

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



С343а

Б-23

P4 - 7425

4027/2-73

Е. Банг, В.Е. Бунаков, Ф.А. Гареев,  
Г. Шульц, Р.М. Ямалеев

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ  
ДЛЯ ФОРМФАКТОРОВ РЕАКЦИЙ  
ОДНОУКЛОННЫХ ПЕРЕДАЧ

**1973**

ЛАБОРАТОРИЯ  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 7425

Е. Банг,<sup>1</sup> В.Е.Бунаков,<sup>2</sup> Ф.А. Гареев,  
Г. Шульц,<sup>3</sup> Р.М. Ямалеев

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ  
ДЛЯ ФОРМФАКТОРОВ РЕАКЦИЙ  
ОДНОНУКЛОННЫХ ПЕРЕДАЧ

*Направлено в Nuclear Physics*

---

<sup>1</sup> Институт Нильса Бора, Копенгаген.

<sup>2</sup> ЛИЯФ, Ленинград.

<sup>3</sup> ЦИЯФ, Россендорф, ГДР.

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

## § I. Введение

Проблема вычисления формфакторов реакций нуклон — ных передач сформулирована довольно давно. С самого начала было очевидно, что асимптотическое поведение формфакторов определяет как угловые распределения, так и абсолютные сечения реакций. Этим фактом объясняется появление эмпирической процедуры подгонки глубины ямы. Она гарантирует хорошее асимптотическое поведение формфактора, но уводит от обычных представлений о спектроскопических факторах, которые основаны на использовании модели оболочек. Тем не менее, процедура  $WDP$  является единственным приближением, применяемым экспериментаторами до настоящего времени. Поэтому желательно понять смысл этого приближения. Позднее были получены более точные уравнения для формфакторов <sup>/1/</sup>. До сих пор сделана только одна попытка решения уравнения такого типа более или менее точным способом <sup>/2/</sup>. Вычислительные трудности при решении точных уравнений и отсутствие их связи с существующими спектроскопическими методами и моделями вызвали появление различных приближенных методов решения уравнений для формфакторов <sup>/3-5/</sup>. Однако ни один из этих приближенных методов не был сформулирован достаточно последовательным образом. В данной работе мы попытаемся дать ответы на некоторые из этих проблем.

В § 2 мы дадим краткий вывод точного ( в рамках простой спектроскопической модели) уравнения для формфакторов и обсудим проблемы их асимптотического поведения.

В §3 развита теория возмущений, которая дает возможность получить приближенное уравнение для формфакторов. Обсуждены ограничения на это уравнение, а также пути численного его решения. Предложено разложение по функциям Штурма, которое позволяет выяснить смысл процедуры WDP. В §4 представлены результаты численных расчетов, полученные путем применения функций Штурма, которые сравниваются с точными и приближенными формфакторами, вычисленными в процедуре WDP.

## § 2. "Точные" уравнения на формфакторы

При извлечении спектроскопической информации из реакции срыва  $A(d,p)B$  возникает вопрос о вычислении формфактора:

$$F_{AB}(\vec{z}) = \int \psi_{A_i}^* \psi_B d\vec{\xi}. \quad (1)$$

Здесь мы опускаем коэффициенты Клебша-Гордона. С методической точки зрения важно рассматривать случай, когда ядро-мишень состоит из инертного остова плюс один нуклон, движущийся в оболочечном потенциале, поскольку такая модель имеет простую структуру и в то же время содержит много проблем, характерных и для более реалистической ситуации. Тогда гамильтониан для конечного ядра  $B$  будет иметь вид:

$$H_B = H_A(\vec{\xi}) + T_n + V_c(\vec{z}_n) + V_{2n}(\vec{z}_n, \vec{\xi}) = H_0(\vec{\xi}, \vec{z}) + V(\vec{z}, \vec{\xi}), \quad (2)$$

где  $V_{2n}$  - остаточные взаимодействия между переданным нуклоном и нуклоном ядра мишени,  $H_0$  - оболочечный гамильтониан

для не взаимодействующих частиц. Из уравнений (1), (2) можно получить /1/ следующую систему уравнений для формфакторов:

$$[E_{BA_i} - T + V_0] f_{A_i B} = \int d\vec{\xi} \psi_{A_i}^*(\vec{\xi}) V_{2n}(\vec{z}, \vec{\xi}) \psi_B(\vec{z}, \vec{\xi}) = P_{A_i B}(\vec{z}), \quad (3)$$

где  $E_{BA_i} = E_B - E_{A_i}$  - энергия связи системы  $B$  относительно её развала в состоянии  $\psi_{A_i}$  системы  $A$  и переданного нуклона. Используя соотношение (1) и разлагая  $\psi_B$  по каналовым функциям

$$\psi_B = \sum_i f_{A_i B} \psi_{A_i}, \quad (4)$$

мы можем свести уравнения (3) к известной форме уравнений на связанные каналы. Единственное различие между (3) и уравнениями на связанные каналы, хорошо известными в теории рассеяния, состоит в том, что здесь все каналы закрыты и, следовательно, энергия  $E_B$  является собственным значением гамильтониана  $H_B$ .

