СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 7426

Н.Н. Боголюбов (мл.), И.Г. Бранков

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПРЕДЕЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р4 - 7426

Н.Н. Боголюбов (мл.), И.Г. Бранков

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПРЕДЕЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

I.

В ряде предыдущих работ[I,2,3] одним из авторов (Н.Н.Б.) была развита общая методика для асимптотически точного вычисления плотности термодинамического потенциала (свободной энергии), корреляционных функций и функций Грина для модельных статистических систем, описываемых гамильтонианами вида:

$$\mathcal{H} = T - 2V\sum_{\alpha=1}^{s} g_\alpha J_\alpha \overset{+}{J}_\alpha , \tag{1}$$

где V – объем системы, g_α – некоторые положительные константы. На операторы T, J_α накладываются следующие ограничения:

$$T = \overset{+}{T} \quad , \quad \left| \frac{\theta}{V} \ln Sp\, e^{-\frac{T}{\theta}} \right| \le M_0 \quad ,$$

$$\| J_\alpha \| \le M_1 \quad , \quad \| T J_\alpha - J_\alpha T \| \le M_2 \quad , \tag{I}$$

$$\| J_\alpha J_\beta - J_\beta J_\alpha \| \le \frac{M_3}{V} \quad , \quad \| \overset{+}{J}_\alpha J_\beta - J_\beta \overset{+}{J}_\alpha \| \le \frac{M_3}{V} .$$

Здесь $\| \cdots \|$ обозначает норму оператора, а M_0 , M_1 , M_2 , M_3 – постоянные, не зависящие от V при $V \to \infty$.

Отметим, что частными случаями системы (1) является модельный гамильтониан БКШ в теории сверхпроводимости[4] и модели ферромагнетиков типа Гейзенберга[5,6] и Изинга[7] с постоянным обменным взаимодействием между всеми спинами вида J/N (в случае решеточных систем удобнее рассматривать зависимость не от объема V , а от числа частиц N в системе; термодинамический предельный переход совершается при постоянной плотности числа частиц: $V \to \infty$, $N \to \infty$, $N/V = const$).

В рассматриваемом нами подходе к решению модельных задач вида (1) вводится так называемый аппроксимирующий гамильтониан $\mathcal{H}_a(C)$, зависящий от набора комплексных параметров $C = \{C_1, \dots, C_s\}$

$$\mathcal{H}_a(C) = T - 2V \sum_{\alpha=1}^{s} g_\alpha (C_\alpha \overset{+}{J}_\alpha + \overset{*}{C}_\alpha J_\alpha) + 2V \sum_{\alpha=1}^{s} g_\alpha C_\alpha \overset{*}{C}_\alpha \, . \tag{2}$$

В работе[I] доказана теорема, устанавливающая асимптотическую близость плотностей свободных энергий

$$f_V[\mathcal{H}] = -\frac{\theta}{V} \ln Sp\, e^{-\mathcal{H}/\theta} \tag{3}$$

и

$$f_V[\mathcal{H}_a(C)] = -\frac{\theta}{V} \ln Sp\, e^{-\mathcal{H}_a(C)/\theta} \, , \tag{4}$$

построенных соответственно для исходного и аппроксимирующего гамильтонианов. Приведем ее формулировку.

Теорема I. Пусть операторы T, J_α в гамильтониане (1) удовлетворяют условиям (I). Построим операторную форму аппроксимирующего гамильтониана (2).

Тогда справедливы неравенства

$$0 \le \min_{(C)} f_V[\mathcal{H}_a(C)] - f_V[\mathcal{H}] \le \varepsilon_V , \tag{5}$$

причем $\varepsilon_V \to 0$ при $V \to \infty$ равномерно по отношению к θ в интервале $0 \le \theta \le \theta_0$, где θ_0 – произвольная фиксированная температура.

