ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 7437

В.В.Бабиков, М.Х.Ханхасаев

К ОБОБЩЕНИЮ МЕТОДА ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ В ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 7437

$\boxed{\text{В.В.Бабиков,}}$ М.Х.Ханхасаев

К ОБОБЩЕНИЮ МЕТОДА ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ В ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ

Направлено в Известия АН СССР

В теории потенциального рассеяния широкую известность получил так называемый метод фазовых функций [1,2]. Существенно, что уравнения этого метода формулируются непосредственно для наблюдаемых на опыте величин, таких как фазы рассеяния и энергии связанных состояний. Однако, как и в других подходах, в таком методе при исследовании высокоэнергетического рассеяния необходимость учета большого числа парциальных волн порождает значительные математические трудности. В этом отношении представляется весьма перспективным новый подход к изучению полной амплитуды рассеяния, предложенный в работе [3] и являющийся естественным обобщением метода фазовых функций. В работе [3] амплитуда $F(\vec{n}_1, k, \vec{n}_2)$ упругого рассеяния частицы на заданном потенциале $V(\vec{r})$ с энергией k^2 ($\hbar = 2m = 1$), начальным импульсом $\vec{k}_1 = k\vec{n}_1$ и конечным импульсом $\vec{k}_2 = k\vec{n}_2$, в соответствии с основной идеей метода фазовых функций, рассматривалась как предел последовательности амплитуд упругого рассеяния $F(R, \vec{n}_1, k, \vec{n}_2)$ для последовательности "обрезанных" потенциалов ($0 \le R < \infty$)

$$V_R(r) = V(\vec{r})\,\theta(R - r), \qquad /1/$$

где

$$\theta(R-r) = \begin{cases} 1, & R > r; \\ 0, & R < r. \end{cases} \qquad /2/$$

Потенциал $V_R(\vec{r})$, следовательно, представляет собой ту часть потенциала $V(\vec{r})$, которая расположена в сфере радиуса R. Искомая амплитуда рассеяния является амплитудой рассеяния $F(R,\vec{n}_1,k,\vec{n}_2)$ при $R \to \infty$, т.е. тогда, когда потенциал обрезается на бесконечном удалении от рассеивающего центра, где $V(\vec{r}) \to 0$. Для амплитуды $F(R,\vec{n}_1,k,\vec{n}_2)$, соответствующей такому способу обрезания потенциала, в работе /3/ было получено нелинейное интегро-дифференциальное уравнение. Это уравнение, являющееся точным, представляет, следовательно, самостоятельный интерес как основа для численных расчетов и получения различных приближений в теории потенциального рассеяния /4/.

В настоящей работе показывается, что в основе данного метода лежит определенная свобода в выборе формы поверхностей S, "послойно" обрезающих потенциал, и, таким образом, последовательность сферических поверхностей увеличивающегося радиуса R, принятая в работе /3/, не является единственной. В качестве реализации одной из возможностей в настоящей работе выбирается способ обрезания потенциала последовательностью плоскостей, перпендикулярных к некоторой ориентированной прямой, которую выбираем за ось z / $\vec{n}_z$ - единичный вектор, направленный по этой оси/, и отстоящих от начала координат на расстоянии ξ $(-\infty < \xi < \infty)$. Для амплитуды $F(\xi,\vec{n}_1,k,\vec{n}_2)$, соответствующей этому способу обрезания потенциала, выводится уравнение. Величина $F(\xi,n_1,k,n_2)$ имеет физический смысл амплитуды рассеяния на части потенциала $V(\vec{r})$, лежащей слева от рассматриваемой плоскости, т.е.

$$V_\xi(\vec{r}) = V(\vec{r})\,\theta(\xi - z), \qquad /3/$$

где $\theta(\xi - z)$ - обычная θ -функция /2/.

Приступим к выводу уравнения для амплитуды $F(\xi,\vec{n}_1,k,\vec{n}_2)$. В целях более общего рассмотрения не будем пока конкретизировать способ обрезания потенциала. Следуя основной идее метода фазовых функций, представим амплитуду упругого рассеяния $F(\vec{n}_1,k,\vec{n}_2)$ как предел последовательности амплитуд рассеяния $F_S(\vec{n}_1,k,\vec{n}_2)$ для последовательности "обрезанных" потенциалов $V_S(\vec{r})$. Потенциал $V_S(\vec{r})$ представляет собой ту часть потенциала $V(\vec{r})$, которая расположена в области, ограниченной некоторой поверхностью S.