Мы знаем, что асимптотическое поведение формфактора очень важно при вычислении сечений реакции срыва. Обычно предполагают, что это поведение определяется энергией связи  $E_{BA_i}$ , входящей в левую часть уравнения (3). Основанием для такого предположения является следующее: на бесконечности переданный нуклон и система  $A$  не связаны, правая часть уравнения (3), а также

потенциал среднего поля  $V_0$  исчезает, и мы получаем просто закон сохранения энергии, который определяет экспоненциальное асимптотическое поведение  $\chi_{BA}$ . В действительности эти аргументы могут быть ошибочными. Рассмотрим для примера ситуацию сильной кластеризации, когда энергии связи для двухнуклонного кластера меньше, чем для нуклона. Такая ситуация имеет место в лёгких ядрах. Если асимптотика кластерных волновых функций также определяется кластерной энергией связи, то асимптотическое поведение нуклонных волновых функций может сильно отличаться от поведения, определяемого нуклонной энергией связи. Другими словами, нуклонные и кластерные каналы образуют асимптотически виртуальные состояния, для которых законы сохранения энергии нарушаются. Следовательно, необходимы специальные исследования асимптотического поведения  $\chi_{A,B}$ . Они приведены в приложении к данной работе, где уравнение (3) рассматривается как специальный случай неоднородных уравнений. Эти исследования показывают, что асимптотика  $\chi_{A,B}$  определяется  $E_{K A_i}$ , если соответствующее состояние  $A_i$  является связанным (заметим, что в общем случае необходимо учесть вклад несвязанных состояний  $A_i$  в сумму (4)).

С нашей точки зрения, несвязанные каналы  $A_i$ , которые могут наблюдаться в реакциях подхвата на несвязанные состояния, дают вклад только в вышеупомянутое асимптотическое поведение кластеров. Но тогда мы не можем описывать

состояние  $B$  как двухчастичную конфигурацию в среднем поле остова и должны пользоваться более сложной моделью.

Это обстоятельство ведёт к необходимости переопределения феноменологических остаточных взаимодействий (см. замечания в следующем параграфе). В данной работе мы пренебрегаем этим эффектом. Сейчас обсудим способ решения системы уравнений (3) с асимптотическими граничными условиями, определяемыми  $E_{K A_i}$ . Одним из возможных путей решения уравнения (3) является разложение формфакторов по полному набору одночастичных оболочечных волновых функций:

$$\chi_{A,B} = \int_n C_{neij}^{A_i B} \varphi_{neij}(\vec{r}), \quad (5)$$

где символ  $\int_n$  означает суммирование по дискретным состояниям и интегрирование по состояниям сплошного спектра. При этом мы сталкиваемся с проблемой нахождения собственных значений гамильтониана  $H_B$  с учётом непрерывного спектра модели оболочек. До настоящего момента сделана только одна попытка<sup>[2]</sup> использовать этот способ, оказавшаяся весьма трудоёмкой. Тем не менее, как будет показано ниже, этот способ пока является единственным источником надёжной информации о правильном асимптотическом поведении формфактора. Другая возможность решения системы уравнений на формфакторы — метод связанных каналов, аналогичный тому, который был применён для нахождения одночастич-

ных собственных значений и собственных функций деформированного ядра<sup>/6/</sup> (или, быть может, упрощенная итеративная версия этого метода<sup>/7/</sup>). Заметим, что в обоих подходах находят собственные значения и, чтобы получить экспериментальные значения энергии связи  $E_{BA}$ , необходимо варьировать параметры остаточных взаимодействий (что и было сделано в работе<sup>/2/</sup>).

В рамках обоих методов вычислительная процедура намного сложнее, чем в обычной оболочечной модели. С другой стороны, известно, что в обычном приближении смешивания связанных конфигураций модели оболочек получены обнадеживающие результаты при изучении структуры ядра. Поэтому кажется привлекательным использование этих результатов для решения системы уравнения (3). Такая возможность будет обсуждена в следующем параграфе.

### § 3. Приближенные уравнения для факторов

Введем оператор  $P$  проектирования на подпространство (незаполненных) связанных состояний  $|v\rangle$  оболочечного гамильтониана  $H_0$  (2):

$$P = \sum_v |v\rangle \langle v|. \quad (6)$$

Обычным оболочечным смешиванием конфигураций получаем состояния  $\psi_B^0$ , являющиеся решениями уравнения:

$$(H_0 + P V_{res} P - E_0) \psi_B^0 = 0, \quad (7)$$

где  $P V_{res} P$  - эффективные остаточные взаимодействия в модели оболочек. Мы можем расширить наш обрезанный базис

включением состояний  $\psi_B(E)$  из непрерывного спектра гамильтониана  $H_0$  :

$$(H_0 - E) \psi_B(E) = 0. \quad (8)$$

Точное уравнение для системы  $B$  может быть написано в следующем виде:

$$(H_0 + P V_{res} P - E) \psi_B = -U \psi_B, \quad (9)$$

где

$$U = V_{res} - P V_{res} P. \quad (10)$$

Рассмотрим  $U$  как малые возмущения. Тогда в первом порядке теории возмущений  $U$  будет смешивать состояние  $\psi_B^0$  только с состояниями  $\psi_B(E)$  из непрерывного спектра, и соответствующие решения уравн. (9) будут:

$$\psi_B^1 = - \frac{1}{H_0 - E_0} V_{res} \psi_B^0. \quad (11)$$

Вышеупомянутый метод диагонализации<sup>/2/</sup> с включением непрерывного спектра указывает, что теория возмущений может быть применима, поскольку амплитуды примеси состояний из непрерывного спектра не превышают 3% от амплитуд связанных состояний.