Подчеркнем, что математически строго было показано[I], что при выполнении условий (I) функции $f_V[\mathcal{H}_a(C)]$ достигают абсолютного минимума по параметрам C в некоторых точках $C = \overline{C}_V$, принадлежащих замкнутой ограниченной области пространства всех точек

$$\inf_{(C)} f_V[\mathcal{H}_a(C)] = f_V[\mathcal{H}_a(\overline{C})] \, ,$$

$$\overline{C} \in \Sigma = \left\{ C : \sum_{\alpha=1}^{s} |C_\alpha|^2 \le const. \right\} .$$

Заметим здесь, что поскольку из оценки (5) не следует существования пределов для $f_V[\mathcal{H}_\alpha(\bar{C}_V)]$ и $f_V[\mathcal{H}]$ при $V \to \infty$, то вопрос о сходимости

$$f_V[\mathcal{H}_\alpha(\bar{C}_V)] \to f_\infty[\mathcal{H}_\alpha(\bar{C})] \quad , \quad V \to \infty \tag{7}$$

требует самостоятельного исследования (см./8/) . Для гамильтониана типа БКШ доказательство существования предела (7) не представляет трудности, а для моделей ферромагнетика (см./6,7/) оно следует тривиально из фактической независимости $f_N[\mathcal{H}_\alpha(C)]$ от числа частиц N.

Отметим далее, что наличие вырождения состояния статистического равновесия (при температурах ниже некоторой критической величины θ_c) привело к необходимости ввести понятие о квазисредних/9/ при исследовании близости средних от динамических величин, корреляционных функций и функций Грина, построенных соответственно для исходной и аппроксимирующей систем.

Так, например, для ферромагнетика, рассмотренного в работе/6/, была получена оценка близости удельных намагниченностей модельной ($\vec{m}_N$) и аппроксимирующей ($\vec{m}_a$) систем вида:

$$|\vec{m}_N(\vec{h}) - \vec{m}_a(\vec{h})| \leq \varepsilon_N\left(\frac{1}{\delta}\right) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad , \quad |\vec{h}| \geq \delta > 0. \tag{8}$$

Здесь $\vec{h}$ – внешнее магнитное поле, снимающее вырождение по отношению к группе вращения спинов, и

$$m_N^\alpha(\vec{h}) \equiv \frac{\partial f_N[\mathcal{H}(\vec{h})]}{\partial h^\alpha} = \mu \langle J^\alpha \rangle_{\mathcal{H}(\vec{h})} \quad . \tag{9}$$

$$m_a^\alpha(\vec{h}) = \frac{\partial f[\mathcal{H}_a(\vec{h})]}{\partial h^\alpha} = \mu\, \bar{C}^\alpha(\vec{h}) \quad , \quad \alpha = 1,2,3,$$

где

$$\mathfrak{I}^{\alpha} = \overset{+}{\mathfrak{I}}{}^{\alpha} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^{\alpha} \quad , \ \alpha = 1,2,3,$$

и $\{\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\}$ - матрицы Паули, μ - размерная константа. В формулах (9) и далее $\langle \ldots \rangle_{\Gamma}$ обозначает среднее по некоторому гамильтониану Γ.

Из оценки (8) видно, что намагниченности $\vec{m}_N(\vec{h})$, $\vec{m}_{\alpha}(\vec{h})$ совпадают в пределе бесконечной системы только в смысле квазисредних, т.е. если сначала перейти к термодинамическому пределу, а потом выключить поле:

$$\lim_{\vec{h}\to 0}\lim_{N\to\infty} \vec{m}_N(\vec{h}) = \vec{m}_{\alpha}(0). \tag{10}$$

В противном случае, из инвариантности свободной энергии f_N относительно направления вектора $\vec{h}$ и непрерывности ее производных при любом конечном N, имеем (см. (9)):

$$\vec{m}_N(\vec{h}) = -\vec{m}_N(-\vec{h})$$

$$\vec{m}_N(0) = 0$$

и, следовательно, получим

$$|\vec{m}_N(0) - \vec{m}_{\alpha}(0)| = |\vec{m}_{\alpha}(0)| > 0 \ , \ \theta < \theta_c . \tag{11}$$

Другими словами, при отсутствии вырождения состояния термодинамического равновесия имеет место предельное соотношение

$$\lim_{N\to\infty} \langle \mathfrak{I}^{\alpha} \rangle_{\mathcal{H}_N(\vec{h})} = \bar{C}^{\alpha}(\vec{h}) . \tag{12}$$

При наличии же вырождения, ввиду (11), оно заведомо не выполняется.

