обратные величины полуосей эллипсоида F_r, причем для эллипсоида вращения $A_1=A_2=A$, $A_3=C$; $\vec{k}=(k,\phi_k,\theta_k)$ - волновой вектор.

При сделанных предположениях относительно геометрической конфигурации области F_p образы Фурье распределений частиц по импульсам $\vec{p}\,'$ можно считать зависящими лишь от радиуса точки $\ell=(\ell,\phi_\ell,\theta_\ell)$ /15/.

Проведем теперь в системе уравнений /2.6/ подстановку следующего вида:

$$k_i=RA_it_i\,(i=1,2,3),\qquad t_1^2+t_2^2+t_3^2\le 1,\qquad \text{тогда}$$

$$k^2=R^2\left(\sum_i^3 A_i^2t_i^2\right). \qquad /2.8/$$

Теперь, после преобразования свертки Фурье в /2.6/ по импульсам $\vec{p}\,'$, интегрирования по $\vec{p}$, по поверхности единичной сферы S_k^*, $t_1^2+t_2^2+t_3^2=1$ и по угловым составляющим вектора ℓ, $0\le\phi_\ell\le 2\pi$ и $0\le\theta_\ell\le\pi$, приходим к следующей системе операторных уравнений:

$$S_kW_a(F;\vec{H},T)R^{-3/2}\ell^{-3}J_{3/2}(R)(J_{3/2}(\ell))^2=$$

$$/2.9/$$

$$=\sum_{(1\le b\le M)}G^{*0}_{ab}(R,\ell;T)\chi_b^0(R,\ell;T),$$

где

$$G^{*0}_{ab}(R,\ell;T)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{(\vec{p}\,',\vec{p},\sigma_k)}\exp\{i(\vec{\ell}\,\vec{p}\,')\}\times$$

$$/2.10/$$

$$\times\tilde{\phi}^0_{ab}\left(R\left[\sum_i^3A_i^2t_i^2\right]^{1/2},\vec{p},\vec{p}\,';T\right)\sin\theta_\ell\,d\phi_\ell\,d\theta_\ell\,d\sigma_k\,d\vec{p}\,d\vec{p}\,',$$

$d\sigma_k=\sin\theta_k\,d\phi_k\,d\theta_k$ - элемент поверхности единичной сферы S_k^*, S_k - величина поверхности сферы S_k^*. Если в /2.10/ выполнить интегрирование по $\phi_k(0\le\phi_k\le2\pi)$ и к полученной в результате функции Бесселя $J_0(k+\lambda_{ab}(r))$ применить теорему сложения для бесселевых функций, то выражения для G^{*0}_{ab} значительно упрощаются и интегрирование в /2.10/ сводится к интегрированию по r, $0\le r\le T$, и по θ_k, $0\le\theta_k\le\pi$. Построение асимптотических разложений $G_k^{*0}(R,\ell;T)$ уже не представляет затруднений /16/.

Рассмотрим теперь систему линейных алгебраических уравнений /2.9/. Пусть при фиксированном T определитель этой системы отличен от нуля, т.е. $D(R,\ell;\vec{H},T)\ne 0$, тогда из /2.9/ находим

$$\chi_b^0(R,\ell;T)=\sum_{(1\le a\le M)}(-1)^{a+b}S_kW_a(F;\vec{H},T)R^{-3/2}e^{-3}\times$$

$$\times \frac{D_{ab}(R,\ell;\vec{H},T)}{D(R,\ell;\vec{H},T)} J_{3/2}(R)(J_{3/2}(\ell))^2, \qquad /2.11/$$

где $D_{ab}(KR,\ell;\vec{H},T)$ - миноры соответствующих элементов определителя $D_b(R,\ell;\vec{H},T)$, полученного из D замещением его b -го столбца правыми частями уравнений системы /2.9/.

После обратных преобразований Ханкеля порядка 1/2 по R и ℓ из /2.11/ находим

$$\chi_b(x;T) = \sum_{(1\le a\le M)} (-1)^{a+b} S_k W_a(F;\vec{H},T)\frac{1}{\sqrt{rp}} \times \qquad /2.12/$$

$$\times \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{D_{ab}(R,\ell;\vec{H},T)}{D(R,\ell;\vec{H},T)e^{3/2}} J_{3/2}(R)(J_{3/2}(\ell))^2 J_{1/2}(rR)J_{1/2}(p\ell)dRd\ell.$$

Так как T - произвольный промежуток времени, то все $\chi_b(x;T)$ будут функциями параметра T. Из условий нормировки /2.5/ вытекает система линейных алгебраических уравнений для $W_a(F;\vec{H},T)$:

$$\sum_{(1\le a\le M)} W_a(F;\vec{H},T)\,\omega_{ab}(F;\vec{H},T)=n_b, \quad b=1,2,...,M, \qquad /2.13/$$