Уравнение (11) может быть записано в более известной форме, как было предложено Остерном и Пракашом<sup>/3/</sup>:

$$(H_0 - E_0) \psi_K^1 = -V_{2e1} \psi_K^0 \quad (12)$$

Это уравнение с помощью соотношения (I) сводится к приближенному уравнению для формфакторов:

$$[E_{0A_i} - T + V_0] \chi_{A_i K}^1 = \int d\vec{\xi} \psi_{A_i}^*(\vec{\xi}) V_{2e1}(\vec{z}, \vec{\xi}) \psi_K^0(\vec{z}, \vec{\xi}) = P_{AB}^0(z), \quad (3a)$$

где

$$E_{0A_i} = E_0 - E_{A_i}. \quad (13)$$

Из этих уравнений видно, что для получения экспериментального значения энергии связи в рамках последовательной теории возмущений мы должны подогнать параметры  $V_{2e1}$  так, чтобы выполнялось равенство  $E_0 = E_K$ . Также ясно другое обстоятельство, которое характерно не только для приближенных уравнений (3a), но и для точных уравнений (3). А именно, в приближении двухчастичной модели над остовом (даже при учёте влияния непрерывного спектра)  $V_{2e1}$  может быть определён только для валентных состояний, не занятых нуклонами. Поэтому необходимо выделить <sup>12/</sup> занятые состояния  $|\mu\rangle$  остова при определении остаточных взаимодействий  $V_{2e1}$ . Тогда правые части уравнения (3a) и (3) будут иметь вид:

$$P_{AB}(\vec{z}) = P_{AB}(\vec{z}) - \sum_{\mu} |\mu\rangle \langle \mu| P_{AB} \rangle, \quad (14)$$

Эта процедура выделения занятых состояний остова может быть названа учётом принципа Паули. В самом деле, известно, что уравнение Шредингера не содержит принципа Паули, который впоследствии привносится извне. Но при этом мы должны быть уверены, что модель инертного заполненного остова имеет отношение к действительности. Если состояние  $\psi_K$  имеет более сложную природу, то это вызывает как ренормировку  $V_{2e1}$ , так и изменения в структуре соотношения (14), которые трудно предсказать, хотя можно ожидать, что они похожи на эффекты блокировки в полумикроскопических моделях ядра <sup>19/</sup>. По величине эффекты принципа Паули могут оказаться значительными, как мы увидим в следующем параграфе.

Основное преимущество уравнения (3a) состоит в том, что это уже не система связанных уравнений, а совокупность неоднородных уравнений с хорошо определёнными правыми частями. Однако в этом состоит и большой их недостаток, ибо к ним мы не можем применить выводы, полученные в приложении, и нет уверенности в том, что асимптотика  $\chi_{A_i K}^1$  все ещё определяется энергией связи  $E_{A_i K}$ . В самом деле, оболочечная энергия одной из компоненты  $\psi_K^0$  может быть в

некоторых случаях мала, и тогда асимптотическое поведение  $\rho_{AB}^0(r)$  будет определять асимптотику  $\rho_{A,B}^z(r)$ . Однако можно попытаться показать, что этот случай маловероятен. Обозначим через  $\mathcal{X}$  волновое число, соответствующее энергии связи  $E_{KA}$  в левой части уравнения (3а), а  $\lambda_A$ ,  $\lambda_K$ , и  $\lambda_{B_2}$  относятся к невозмущенным одночастичным оболочечным энергиям нуклона в ядре  $A$  и нуклонов 1, 2 в ядре  $B$ . Тогда для остаточных взаимодействий с малым радиусом асимптотическое поведение  $\rho_{AB}^0$  будет иметь вид  $\exp\{-(\lambda_A + \lambda_{K_1} + \lambda_{K_2})r\}$ . Рассмотрим слабосвязанное состояние  $\lambda_B$  и предположим

$\lambda_{B_1} = \lambda_{B_2} = \lambda_B$ . Типичная экспериментальная ситуация по разности масс четно-четных и нечетных ядер такова, что  $\mathcal{X} \lesssim 1.3 \lambda_A$ . Следовательно, асимптотическое поведение  $\rho_{A,B}^z$  определяется поведением  $\rho_{AB}^0$ , если

$$\lambda_A + 2\lambda_B < \mathcal{X} \lesssim 1.3 \lambda_A.$$

Это означает, что  $\lambda_B^2 \lesssim 0.02 \lambda_A^2$ . Итак, подобная ситуация может иметь место тогда, когда энергии слабосвязанной одночастичной компоненты  $\psi_B^0$  составляет около 2% от энергии связи  $E_A$ . Тем не менее, такой случай возможен, и поэтому необходима осторожность при работе с приближенными уравнениями (3а). Следует заметить, что если даже асимптотика  $\rho_{A,B}^z$  верна, неправильная асимптотика  $\rho_{AK}^0$  на поверхности ядра может сильно изменить абсолютное значение формфактора.