Таким образом, искомая амплитуда $F(\vec{n}_1,k,\vec{n}_2)$ является амплитудой рассеяния $F_S(\vec{n}_1,k,\vec{n}_2)$, когда поверхность S обрезает потенциал на бесконечном удалении от рассеивающего центра, где $V(\vec{r}) \to 0$.

Получим уравнение для амплитуды $F_S(\vec{n}_1,k,\vec{n}_2)$. Будем исходить из следующих интегральных уравнений для волновой функции, соответствующей потенциалу $V_S(\vec{r})$,

$$\psi_S(\vec{r},k,\vec{n}_1) = \exp(ik\vec{r}\vec{n}_1) + \int d\vec{r}'\, G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}',k)\, V_S(\vec{r}')\, \psi_S(\vec{r}',k,\vec{n}_1) \qquad /4/$$

и выражения для амплитуды рассеяния

$$F_S(\vec{n}_1,k,\vec{n}_2) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{r}\, \exp(-ik\vec{r}\vec{n}_2)\, V_S(\vec{r})\, \psi_S(\vec{r},k,\vec{n}_1). \qquad /5/$$

Беря вариационные производные по поверхности S в уравнениях /4/ и /5/ и используя симметрию функции Грина

$$G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}',k) = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{\exp(ik/\vec{r}-\vec{r}'/)}{/\vec{r}-\vec{r}'/} = G^{(+)}(\vec{r}',\vec{r},k), \qquad /6/$$

нетрудно показать, что имеет место соотношение

$$\frac{\delta}{\delta S} F_S(\vec{n}_1,k,\vec{n}_2) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{r}\, \psi_S(\vec{r},k,\vec{n}_1)\, \psi_S(\vec{r},k,-\vec{n}_2)\, \frac{\delta}{\delta S} V_S(\vec{r}). \qquad /7/$$

В общем случае выражение /7/ устанавливает связь между вариациями амплитуды и произвольными вариациями потенциала, поскольку под S можно понимать произвольную совокупность параметров, характеризующих потенциал.

Для нас существенно, что если вариации потенциала представляют собой "послойное" обрезание последнего некоторой последовательностью поверхностей S, то соотношение /7/ является уравнением для величины $F_S(\vec{n}_1, k, \vec{n}_2)$.

Если положить $V_S(\vec{r}) \equiv V_R(\vec{r}) = V(\vec{r})\,\theta(R-r)$ и использовать определенное представление функции Грина /6/ [3], учитывающее сферическую симметрию элементов последовательности нарезающих поверхностей, то на основании соотношения /7/ можно получить уравнение для амплитуды $F(R, \vec{n}_1, k, \vec{n}_2)$. В работе [3] это уравнение выводится другим способом.

В качестве реализации другой возможности выбора способа обрезания потенциала положим $V_S(\vec{r}) \equiv V_\xi(\vec{r}) = V(\vec{r})\;\theta(\xi - z)$, в соответствии с уравнением /3/, и проведем вывод уравнения для амплитуды $F(\xi, \vec{n}_1, k, \vec{n}_2)$. В этом случае $\frac{\delta}{\delta S} = \frac{\partial}{\partial \xi}$ и уравнение /7/ с учетом /3/ принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi} F(\xi, \vec{n}_1, k, \vec{n}_2) = -\frac{1}{4\pi} \int d^2\vec{b}\, V(\vec{r})\, \psi_\xi(\vec{r}, k, \vec{n}_1)\, \psi_\xi(\vec{r}, k, -\vec{n}_2)\,. \qquad /8/$$

Здесь $\vec{b}$ - прицельный параметр $(\vec{r} \equiv (\vec{b}, \xi))$, а интегрирование в правой части уравнения /8/ идет по всей плоскости прицельного параметра.

Следует заметить, что направление оси z /вектор $\vec{n}_z$/ для вывода уравнения несущественно, и его можно выбирать соответствующим образом, исходя из условий конкретной проблемы.

В соответствии с цилиндрической симметрией задачи функцию Грина /6/ представим в следующем виде /5/*

$$G^{(+)}(\vec{r}, \vec{r}\,', k) = -\frac{ik}{8\pi^2} \int d^2\vec{q}\, \frac{e^{ik\vec{q}(\vec{b}-\vec{b}\,')}}{\beta}\, e^{ik\beta/z-z'/}, \qquad /9/$$

где

$$\beta = \begin{cases} \sqrt{1-q^2}, & q < 1; \\ i\sqrt{q^2-1}, & q > 1. \end{cases} \qquad /10/$$