где

$$\omega_{ab}(F;\vec{H},T)=(-1)^{a+b}\frac{16\pi^2}{A^2C}\times \qquad /2.14/$$

$$\times \int_{(R,\ell)} \frac{D_{ab}(R,\ell;\vec{H},T)}{D(R,\ell;\vec{H},T)R\,e^{5/2}}[J_{3/2}(R)]^2[J_{3/2}(\ell)]^3\,dR\,d\ell.$$

Заметим, что при заданном T пределы интегрирования по R и ℓ в /2.14/ должны быть выбраны из условий ограниченности значений $W_a(F;\vec{H},T)<+\infty$. Последнее отвечает требованию положительности электроемкостей газов частиц образующих сортов. Теперь

$$W_a(F;\vec{H},T) = \sum_{(1\le b\le M)} (-1)^{a+b} n_b \frac{\Delta_{ab}(F;\vec{H},T)}{\Delta(F;\vec{H},T)}, \qquad /2.15/$$

где $\Delta(F;\vec{H},T)$ - определитель системы /2.13/, $\Delta\neq 0$, $\Delta_{ab}(F;\vec{H},T)$ - миноры определителя Δ_b, полученного из Δ в результате замещения соответствующего столбца правыми частями уравнений системы /2.13/.

3. Для нахождения промежутка времени T_{max}, в течение которого будет сохраняться устойчивое квазистатическое равновесие скопления во внешнем магнитном поле $\vec{H}$ при всех введенных выше предположениях, воспользуемся теоремой устойчивости Ляпунова /14/. Так как при квазистатическом равновесии все силы, действующие на скопление, не зависят от времени или очень медленно изменяются во времени, то в силу теоремы устойчивости Ляпунова первая производная по времени T от внутренней энергии скопления E, вычисленная для состояния квазистатического равновесия скопления с распределениями частиц μ_b^*, должна достигать своего максимума. Так как при фиксированном T в состоянии квазистатического равновесия скопления

$$I_a(\mu_1^*, \mu_2^*, ..., \mu_M^*) = W_a(F;\vec{H},T), \qquad /3.1/$$

то для внутренней энергии скопления находим

$$E(F;\vec{H},T) = \sum_{(1\le b\le M)} (W_b(F;\vec{H},T)+\frac{3}{2}\theta_b n_b(F;\vec{H},T)), \qquad /3.2/$$

где θ_b - температура газа частиц сорта b.

Из условия максимума производной $(E(F;\vec{H},T))'_T$ находим промежуток времени T_{max}. Естественно, что значение T_{max} будет зависеть от фазовой геометрической конфигурации F скопления, магнитного поля

$\vec{H}$ и взаимодействия между частицами скопления $\phi_{ab}(r)$. Из условий максимума первой производной энергии*

$$(E(F;\vec{H},T))''_{TT} = 0, \quad (E(F;\vec{H},T))'''_{TTT} < 0 \qquad /3.3/$$

при $W_a < +\infty$ устанавливается достаточная оценка T_{max} для времени жизни скопления. В случае малых возмущений состояния совокупности по истечении времени T_{max} возможен разлет скопления. Очевидно, что большие возмущения состояния совокупности могут нарушить состояние квазистатического равновесия на временах $T<T_{max}$. Оценку таких изменений параметров совокупности, при которых возникают большие возмущения в состоянии скопления, можно осуществить с помощью критерия неустойчивости, предложенного Четаевым/14/.

Для непосредственного нахождения T_{max} удобно воспользоваться методом нелинейного программирования/17/. Пусть теперь $T_1, T_2, ..., T_M$ - времена, характерные для газов частиц образующих сортов при всех введенных выше предположениях. В силу /3.3/ для нахождения T_{max} нужно решить следующую систему уравнений:

$$\sum_{(1\le b\le M)} \left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial T_a^2} + \frac{3}{2}\theta_b \frac{\partial^2 n_b}{\partial T_a^2} \right) = 0 \qquad /3.4/$$

при выполнении условий

$$\sum_{(1\le b\le M)} \left(\frac{\partial^3 W_b}{\partial T_a^3} + \frac{3}{2}\theta_b \frac{\partial^3 n_b}{\partial T_a^3} \right) < 0 \qquad /3.5/$$

* Дополнительно нужно учесть условия постоянства общего числа частиц и электронейтральности совокупности частиц $\sum_b n_b = 1$; $\sum_b e_b n_b = 0$.