Резюмируя, можно сказать, что приближенные ур. (3а) будут давать хорошие результаты, когда все базисные состояния обладают большими энергиями связи и когда состо-

яние  $\psi_K^0$  будет иметь одну доминирующую оболочечную компоненту с энергией связи, близкой к экспериментальной.

Рассмотрим возможные методы решения системы неоднородных уравнений (3а). Ясно, что можно пользоваться прямыми методами численного интегрирования<sup>/4/</sup> системы ур. (3а), но такие методы обладают большими вычислительными трудностями, как видно из сильной энергетической зависимости коэффициентов, рассмотренных в приложении. Следовательно, желательно разлагать формфакторы по полному набору базисных функций, имеющих требуемую асимптотику. Оболочечный базис не подходит, как уже было сказано, ибо он в общем случае содержит состояния из сплошного спектра. Другим возможным базисом является набор осцилляторных функций<sup>/3/</sup>, однако асимптотика осцилляторных функций сильно отличается от требуемой. Поэтому сходимость такого разложения медленная.

Более соответствующим физике задачи<sup>/8, 10/</sup>, на наш взгляд, является набор функций Штурма  $g_n(r)$ :

$$\rho_{AB}(r) = \sum_n a_n g_n(r), \quad (15)$$

определенных уравнениями

$$[T + d_n V_c - E_{BA}] g_n(r) = 0. \quad (16)$$

Каждая функция этого набора имеет правильное асимптотическое поведение по определению. Также очевидно, что широко используемая процедура  $WDP$  соответствует сохранению



в разложении (I5) одного доминирующего члена. С помощью (3а) и (I4-I6) можно найти коэффициенты разложения  $a_n$ :

$$a_n = \frac{I_n}{1 - \alpha_n} \quad (I7)$$

где

$$I_n = \int g_n(r) \overline{P_{AB}^0}(r) dr$$

Величина  $\alpha_{n_0}$  для доминирующей компоненты  $n_0$ , определяемой в  $WDP$ , обычно близка к единице (типичными величинами являются  $\alpha_{n_0} \approx 1.1 - 1.4$ ). Соответствующий коэффициент  $a_{n_0}$  поэтому будет большим. Квазиклассические оценки показывают, что для больших  $n$  величина  $\alpha_n \sim n^2$ . Уже эти факты гарантируют нам быструю сходимость ряда (I5). Другая причина быстрой сходимости ряда (I5) обусловлена величиной  $I_n$ , которая с увеличением числа узлов  $g_n(r)$  становится все меньше и меньше из-за осцилляций  $g_n(r)$  внутри ядра. Для больших  $n$  величина  $I_n$  определяется лишь интегралом от внешней области, где функции  $g_n(r)$  и  $\overline{P_{AB}^0}(r)$  экспоненциально малы. Как показывают примеры, приведённые в следующем параграфе, достаточно ограничиться 3-4 членами в разложении (I5). В случае слабосвязанных состояний сходимость (I5) может быть хуже, однако тогда теория возмущений для получения приближённых уравн. (3а) неприменима.

#### IV. Численные результаты

В этом параграфе мы опишем численные результаты вычислений формфакторов и сечений для реакции подхвата  $^{42}\text{Ca}(p,d)^{41}\text{Ca}$ . Ядро  $^{42}\text{Ca}$  рассматриваем как дважды магический остов, тогда низколежащие состояния  $^{42}\text{Ca}$  будут одночастичными нейтронными состояниями, а основное состояние  $0^+$  ядра  $^{42}\text{Ca}$  - суперпозицией двухнейтронных конфигураций:

$$\Psi_B(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{n \in j} C_{nej} \left\{ \Phi_{nej}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \Phi_{nej}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \right\}^{0^+} \quad (I8)$$

где  $n \in j = 1f_{7/2}, 2p_{1/2}, 1f_{5/2}$

$$\Phi_{nej}^m(\vec{r}, \vec{\sigma}) = U_{nej}(r) [Y_l(r) \chi_{1/2}(\sigma)]_m^j$$

- одночастичные волновые функции. Коэффициенты смешивания находятся диагонализацией гамильтониана ядра  $^{42}\text{Ca}$ , причём параметры среднего поля (потенциал Саксона-Вудса) и остаточных двухчастичных сил были взяты такими же, как в <sup>121</sup>. В таблице I приведены коэффициенты  $a_n$  разложения формфакторов для реакции  $^{42}\text{Ca}(p,d)^{41}\text{Ca}$  по функциям Штурма  $g_n(r)$ , когда для вычисления  $\overline{P_{AB}^0}(r)$  были использованы волновые функции (I8) и  $\Phi_{nej}^m(\vec{r}, \vec{\sigma})$ . Видно, что даже в худших случаях (формфакторы  $2p_{1/2}$  и  $1f_{5/2}$ ) сходимость настолько сильна, что ряд можно оборвать на 3-4 члене, и вклад отброшенных членов разложения  $\sim 1\%$ . Полученные при этом формфакторы полностью совпадают с формфакторами из точных расчётов <sup>121</sup>. На рис. I изображены дифференциальные сечения реакции

Таблица I.