Далее, учитывая, что потенциал $V_\xi(\vec{r})$, согласно уравнению /3/, обрезан по переменной z, а также что зависимость в выражении /5/ для амплитуды $F(\xi, \vec{n}_1, k, \vec{n}_2)$ от вектора $\vec{n}_2$ входит лишь в экспоненту подынтегрального выражения, будем рассматривать амплитуду упругого рассеяния

$$F(\xi, \vec{n}_1, k, \vec{\ell}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}\, \exp(-ik\vec{r}\vec{\ell})\, V_\xi(\vec{r})\, \psi_\xi(\vec{r}, k, \vec{n}_1) \qquad /11/$$

как зависящую от единичного $(\ell^2 = 1)$, вообще говоря, нефизического вектора

$$\vec{\ell} = \vec{q} + \beta\, \vec{n}_z\,, \qquad /12/$$

---

*Полезно отметить, что при $k \to \infty$ из уравнения /9/ можно получить следующее приближенное выражение для функции Грина

$$G^{(+)}(\vec{r}, \vec{r}\,', k) \sim -\frac{i}{2k} \delta^{(2)}(\vec{b}-\vec{b}\,') \{ e^{ik(z-z')}\theta(z-z') + e^{ik(z'-z)}\theta(z'-z) \}, \qquad /9a/$$

где $\delta^{(2)}(b-b')$ - двумерная δ -функция.

В отличие от известного так называемого эйконального приближения для функции Грина [6]

$$G^{(+)}(\vec{r}, \vec{r}\,', k) = -\frac{i}{2k}\, \delta^{(2)}(\vec{b}-\vec{b}\,')\, e^{ik(z-z')}\theta(z-z') \qquad /9в/$$

- в выражении /9a/ симметрия по переменным z и z' сохранена.

где $\vec q$ и $\beta \vec n_z$ - соответственно поперечная ($0 \le q < \infty$) и продольная составляющие вектора ℓ, а величина β определяется соотношением /10/.

Амплитуду рассеяния $F(\xi,\vec n_1,k,\vec\ell)$ с $\vec\ell \ne \vec n_2$ можно выразить с помощью обычного оператора сдвига через физическую амплитуду

$$F(\xi,\vec n_1,k,\vec\ell) = e^{(\vec\ell-\vec a)\frac{\partial}{\partial \vec n_2}}\, F(\xi,n_1,k,n_2)\,/_{\vec a=\vec n_2}\,. \qquad /13/$$

На основании уравнений /4/, /9/ и /11/ в подынтегральном выражении правой части уравнения /8/ для волновой функции $\psi_\xi(\vec r,k,\vec n_1)$ можно получить

$$\psi_\xi(\vec r,k,\vec n_1) = \exp(ik\vec r\vec n_1) + \frac{ik}{2\pi}\int d^3\vec q\, \frac{e^{ik\vec r\vec\ell}}{\beta}\, F(\xi,\vec n_1,k,\vec\ell). \qquad /14/$$

Аналогично, заменой $\vec n_1$ на $-\vec n_2$, получаем выражение для волновой функции $\psi(\vec r,k,-\vec n_2)$.

Подставляя полученные функции в уравнение /8/, приходим к искомому уравнению для амплитуды рассеяния

$$\frac{\partial}{\partial\xi}F(\xi,\vec n_1,k,\vec n_2) = -\frac{1}{4\pi}\int d^2\vec b\, V(\vec r)\, \times$$
$$\times\left\{\exp(ik\vec r\vec n_1) + \frac{ik}{2\pi}\int d^2\vec q\,\frac{e^{ik\vec r\vec\ell}}{\beta}\,F(\xi,\vec n_1,k,\vec\ell)\right\}\times \qquad /15/$$
$$\times\left\{\exp(-ik\vec r\vec n_2)+\frac{ik}{2\pi}\int d^2 q\,\frac{e^{ik\vec r\vec\ell}}{\beta}\,F(\xi,-\vec n_2,k,\vec\ell)\right\},$$

с очевидным граничным условием

$$F(-\infty,\vec n_1,k,\vec n_2)=0\,. \qquad /16/$$

Здесь, как и в уравнении /14/, вектор $\vec r \equiv (\vec b,\xi)$, а вектор ℓ определяется выражением /12/.

