

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



7386

Эль. чит. зал

P4 - 7386

В.Н. Ефимов, Г. Шульц

К ВОПРОСУ О ВЕЩЕСТВЕННЫХ  
ФУНКЦИЯХ ВАЙНБЕРГА  
ПРИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЭНЕРГИЯХ

**1973**

ЛАБОРАТОРИЯ  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р4 - 7386

В.Н. Ефимов, Г. Шульц

К ВОПРОСУ О ВЕЩЕСТВЕННЫХ  
ФУНКЦИЯХ ВАЙНБЕРГА  
ПРИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЭНЕРГИЯХ

Научно-техническая  
библиотека  
ОИЯИ

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Для успешного решения ряда задач ядерной физики (в частности, трехчастичных уравнений Фаддеева) возникает необходимость в построении достаточно корректных сепарабельных приближений для двухчастичных  $\hat{t}$ -матриц. Одним из эффективных способов получения таких приближений является использование собственных функций ядра интегрального уравнения Липманна-Вингера, которые впервые были подробно рассмотрены Вайнбергом <sup>/1/</sup>. Эти функции удовлетворяют следующему интегральному уравнению:

$$\lambda_n \psi_n = -g(E) V \psi_n, \quad (1)$$

где  $g(E)$  - двухчастичная функция Грина,  $-V(\varrho)$  - потенциал взаимодействия, для определенности предполагаемый притягивающим для всех  $\varrho$ .

Уравнению (1) можно придать симметричный вид, если ввести новые функции  $\varphi_n$ :

$$\varphi_n = V^{1/2} \psi_n, \quad (2)$$

$$\lambda_n \varphi_n = -V^{1/2} g(E) V^{1/2} \varphi_n. \quad (3)$$

При отрицательных энергиях  $E < 0$  ядро интегрального уравнения (3) вещественно, симметрично и положительно, следовательно, собственные значения  $\lambda_n$  вещественны и положительны, собственные функции  $\varphi_n$  также вещественны и образуют полную ортонормированную систему <sup>/2/</sup>:

$$(\varphi_n, \varphi_{n'}) = \delta_{nn'}. \quad (4)$$

Для положительных энергий  $E > 0$  ядро уравнения (3) комплексно и неэрмитово, однако вместо уравнений (1) и (3) можно рассматривать уравнения с вещественными ядрами:

$$\lambda_n \psi_n = -g_p(E) V \psi_n, \quad (5)$$

$$\lambda_n \varphi_n = -V^{1/2} g_p(E) V^{1/2} \varphi_n, \quad (6)$$

где  $g_p(E)$  — главное значение функции Грина  $g(E)$ .

Уравнение (6) имеет вещественные собственные значения и вещественные собственные функции, удовлетворяющие условию ортонормированности (4). Однако ядро этого уравнения при  $E > 0$  не является знакоопределенным, поэтому собственные значения могут быть знакопеременными. В этом случае полной системой собственных функций уравнения (6) в смысле разложения Гильберта—Шмидта [2] следует считать совокупность функций, соответствующих как положительным, так и отрицательным собственным значениям. Очевидно, что учет этого обстоятельства должен влиять на сходимость разложений по вещественным функциям Вайнберга. Ниже (параграф 2) в качестве примера использования таких функций будет рассмотрен точно решаемый случай, когда потенциал  $V$  является притягивающим потенциалом прямоугольной формы. В параграфе 3 рассматривается более сложный случай — притягивающий потенциал Юкавы. Для этого потенциала в работе [3] были рассмотрены только положительные собственные значения, что привело к плохой сходимости разложения  $K$ -матрицы по вещественным функциям Вайнберга. В действительности, как показано в пп. 2 и 3, такие разложения обладают весьма хорошей сходимостью, если надлежащим образом учитываются как положительные, так и отрицательные собственные значения.

## 2. ПОТЕНЦИАЛ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Рассмотрим притягивающий потенциал прямоугольной формы.

Ограничимся только  $S$ -состоянием и запишем уравнение (5) в дифференциальной форме:

$$u_n'' + [k^2 + \frac{V_0}{\lambda_n}] u_n = 0, \quad z \leq a; \quad u_n'' + k^2 u_n = 0; \quad (7)$$

$$z > a;$$

где  $k^2 = E > 0$ ,  $u_n = z \psi_n$ , причем функции  $u_n$  удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$u_n(0) = 0, \quad u_n(z \rightarrow \infty) \sim \cos kz. \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что собственные функции  $\psi_n$  имеют вид:

$$\psi_n(z) = \frac{A_n}{2} \sin \alpha_n z, \quad z \leq a; \quad \psi_n(z) = \frac{B_n}{2} \cos kz, \quad z > a; \quad (9)$$

где  $A_n, B_n$  — нормировочные константы,  $\alpha_n$  — корни трансцендентного уравнения

$$\frac{1}{\alpha} \operatorname{tg} \alpha a = - \frac{1}{k \operatorname{tg} ka}. \quad (10a)$$

Для того, чтобы определить все собственные значения, необходимо учесть также и мнимые решения  $\alpha = i\gamma$  уравнения (10a):

$$\frac{1}{\gamma} \operatorname{th} \gamma a = - \frac{1}{k \operatorname{tg} ka}. \quad (10b)$$

Собственные значения  $\lambda_n$  связаны с решениями  $\alpha_n, \gamma_n$  уравнений (10a) и (10b) следующими соотношениями:

$$\frac{V_0}{\lambda_n} = \alpha_n^2 - k^2; \quad \frac{V_0}{\lambda_n} = -\gamma_n^2 - k^2.$$

Таким образом, уравнение (10a) определяет как положительные, так и отрицательные собственные значения, тогда как уравнение (10b) — только отрицательные. При  $ka < \pi/2$  имеются только положительные собственные значения. Первое отрицательное собственное значение  $1/\lambda_1 \rightarrow -\infty$  появляется при  $ka = \pi/2$ , затем с увеличением  $k$  следующие отрицательные собственные значения  $1/\lambda_n \rightarrow -\infty$  будут возникать при  $ka = (2n-1)\pi/2$ .