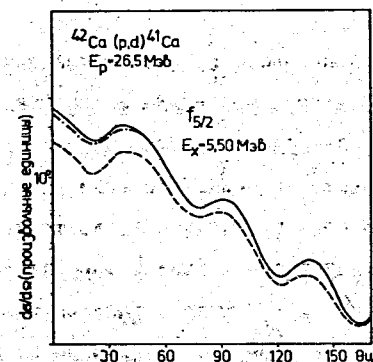
Коэффициенты разложения  $a_{nef}$  формфакторов  $f_{AK}(r)$  для реакции  $^{42}\text{Ca}(p,d)^{41}\text{Ca}$  по функциям Штурма, вычисленные без проектирующего члена в  $P_{AK}(r)$

$1f_{7/2}$	$1f_{5/2}$	$2p_{3/2}$	$2p_{1/2}$
Базисн. состояния $a_{nef}$	Базисн. состоян. $a_{nef}$	Базисн. состоян. $a_{nef}$	Базисн. состоян. $a_{nef}$
$1f_{7/2}$ 0,9922	$1f_{5/2}$ 0,9300	$1p_{3/2}$ -0,3621	$1p_{1/2}$ -0,5873
$2f_{7/2}$ 0,0222	$2f_{5/2}$ 0,1590	$2p_{3/2}$ 0,9599	$2p_{1/2}$ 0,8727
$3f_{7/2}$ 0,0032	$3f_{5/2}$ 0,0427	$3p_{3/2}$ 0,1213	$3p_{1/2}$ 0,1294
$4f_{7/2}$ 0,0015	$4f_{5/2}$ 0,0166	$4p_{3/2}$ 0,0314	$4p_{1/2}$ 0,0493
$5f_{7/2}$ 0,0007	$5f_{5/2}$ 0,0083	$5p_{3/2}$ 0,0131	$5p_{1/2}$ 0,0226
		$6p_{3/2}$ 0,0078	$6p_{1/2}$ 0,0123

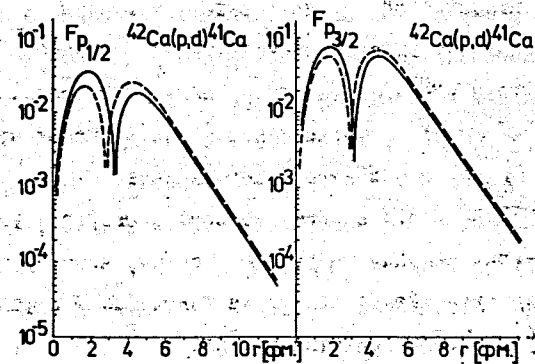
Таблица II.

Коэффициенты разложения  $a_{nef}$  формфакторов  $f_{AK}(r)$  для реакции  $^{42}\text{Ca}(p,d)^{41}\text{Ca}$  по функциям Штурма, вычисленные с учётом проектирующего члена в  $P_{AB}(r)$

$2p_{3/2}$		$2p_{1/2}$	
Базисные состояния	$a_{nef}$	Базисные состояния	$a_{nef}$
$1p_{3/2}$	-0,0851	$1p_{1/2}$	-0,1121
$2p_{3/2}$	0,9575	$2p_{1/2}$	0,9416
$3p_{3/2}$	0,1129	$3p_{1/2}$	0,1285
$4p_{3/2}$	0,0271	$4p_{1/2}$	0,0491
$5p_{3/2}$	0,0106	$5p_{1/2}$	0,0210
$6p_{3/2}$	0,0063	$6p_{1/2}$	0,0117



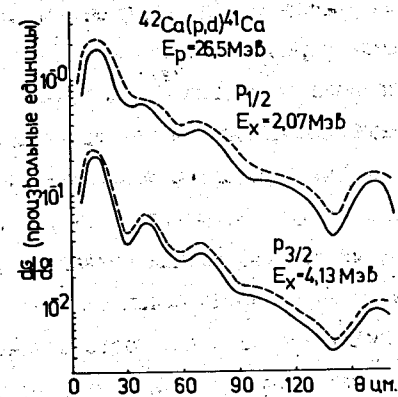
1. Сечения реакции  $^{42}\text{Ca}(p,d)^{41}\text{Ca}$  ( $f_{5/2}$ ), полученные с помощью формфакторов, содержащих разное число членов  $n$  в разложении (I5) (---  $n=1$ , т.е. WDP приближение, - - - -  $n=4$ , —  $n=5$ ). Кривая  $n=5$  полностью совпадает с результатами точного расчёта [2].



2. Формфакторы  $F_{p_{1/2}}$  и  $F_{p_{3/2}}$  для реакции  $^{42}\text{Ca}(p,d)^{41}\text{Ca}$ , сосчитанные с учётом (---) проектирующего члена в  $P_{AK}(r)$  и без него (—).