Аналогичная ситуация возникает и при рассмотрении модельного гамильтониана БКШ. В этом случае, для определения квазисредних в гамильтониан вводится "член с источниками" вида [2] $-\tau(\mathfrak{J}+\overset{+}{\mathfrak{J}})V$, снимающий вырождение по отношению к градиентной инвариантности I-го рода, т.е. нарушающий закон сохранения числа частиц.

Для среднего $\langle(\mathfrak{J}-\bar{C})(\mathfrak{J}-\overset{*}{\bar{C}})\rangle$ была получена оценка

$$\langle(\mathfrak{J}-\bar{C}(\tau))(\overset{+}{\mathfrak{J}}-\overset{*}{\bar{C}})\rangle_{\mathcal{H}_V(\tau)} \le \varepsilon_V\left(\tfrac{1}{\delta}\right)\underset{V\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad , \ \tau\ge\delta>0 , \tag{13}$$

где $\mathfrak{J}=\frac{1}{2V}\sum_p \lambda_p \overset{+}{a}_p \overset{+}{a}_{-p}$, a_p – фермиевские операторы, из которой следует x) справедливость предельного равенства

$$\lim_{V\to\infty}\langle\mathfrak{J}\rangle_{\mathcal{H}(\tau)} = \bar{C}(\tau) \quad , \ \tau\ne 0. \tag{14}$$

С другой стороны, если рассматривать обычные средние, т.е. положить $\tau=0$, получим

$$\langle\mathfrak{J}\rangle_{\mathcal{H}(0)}=0$$

и, следовательно,

$$\lim_{V\to\infty}\left|\langle\mathfrak{J}\rangle_{\mathcal{H}(0)}-\bar{C}(0)\right| = |\bar{C}(0)|>0 \ , \quad \theta<\theta_c . \tag{15}$$

Очевидно, представляет интерес установление связи между единственностью решения задачи на абсолютный минимум для плотности свободной энергии аппроксимирующей системы и справедливостью предельных равенств типа (11), (14) в общем случае.

Прежде всего, отметим, что если при любом конечном $C\equiv\{C_1,\dots,C_s\}$ существует предел

$$\lim_{V\to\infty} f_V[\mathcal{H}_a(C)] = f_\infty[\mathcal{H}_a(C)] \ , \tag{16}$$

x) В силу тождества:

$$\langle(\mathfrak{J}-C)(\overset{+}{\mathfrak{J}}-\overset{*}{C})\rangle_\Gamma = \langle|\mathfrak{J}-\langle\mathfrak{J}\rangle_\Gamma|^2\rangle_\Gamma + |\langle\mathfrak{J}\rangle_\Gamma - C|^2 .$$

что мы в дальнейшем и будем предполагать, то $f_\infty[\mathcal{H}_a(C)]$ является непрерывной функцией параметров C. Доказательство этого утверждения основывается на равномерную по V ограниченность нормы операторов $\mathfrak{J}_\alpha$. Таким образом, повторяя оценки работы/I/, можем утверждать, что $f_\infty[\mathcal{H}_a(C)]$ достигает своего абсолютного минимума внутри замкнутой ограниченной области Σ. Обозначим через $\bar{C}$ точку, в которой достигается абсолютный минимум:

$$f_\infty[\mathcal{H}_a(\bar{C})] = \min_{(C)} f_\infty[\mathcal{H}_a(C)] \quad , \quad \bar{C} \in \Sigma \, . \tag{I7}$$

Тогда с учетом теоремы I можем утверждать, что

$$|f_V[\mathcal{H}] - f_\infty[\mathcal{H}_a(\bar{C})]| \leq \delta_V \xrightarrow[V\to\infty]{} 0 \, . \tag{I8}$$

П.

В настоящей работе докажем следующий важный результат.