и дополнительных ограничений $W_b < +\infty$,

$$\sum_1^M n_s = 1 \quad \text{и} \quad \sum_1^M e_s n_s = 0,$$

где $a, b = 1,2, ..., M$.

Для решения системы нелинейных уравнений /3.4/ при условиях /3.5/ с дополнительными ограничениями введем целевую функцию

$$L = \sum_{(1\le a\le M)} \left[\sum_{(1\le b\le M)} \left(\frac{\partial^2 W_b}{\partial T_a^2} + \frac{3}{2}\theta_b \frac{\partial^2 n_b}{\partial T_a^2} \right) \right]^2 + L_{ch}, \qquad /3.6/$$

где L_{ch} - "штрафная функция", учитывающая требования /3.5/ и дополнительные ограничения. Пусть K - очень большая положительная величина, тогда

$$L_{ch} = \begin{cases} K, & \text{если хотя бы одно из указанных условий /3.5/ или дополнительных ограничений нарушится;} \\ 0, & \text{если все условия /3.5/ и дополнительные ограничения будут выполняться.} \end{cases}$$

Очевидно, что равенство $L = 0$ возможно тогда и только тогда, когда $T_1, T_2, ..., T_M$ - решение системы уравнений /3.4/, удовлетворяющее указанным условиям и дополнительным ограничениям. Таким образом, решение задачи нелинейного программирования минимизации целевой функции L без ограничений на переменные T_b, $b = 1, .., M$ дает решение системы уравнений /3.4/, автоматически удовлетворяющее неравенствам /3.5/ и дополнительным ограничениям. В качестве T_{max} следует принять минимальное значение из всей совокупности значений $T_1, T_2, ..., T_M$, т.е.

$$T_{MAX} = \min(T_1, T_2, ..., T_M).$$

Этот способ нахождения T_{max} может быть легко реализован на ЭВМ.

Дифференцируя энергию $E(F;\vec{H},T)$ по напряженности магнитного поля $\vec{H}$, находим намагничение скопления частиц. После повторного дифференцирования по $\vec{H}$ получаем магнитную проницаемость скопления. Очевидно, что при фиксированном T намагничение и магнитная проницаемость скопления будут зависеть от фазовой геометрической конфигурации совокупности F, от напряженности поля $\vec{H}$ и от взаимодействия между частицами совокупности $\phi_{ab}(r)$.

Зная плотности распределения частиц $\chi_b(x;T)$ составляющих сортов, с помощью уравнения Гиббса-Гельмгольца /18/ получаем свободную энергию скопления.

В заключение выражаю глубокую благодарность Н.Н. Боголюбову и Н.М. Плакиде за участие в обсуждении настоящей работы и сделанные замечания.

Литература

1. *В.Д.Шафранов. Равновесие плазмы в магнитном поле. Сб. "Вопросы теории плазмы", 92-131, М., Госатомиздат, 1963.*
2. *К.В.Темко, С.В.Темко. ДАН СССР, 166, 3 /1966/.*
3. *К.В.Темко, С.В.Темко. О проблеме устойчивости. Сб. "Теоретическая физика", 70-78, издание УДН им. П. Лумумбы, 44, 4 /1949/.*
4. *К.С.Кузьмин, К.В.Темко, С.В.Темко. Ж. дифференц. уравн., 8, 6 /1972/.*
5. *С.В.Темко, К.В.Темко. Ж. дифференц. уравн., 5, 8 /1969/.*
6. *С.В.Темко. ПМ и ТФ, 1, 20-26 /1969/.*
7. *Н.Н.Боголюбов. Избранные труды, т. 1, Общая теория меры в нелинейной механике, "Наукова думка", Киев, 1969.*
8. *Н.Н.Боголюбов. Проблемы динамической теории в статистической физике, М., Гостехиздат, 1946.*
9. *H.Poincare. Figures d'e'quilibre d'une masse fluide, Paris, 1902.*
10. *П.Л.Капица. ЖЭТФ, 57, 6/12/ /1969/.*
11. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля, М., Физматгиз, 1962.*
12. *Н.Н.Боголюбов, Д.Н.Зубарев. УМЖ, 7 /1955/.*
13. *С.И.Брагинский. УМЖ, 8 /1966/.*
14. *Ф.Р.Гантмахер. Лекции по аналитической механике, М., Физматгиз, 1966.*
15. *S.Bochner. Lectures on Foiries Integrals, Princ, 1959.*
16. *А.Эрдейи. Асимптотические разложения. М., Физматгиз, 1962.*
17. *У.И.Зингвилл. Нелинейное программирование. М., "Советское радио", 1973.*
18. *М.А.Леонтович. Введение в термодинамику, М., Гостехиздат, 1950.*

Рукопись поступила в издательский отдел
10 января 1974 года.