$^{42}\text{Ca}(p,d)^{41}\text{Ca}$  в зависимости от числа включенных членов  $n$  в разложении формфактора. Как видно из рисунка, в случае DWBA сходимость амплитуды с увеличением  $n$  проявляется наиболее четко, поскольку в этом случае сечение реакции приблизительно пропорционально квадрату коэффициентов  $a_{nelj}$ . В амплитуду реакции входят формфакторы с заданными значениями  $l$  и  $j$ , но с различными  $n$ , поэтому при увеличении  $n$  растет (примерно на 60% для  $l=2$ ) и постепенно выходит на насыщение абсолютное сечение реакции, в то время как угловое распределение почти не меняет своей формы.

Остановимся еще на одной детали, связанной с вычислением правой части уравнения (3а), на которую в приближенных расчетах обычно не обращают внимания, а именно, выясним величину вклада проектирующего члена  $\sqrt{\chi}M/P_{AB}(\tau)$  в формфакторы и сечения реакции. На рис.2 изображены формфакторы  $2p_{1/2}$  и  $2p_{3/2}$ , сосчитанные с учетом проектирующего члена в  $\overline{P}_{AB}(\tau)$  и без него (коэффициенты  $a_{nelj}$  даны в таблице 2). На рис.3 изображены соответствующие угловые распределения реакции  $(p,d)$ . Видно, что учет проектирующего члена существенно влияет на поведение формфактора и на абсолютную величину сечения реакции.



3. Сечения реакции  $^{42}\text{Ca}(p,d)^{41}\text{Ca}(p_2, p_3)$  полученные с помощью формфакторов, сосчитанные с учётом (---) проектирующего члена в  $\overline{P}_{AB}$  и без него (—).

### Заключение

Мы убедились в том, что метод разложения по функциям Штурма является наиболее подходящим для решения приближённых уравнений на формфакторы. Учёт принципа Паули в этих уравнениях оказался важным. Но ещё остаётся под вопросом, не является ли рассмотренный нами пример  $^{42}\text{Ca}$  исключительным случаем, обусловленным большими энергиями связи оболочечного базиса волновой функции основного состояния  $^{42}\text{Ca}$  и малостью эффекта смешивания конфигураций. Наша попытка последовательного вывода приближённых уравнений для формфакторов показывает, что никогда нельзя ручаться за правильную асимптотику их решений. Только анализ на основе решений системы точных связанных уравнений для различных ситуаций (энергий связи и амплитуд примеси различных конфигураций) может внести ясность в указанный вопрос. К сожалению, даже эти точные решения при всей их сложности применимы лишь для объяснения ограниченного круга экспериментальных данных (несколько частиц сверх инертного остова). Тем не менее, целесообразно начать с простого случая двух валентных частиц над остовом, поскольку главные проблемы могут быть изучены и на этой простой модели. Очевидно, главная цель подобных исследований — это выработать определённые критерии применимости различных приближённых методов, которые позволят использовать обширную модельную спектроскопическую информацию для описания экспериментальных данных по реакциям передач.

Авторы признательны профессору В.Г. Соловьёву и сотрудникам его Отдела за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

### Литература:

1. W.T. Pinkston and G.R. Satchler, Nucl. Phys., 72(1965) 641.
  2. R.H. Ibarra and B.F. Bayman, Phys. Rev., C1(1970) 1786.
  3. A. Prakash and N. Austern, Ann. of Phys., 51 (1969) 418.
  4. R.I. Philpot, W.T. Pinkston and G.R. Satchler, Nucl. Phys. A119 (1968), 241; A125 (1969) 176.
  5. M. Igarashi, M. Kawai and Yazaki, Prog. Theor. Phys. 49(1973)825 (см. литературу в ней).
  6. П.Э. Немировский, В.А. Чепурнов. ЯФ, 3, (1966) 998.
  7. E. Rost. Phys. Rev., 154 (1967) 997.
  8. B.L. Andersen, B.B. Back and J.M. Bang. Nucl. Phys., A147 (1970) 33.
- Ф.А. Гареев, С.П. Иванова, Н.Ю. Ширикова. Препринт ОИЯИ Р4-5351, 1970; ТМФ 8, (1971) 97.
9. В.Г. Соловьёв. Теория сложных ядер. "Наука", 1971.
  10. В.Е. Бунаков, Ф.А. Гареев. Препринт ОИЯИ, Р4-6226, (1972).  
V.E. Bunakov, F.A. Gareev. Phys. Lett., 39B(1972)424.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Неоднородные уравнения типа (3) решаются с помощью хорошо известных методов. Для простоты мы будем рассматривать только случай  $\ell = 0$ . Тогда неоднородное уравнение может быть записано как:  $(R(z) = z F'(z))$

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + k^2 - \frac{2mV(z)}{\hbar^2} \right) R(z) = g(z). \quad (\text{A.I})$$

Введем функции Грина

$$G(z, z') = \begin{cases} f_-(z') f_+(z) & z' \geq z \\ f_+(z') f_-(z) & z' \leq z. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Тогда искомое решение можно представить таким образом:

$$R(z) = f_+(z) \int_0^z f_-(z) g(z) dz + f_-(z) \int_z^\infty f_+(z) g(z) dz. \quad (\text{A.3})$$