Теорема 2. Пусть гамильтониан системы $\mathcal{H}$ имеет вид (1), где операторы $T, \mathfrak{J}_\alpha$ $(1 \leq \alpha \leq S)$ удовлетворяют условиям (I). Если при любых конечных C плотность свободной энергии для гамильтониана $\mathcal{H}_a(C)$, определенного равенством (2), сходится при $V \to \infty$ и функция $f_\infty[\mathcal{H}_a(C)]$ достигает абсолютного минимума в единственной точке $C = \bar{C}$, то

$$\langle (\mathfrak{J}_\alpha - \bar{C}_\alpha)(\overset{+}{\mathfrak{J}}_\alpha - \overset{*}{\bar{C}}_\alpha) \rangle_{\mathcal{H}} \xrightarrow[V\to\infty]{} 0 \, . \tag{I9}$$

В ходе доказательства нам потребуется следующая лемма.

Лемма. Пусть существует единственная точка $\bar{C}$, отвечающая абсолютному минимуму функции $f_\infty[\mathcal{H}_a(C)]$, и

$$\left|\zeta_\infty[\mathcal{H}_\alpha(C)] - \zeta_\infty[\mathcal{H}_\alpha(\bar C)]\right| \le Q\cdot\delta \to 0\ ,\ \delta \to 0\ ,$$

где $Q = const$. Отсюда следует, что

$$|C_\alpha - \bar C_\alpha| \le \xi(\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0\ . \qquad (21)$$

Действительно, рассмотрим выражение

$$\xi(\delta) = \sup |C - \bar C|$$

в области, в которой*/

$$\left|\zeta_\infty[\mathcal{H}_\alpha(C)] - \zeta_\infty[\mathcal{H}_\alpha(\bar C)]\right| \le Q\cdot\delta$$

и покажем, что $\xi(\delta) \to 0$, когда $\delta \to 0$.

Допустим обратное: что $\xi(\delta)$ не стремится к нулю при $\delta \to 0$. Тогда существует такая последовательность чисел $\delta \to 0$ и такие точки C_δ , что разность $|C_\delta - \bar C|$ будет оставаться больше некоторой положительной константы

$$|C_\delta - \bar C| \ge \rho = const\ , \qquad (22)$$

в то время как

$$\zeta_\infty[\mathcal{H}_\alpha(C_\delta)] \to \zeta_\infty[\mathcal{H}_\alpha(\bar C)]\ .$$

Покажем, что это приведет к противоречию. В самом деле, множество $\{C_\delta\}$ ограничено : $C_\delta \in \Sigma$ и по теореме Вейерштрасса из него можно выбрать сходящуюся последовательность $C_{\delta'}$:

$$C_{\delta'} \to C'\ ,\ \delta' \to 0\ ,$$

которая сходится в некоторой точке C'.

---

*/ Эта область конечна и супремум существует.

Точка C' отлична от $\bar{C}$, поскольку согласно (22), $|C'-\bar{C}|\geq\rho$. С другой стороны, переходя к пределу $\delta\to 0$, получаем

$$f_\infty[\mathcal{H}_\alpha(C')]=f_\infty[\mathcal{H}_\alpha(\bar{C})],$$

что противоречит условию единственности минимума.

Перейдем теперь к доказательству нашей основной теоремы 2.

Рассмотрим вспомогательную задачу с гамильтонианом

$$G^\tau=\mathcal{H}-2V\tau\sum_{\alpha=1}^{s}g_\alpha(J_\alpha-\bar{C}_\alpha)(\overset{+}{J}_\alpha-\overset{*}{\bar{C}}_\alpha), \tag{23}$$

зависящим от положительного параметра τ.

Используя явное выражение (1) для $\mathcal{H}$, представим G^τ следующим образом */

$$G^\tau=T-2V\sum_{\alpha=1}^{s}g_\alpha(1+\tau)J_\alpha\overset{+}{J}_\alpha+ \\ +2V\tau\sum_{\alpha=1}^{s}g_\alpha(\bar{C}_\alpha\overset{+}{J}_\alpha+\overset{*}{\bar{C}}_\alpha J_\alpha-\bar{C}_\alpha\overset{*}{\bar{C}}_\alpha). \tag{24}$$

В соответствии с общей методикой построим аппроксимирующий гамильтониан $G_\alpha^\tau(C)$:

$$G_\alpha^\tau(C)=T-2V\sum_{\alpha=1}^{s}g_\alpha(1+\tau)(C_\alpha\overset{+}{J}_\alpha+\overset{*}{C}_\alpha J_\alpha-C_\alpha\overset{*}{C}_\alpha)+ \\ +2V\tau\sum_{\alpha=1}^{s}g_\alpha(\bar{C}_\alpha\overset{+}{J}_\alpha+\overset{*}{\bar{C}}_\alpha J_\alpha-\bar{C}_\alpha\overset{*}{\bar{C}}_\alpha). \tag{25}$$