Из уравнения /15/ непосредственно следует, что амплитуда упругого рассеяния $F(\xi,\vec n_1,k,\vec n_2)$ удовлетворяет соотношению взаимности

$$F(\xi,\vec n_1,k,\vec n_2) = F(\xi,-\vec n_2,k,-\vec n_1)$$

и, для вещественного потенциала $V(\vec r)$, условию унитарности

$$F(\xi,\vec n_1,k,\vec n_2) - F^*(\xi,\vec n_2,k,\vec n_1) = \qquad /18/$$
$$= \frac{ik}{2\pi}\int d\vec n_3\, F(\xi,\vec n_1,k,\vec n_3)\, F^*(\xi,\vec n_2,k,\vec n_3).$$

Если ввести в правую часть уравнения /15/ замену

$$v(k\vec q,\xi) = -\frac{1}{4\pi}\int d^2\vec b\, e^{ik\vec q\vec b}\, V(\vec b,\xi) \qquad /19/$$

и затем проинтегрировать по переменной $\vec b$, то получим другой, более интересный вид этого уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}F(\xi,\vec n_1,k,\vec n_2) = v(k(\vec q_1-\vec q_2),\xi)\, e^{ik\xi(\beta_1-\beta_2)} +$$
$$+\frac{ik}{2\pi}\int d^2\vec q\, v(k(\vec q-\vec q_2),\xi)\,\frac{e^{ik\xi(\beta-\beta_2)}}{\beta}\, F(\xi,\vec n_1,k,\vec\ell) +$$
$$+\frac{ik}{2\pi}\int d^2 q\, v(k(\vec q+\vec q_1),\xi)\,\frac{e^{ik\xi(\beta+\beta_1)}}{\beta}\, F(\xi,-\vec n_2,k,\vec\ell) +$$
$$+\left(\frac{ik}{2\pi}\right)^2\iint d^2\vec q\, d^2\vec q\,'\, v(k(\vec q+\vec q\,'),\xi)\,\frac{e^{ik\xi(\beta+\beta')}}{\beta\beta'}\, F(\xi,\vec n_1,k,\vec\ell)\,\times$$
$$\times F(\xi,-\vec n_2,k,\vec\ell\,'). \qquad /20/$$

Здесь величины $\vec q_i$ и β_i ($i=1,2$) являются соответственно поперечными и продольными составляющими векторов n_1 и n_2.

Искомая амплитуда упругого рассеяния является амплитудой $F(\xi,\vec n_1,k,\vec n_2)$ при $\xi\to\infty$.

Полученное уравнение /15/, или /20/, на амплитуду упругого рассеяния $F(\xi,\vec n_1,k,\vec n_2)$ является точным нелинейным интегро-дифференциальным уравнением. Оно справедливо без каких-либо ограничений на симметрию потенциала. Это уравнение, наряду с уравнением, предложенным в работе /3/, может служить основой как для численных расчетов, так и для получения различных приближений для амплитуды в теории потенциального рассеяния.

В работе /3/ и в настоящей работе рассмотрены, таким образом, два возможных способа обрезания потенциала и получены соответствующие уравнения для амплитуды рассеяния. Возможны, конечно, и другие виды последовательностей поверхностей S, "послойно" обрезающих потенциал. В этом отношении представляется интересным дать обзор всех способов обрезания потенциала, для которых можно получить точные уравнения для амплитуды рассеяния. Следует отметить, что при получении уравнения для амплитуды рассеяния, соответствующего определенному способу обрезания потенциала, существенным моментом является нахождение представления функции Грина /6/, отражающего симметрию поверхностей нарезания S, составляющих рассматриваемую последовательность.

В основе данного метода лежит, следовательно, определенная свобода в выборе способа обрезания потенциала. На наш взгляд, эта особенность подхода может быть использована при изучении высокоэнергетического упругого рассеяния для более эффективного, чем в других подходах, учета истинной классической траектории частицы. Исследования в этом направлении уже начаты в работе /4/.

В заключение один из авторов /М.Х.Х./ выражает глубокую благодарность за многочисленные обсуждения и ценные замечания В.К.Лукьянову, Р.М.Мир-Касимову, В.В.Молоткову и Ю.С.Полю.

Литература

1. *В.В.Бабиков. "Метод фазовых функций в квантовой механике", Наука. М., 1968.*
2. *Ф.Калоджеро. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. Мир, М., 1972.*
3. *V.V.Babikov, R.M.Mir-Kasimov. Phys.Lett., 31B, 415 (1970).*
4. *В.В.Бабиков, Р.М.Мир-Касимов, М.Х.Ханхасаев. "К теории высокоэнергетического приближения в задаче потенциального рассеяния". Всесоюзная конференция "Ядерные реакции при высоких энергиях", Тбилиси, 19-23 июня 1972 г., Тезисы докладов, М., 1972. /ФИАН СССР/.*
5. *Г.Н.Ватсон. "Теория бесселевых функций". ИЛ, М., 1949 г., ч. 1, стр. 457.*
6. *G.J.Glauber, "High Energy Physics and Nuclear Structure", (S.Devons, Ed)., p. 207, Plenum Press, N.Y., (1970).*

Рукопись поступила в издательский отдел
30 августа 1973 года.