Функции  $f^+$  и  $f^-$  нормированы так, чтобы вронскиан был равен единице, и удовлетворяют граничным условиям уравнения (A.I) без правой части, т.е.  $f_+(0) = 0$ ,  $f_-(z \rightarrow \infty) = e^{-kz}$ . Поскольку функции  $f^\pm$  ведут себя при  $z \rightarrow 0$  как  $z^{\ell \pm 1}$  и  $z^{-\ell}$ , соответственно,  $R(z)$  является регулярной в точке  $z = 0$ , если  $g(z)$  при  $z \rightarrow 0$  не растет быстрее, чем  $\frac{z}{z^2}$ . Допустим, что правая часть уравнения (A.I) ведет себя соответствующим образом и при  $z > z_0$  мы можем выбрать ее как  $g(z) = g_0 e^{-\alpha z}$ . Тогда, как легко уви-

деть, второй член в правой части (A.3) при больших  $z$  ведет себя как

$$g_0 e^{-kz} \left[ \frac{e^{(k-\alpha)z}}{k-\alpha} \right] z_0$$

В этом случае определяющую роль в асимптотике играет самый маленький коэффициент в показателе экспоненты. Так, для

$$\begin{aligned} \alpha > k & R(z) \sim e^{-kz} & z \rightarrow \infty \\ \alpha < k & R(z) \sim e^{-\alpha z} & z \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Первый тип асимптотики ( $\alpha > k$ ), более часто встречающийся, но, как видно, не единственно возможный. Следует отметить, что, если  $k = k_n^2$ , где  $k_n$  - собственные значения однородного уравнения, неоднородные уравнения имеют решения тогда и только тогда, когда решения соответствующего однородного уравнения ортогональны функциям  $g(z)$ .

ПРИЛОЖЕНИЕ В

В этом приложении мы рассматриваем вопрос о точном асимптотическом поведении формфакторов, являющихся решением системы связанных уравнений. В частности, мы будем исследовать те условия асимптотического поведения, которые определяются энергиями связи.

Снова ограничимся только случаем двух частиц над кором. Решение уравнения Шредингера для этой системы

$$(T_1 + T_2 + V_1(z_1) + V_2(z_2) + V_{12}(|z_1 - z_2|) - E) \Psi_B(z_1, z_2) = 0. \quad (B.1)$$

ищем в виде разложения по собственным состояниям системы А

$$\Psi_B(z_1, z_2) = \int_i F_i(z_2) \Psi_{A_i}(z_1), \quad (B.2)$$

где символ  $\int_i$  означает суммирование по состояниям дискретного и интегрирование по состояниям сплошного спектра.

Подставив (B.2) в (B.1), умножив полученное уравнение на  $\Psi_{A_i}^*(z_1)$  и проинтегрировав по координатам частицы (I), приходим к системе связанных уравнений для формфакторов  $F_i$

$$(T_2 + V_2 - (E - E_j)) F_j(z_2) = - \int_i \langle \Psi_{A_j} | V_{12} | \Psi_{A_i} \rangle F_i(z_2). \quad (B.3)$$

Будем предполагать, что  $V_{12}$  обладает коротким радиусом

действия так, что может быть аппроксимировано  $\delta$ -функцией. Так же, как и в приложении А, будем рассматривать только случай, когда частица (I) находится в  $S$ -состоянии.

Напишем уравнение Шредингера, описывающее состояния системы А

$$(T_1 + V_1 - E_j) \Psi_j(z_1) = 0. \quad (B.4)$$

Рассмотрим сначала случай, когда в разложении (B.2) участвуют только те каналы, в которых обе частицы находятся в связанных состояниях. (В этом случае  $\int_i$  означает только суммирование). Тогда можно попытаться решить уравнение (B.3) при условии, что асимптотическое поведение  $R_i = z F_i(z)$  определяется энергией связи следующим образом:

$$R_i(r) \approx c_i \exp(-\lambda_i r) \quad (r \rightarrow \infty). \quad (B.5)$$

Это значит, что асимптотическая форма уравнения (B.3) имеет вид

$$c_i \left( -\frac{d^2}{dz^2} + \lambda_i^2 \right) \exp(-\lambda_i z) \approx \int_j g_{ij} c_j \exp\{-(\lambda_j + \lambda_j + \lambda_j) z\}, \quad (B.6)$$

где  $g_{ij}$  - есть константа связи, а величина  $\lambda_i$  и  $\lambda_i$  определяется выражениями:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \lambda_i^2 \equiv E_i, \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \lambda_i^2 \equiv (E - E_j) \quad (B.7)$$

$$\lambda_i^2 + \lambda_i^2 = \lambda_j^2 + \lambda_j^2. \quad (B.8)$$

Из приложения А мы знаем, что выражение (В.5) будет асимптотическим решением уравнения (В.3) тогда и только тогда, когда имеет место неравенство:

$$\kappa_i < \lambda_i + \lambda_j + \kappa_j. \quad (\text{В.9})$$

Из (В.8) и из того факта, что обе частицы находятся в связанном состоянии, т.е.  $\lambda_i$  и  $\kappa_i$  являются положительными и действительными, следует, что неравенство (В.9) будет справедливым для всех  $\epsilon_j$ . Когда же мы рассматриваем открытые каналы, все аргументы, приведенные выше, на основе действительных значений  $\kappa_i$  и  $\lambda_i$  более неприменимы.