Введем обозначение:

$$(1+\tau)C_\alpha-\tau\bar{C}_\alpha=S_\alpha, \tag{26}$$

и преобразуем (25) к виду

$$G_\alpha^\tau(C)=\mathcal{H}_\alpha(S)-2V\frac{\tau}{1+\tau}\sum_{\alpha=1}^{s}g_\alpha|S_\alpha-\bar{C}_\alpha|^2, \tag{27}$$

---

*/ Напомним, что здесь $\bar{C}$ -фиксированные числа.

где $\mathcal{H}_a(S)$ определяется формулой (2).

Поскольку гамильтониан G^τ удовлетворяет условиям теоремы I, то пусть

$$\min_{(C)} f_\infty[G_a^\tau(C)] = f_\infty[G_a^\tau(C^\tau)] \ . \tag{28}$$

Тогда, применяя (I8), имеем

$$\left| f_V[G^\tau] - f_\infty[G_a^\tau(C^\tau)] \right| \le \eta_V \xrightarrow[V\to\infty]{} 0 \ , \tag{29}$$

где

$$C_\alpha^\tau = \frac{S_\alpha^\tau + \tau \bar{C}_\alpha}{1+\tau} \ .$$

Далее, учитывая (27) и (28), получим

$$f_\infty[G_a^\tau(C^\tau)] = f_\infty[\mathcal{H}_a(S^\tau)] - 2\frac{\tau}{1+\tau}\sum_{\alpha=1}^{s} g_\alpha |S_\alpha^\tau - \bar{C}_\alpha|^2 \le \tag{30}$$
$$\le f_\infty[G_a^\tau(\bar{C})] = f_\infty[\mathcal{H}_a(\bar{C})] \ .$$

Так как в силу (I7)

$$f_\infty[\mathcal{H}_a(S^\tau)] \ge f_\infty[\mathcal{H}_a(\bar{C})] \ , \tag{31}$$

то из (30) находим, что

$$0 \le f_\infty[\mathcal{H}_a(S^\tau)] - f_\infty[\mathcal{H}_a(\bar{C})] \le 2\frac{\tau}{1+\tau}\sum_{\alpha=1}^{s} g_\alpha |S_\alpha^\tau - \bar{C}_\alpha|^2 \xrightarrow[\tau\to 0]{} 0 \ . \tag{32}$$

Воспользуемся теперь единственностью точки $\bar{C}$, в которой функция $f_\infty[\mathcal{H}_a(C)]$ достигает абсолютного минимума, и применим лемму. Согласно (2I), имеем:

$$|S_\alpha^\tau - \bar{C}_\alpha| \le \xi(\tau) \to 0 \ , \ \tau \to 0 \ . \tag{33}$$

Поэтому, как видно из (30), выполняются неравенства

$$0 \le f_\infty[\mathcal{H}_a(S^\tau)] - f_\infty[G_a^\tau(C^\tau)] =$$
$$= \frac{2\tau}{1+\tau}\sum_{\alpha=1}^{s} g_\alpha |S_\alpha^\tau - \bar{C}_\alpha|^2 \le 2\tau\, \xi^2(\tau) \sum_{\alpha=1}^{s} g_\alpha \ ,$$

откуда, еще раз обращаясь к (31), получим

$$0 \leq f_\infty[\mathcal{H}_a(\bar{C})] - f_\infty[G_a^\tau(C^\tau)] \leq 2\tau\,\xi^2(\tau)\sum_{\alpha=1}^{s} g_\alpha . \tag{34}$$

Итак, ввиду (18), (29) и (34), имеем

$$\left| f_V[\mathcal{H}] - f_V[G^\tau] \right| \leq \delta_V + \eta_V + 2\tau\,\xi^2(\tau)\sum_{\alpha=1}^{s} g_\alpha . \tag{35}$$