Из равенства (В.8) может быть показано, что трехтельные каналы, когда  $\kappa_i^2 < 0$  и  $\lambda_i^2 < 0$ , не играют какой-либо роли при вычислении матричных элементов в правой части (В.3) в реакциях однонуклонных передач.

Так, мы должны рассматривать два случая  $\lambda_i^2 > 0, \kappa_i^2 < 0$  и  $\lambda_i^2 < 0, \kappa_i^2 > 0$ . Первый случай соответствует несвязанной компоненте в реакции срыва на нечетном ядре-мишени, но тем не менее, в правой части уравнения (В.3) мы будем проводить суммирование только по состояниям дискретного спектра. Тогда асимптотическое поведение формфактора определяется только левой частью уравнения (В.3), поскольку правая сторона убывает экспоненциально быстрее, чем левая.

Далее, если мы в правую часть подставим указанные значения параметров  $\lambda_i$  и  $\kappa_i$ , то получим крутой экспоненциальный спад, так что вклад ее в асимптотическое поведение будет пренебрежимо мал.

Это легко проверить, исходя из того факта, что  $\lambda_i^2 > 0, \kappa_i^2 > 0, \lambda_j^2 < 0, \kappa_j^2 > 0$ , где  $\kappa_i, \lambda_i$  и  $\lambda_j$  являются действительными и постоянными. Учитывая вышеприведенное, можно записать следующее соотношение:

$$\kappa_i < \lambda_j + \lambda_i \quad (\text{В.10})$$

Этот факт означает, что асимптотическое поведение снова определяется только левой частью уравнения (В.3).

Второй случай  $\lambda_i^2 < 0, \kappa_i^2 > 0$  соответствует несвязанному состоянию, которое возбуждается при реакции подхвата на четном ядре. Включение таких процессов качественно меняет всю картину в целом. В этом случае асимптотику формфактора в общем нельзя определить, исходя только из левой части уравнения (В.3). Причем необходимо учесть, что данные состояния находятся в области непрерывного спектра, и символ  $\int_i$  означает интегрирование.

Далее, заметим, что  $V_{12}$  в правой части уравнения (В.3) можно представить в виде  $\delta$ -функции только в том случае, когда радиус действия сил мал по сравнению с  $(|\lambda_i|)^{-1}$ . Действительно, при больших значениях  $|\lambda_i|$  вклад от сил конечного радиуса пренебрежимо мал. Для малых значений  $|\lambda_i|$  подынтегральное выражение в правой части содержит компенсирующие друг друга осцилляции с длиной волны  $|\lambda_i|$ , которые в асимптотике имеют вид:

$$e^{-\epsilon} \sin (|\lambda_i| \epsilon + \delta(\lambda_i)).$$

Поскольку мы рассматриваем двухчастичную волновую функцию  $\Psi(1,2)$ , где обе частицы находятся в связанном состоянии, мы должны предполагать, что вклад от состояний, когда одна частица находится в несвязанном состоянии, играет относительно малую роль в волновой функции. Это также было показано в вычислениях Баймана и Ибара<sup>12/</sup>. Поэтому волновые функции, полученные подобным путём, мы можем рассматривать как волновые функции в нулевом приближении.

Асимптотика фактора в этом разложении определяется энергией связи для каждой компоненты. В первом порядке мы можем получить компоненты с  $\lambda_i^2 < 0$ , пользуясь теорией возмущений так же, как и в приложении А, имея в виду, что, когда  $\lambda_i$  есть величина мнимая, необходимо включить как  $\exp(i|\lambda_i|z)$ , так и  $\exp(-i|\lambda_i|z)$  в неоднородный член. Теперь получим решения  $R_i$ , содержащие в асимптотике члены с крутым спадом, пропорциональные  $\exp(-\alpha_i z)$  и медленно спадающие пропорционально осциллирующим функциям:  $\sim \sin(|\lambda_i|z + \delta(\lambda_i)) \exp(-(\alpha_j + \lambda_j)z)$ , где  $\alpha_j + \lambda_j$  имеют самые маленькие значения из всей суммы, соответствующей действительным значениям  $\alpha$  и  $\lambda$  в разложении волновой функции в нулевом приближении.

Следующим шагом процедуры является подстановка полученных  $R_i$  в правую часть и исследование их влияния на компоненты связи  $g_{ij}$ . (Термины "связанный" и "несвязанный" относятся к первой частице, в то время как асимптотическое поведение касается только второй частицы).

Мы видим, что независимо от осциллирующего фактора, который стремится уменьшить вклад от этих выражений, асимпто-

тическая форма правой части содержит только экспоненты уже теперь в нулевом порядке.

Это утверждение остается в силе и в приближениях более высокого порядка, когда включение несвязанных состояний ( $\lambda^2 < 0$ ) можно выполнить, рассматривая  $g_{ij}$  как возмущения; асимптотическое поведение связанных компонент ( $\lambda^2 < 0$ ) будет определяться энергией связи.

Рукопись поступила в издательский отдел  
28 августа 1973 года.