Заметим, что по теореме Н.Н.Боголюбова (доказательство см. / ,3/), если гамильтониан Γ представим в виде $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1$, то

$$\frac{1}{V}\langle \Gamma_1 \rangle_{\Gamma_0+\Gamma_1} \leq f_V[\Gamma_0+\Gamma_1] - f_V[\Gamma_0] \leq \frac{1}{V}\langle \Gamma_1 \rangle_{\Gamma_0}$$

и в нашем случае

$$0 \leq 2\tau \sum_{\alpha=1}^{s} g_\alpha \langle (J_\alpha - \bar{C}_\alpha)(\overset{+}{J}_\alpha - \overset{*}{\bar{C}}_\alpha) \rangle_{\mathcal{H}} \leq f_V[\mathcal{H}] - f_V[G^\tau] . \tag{36}$$

Подставляя в (36) оценку (35), находим

$$0 \leq \sum_{\alpha=1}^{s} g_\alpha \langle (J_\alpha - \bar{C}_\alpha)(\overset{+}{J}_\alpha - \overset{*}{\bar{C}}_\alpha) \rangle_{\mathcal{H}} \leq \frac{\delta_V + \eta_V}{2\tau} + \xi^2(\tau)\sum_{\alpha=1}^{s} g_\alpha . \tag{37}$$

Так как левая часть последнего неравенства не зависит от τ, то, выбирая, например,

$$\tau = \sqrt{\delta_V + \eta_V} ,$$

получаем окончательную оценку

$$0 \leq \sum_{\alpha=1}^{s} g_\alpha \langle (J_\alpha - \bar{C}_\alpha)(\overset{+}{J}_\alpha - \overset{*}{\bar{C}}_\alpha) \rangle_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\delta_V + \eta_V} + \xi^2(\sqrt{\delta_V + \eta_V})\sum_{\alpha=1}^{s} g_\alpha \underset{V\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

или

$$0 \leq \langle (J_\alpha - \bar{C}_\alpha)(\overset{+}{J}_\alpha - \overset{*}{\bar{C}}_\alpha) \rangle_{\mathcal{H}} \leq \mu_V \underset{V\to\infty}{\longrightarrow} 0 , \quad \alpha = 1,2,3, \tag{38}$$

доказывающую утверждение теоремы 2.

В заключение заметим, что развитый в работах [1,3] метод для оценки близости временных корреляционных функций (см. также[6]), построенных соответственно для модельной и аппроксимирующей систем, основывается на неравенствах вида (38). Таким образом, теорема 2 дает возможность, в случае отсутствия вырождения состояния статистического равновесия, провести общее доказательство совпадения в термодинамическом пределе корреляционных функций для произвольной системы, описываемой гамильтонианом вида (1), удовлетворяющим условиям (I) с соответствующими корреляционными функциями, построенными на основе аппроксимирующего гамильтониана (2).

Подчеркнем, что предложенный в настоящей работе метод не использует явное включение членов с источниками, снимающих вырождение в гамильтониане системы, а опирается исключительно на применение теоремы I. Это значительно облегчает технику доказательства и избавляет нас от необходимости рассматривать производные от термодинамического потенциала.

Литература:

1. N.N.Bogolubov (Jr.). Physica, 32, 933, 1966.
2. Н.Н.Боголюбов (мл.). Препринт ИТФ-67-I, Киев, 1967.
3. N.N.Bogolubov (Jr.). A Method for Studying Model Hamiltonians, Pergamon Press, 1972.
4. Н.Н.Боголюбов, Д.Н.Зубарев, Ю.А.Церковников . ДАН СССР, 117, 778, 1957.
5. J.G.Brankov, A.S.Shumovski, V.A.Zagrebnov. Препринт ОИЯИ, Е4-7150, Дубна, 1973.
6. И.Г.Бранков, А.С.Шумовский. Сообщение ОИЯИ, Р4-6899, Дубна, 1973.
7. И.Г.Бранков. Сообщение ОИЯИ, Р4-6998, Дубна, 1973.
8. Н.Н.Боголюбов (мл.)ТМФ 5, 136, 1970.
9. Н.Н.Боголюбов. Препринт ОИЯИ Д-781, Дубна, 1961.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 августа 1973 года.