Собственные значения  $\lambda_n$  имеют простой физический смысл. Действительно, из (7) и (8) следует, что  $1/\lambda_n$  является множителем, на который необходимо умножить исходный потенциал  $V(z)$ , чтобы при данной энергии  $E > 0$  для фазы рассеяния  $\delta$  имело место равенство:

$$\delta = \pm (2n-1)\pi/2.$$

В частности, отрицательные собственные значения  $1/\lambda_n \rightarrow -\infty$  трансформируют прямоугольный притягивающий потенциал в отталкивательный твердый кор, для которого  $\delta = -ka$ .\*

Роль отрицательных собственных значений иллюстрируется таблицей I, в которой для прямоугольного потенциала ( $V_0 = 1\varphi^{-2}$  и  $a = 1\varphi$ ) в зависимости от  $n$ , приведены приближенные значения

$$\frac{1}{k} \operatorname{tg} \delta = (K | K_n(E) | K), \quad (\text{II})$$

где  $K_n(E)$  - сумма  $n$  первых слагаемых в разложении  $K$  - матрицы по собственным функциям  $\Psi_n$  (9):

$$K(E) = \sum_n \frac{1}{1 - \lambda_n(E)} V | \Psi_n(E) \rangle \langle \Psi_n(E) | V. \quad (\text{I2})$$

Как видно из таблицы I, вклад отрицательных собственных значений в разложении (I2) весьма значителен и может достигать более половины точного значения суммы. Строка, соответствующая  $n=6$ , показывает существенное влияние на сходимость разложения (I2) отрицательного собственного значения, определяемого единственным корнем уравнения (I0в).

\* В связи с этим отметим следующее любопытное обстоятельство: для построения полной системы вещественных функций Вайнберга при положительных энергиях необходимо рассматривать как бесконечную последовательность все более глубоких притягивающих потенциалов ( $\lambda_n > 0$ ), так и бесконечную последовательность все более высоких отталкивательных потенциалов ( $\lambda_n < 0$ ).

Таблица I. Приближенные значения  $\frac{1}{k} \operatorname{tg} \delta$  в зависимости от

$K(\varphi^{-1})$  для потенциала прямоугольной формы с  $V_0 = 1\varphi^{-2}$  и  $a = 1\varphi$ .

Значения  $n$  указывают число слагаемых в разложении (I2). Для

каждого  $K$  указаны также собственные значения  $\lambda_n$ , полученные при

решении уравнения (I0а) ( $n = I - 5$ ) и уравнения (I0в) ( $n = 6$ ).

В последней строке приведены точные значения  $\frac{1}{k} \operatorname{tg} \delta$ .

K	0,1		1,0		2,0		3,0		4,0		5,0	
	$\frac{1}{k} \operatorname{tg} \delta$	$\lambda_n$	$\frac{1}{k} \operatorname{tg} \delta$	$\lambda_n$	$\frac{1}{k} \operatorname{tg} \delta$	$\lambda_n$	$\frac{1}{k} \operatorname{tg} \delta$	$\lambda_n$	$\frac{1}{k} \operatorname{tg} \delta$	$\lambda_n$	$\frac{1}{k} \operatorname{tg} \delta$	$\lambda_n$
1	0,5497	0,4036	0,3533	0,2637	0,0534	0,0914	0,01474	0,0810	0,01064	-0,1098	0,00479	-0,0721
2	0,5539	0,0450	0,3639	0,0414	0,0572	0,0202	0,01552	0,0193	0,02563	0,0748	0,01472	0,0517
3	0,5545	0,0162	0,3655	0,0157	0,0581	0,0092	0,01568	0,0090	0,02682	0,0185	0,01596	0,0135
4	0,5546	0,0083	0,3660	0,0081	0,0584	0,0053	0,01574	0,0053	0,02713	0,0088	0,01639	0,0067
5	0,5547	0,0050	0,3661	0,0049	0,0585	0,0035	0,01576	0,0035	0,02724	0,0052	0,01661	0,0040
6					0,1494	0,0433	0,05417	-0,1339			0,02095	-0,0032
Точн	0,5547		0,3663		0,1497		0,05421		0,02736		0,02126	

### 3. ПОТЕНЦИАЛ ЮКВЫ.

Рассмотрим более сложный случай потенциала, не имеющего аналитического решения, — потенциал Юквы. Как указывалось выше, для этого потенциала в работе /3/ рассматривалось разложение  $K$ -матрицы по функциям Вайнберга, однако не было получено хорошей сходимости, так как не учитывались отрицательные собственные значения. Задача нахождения собственных функций и собственных значений в работе /3/ была сведена к решению с помощью численного интегрирования некоторого неоднородного интегрального уравнения. Такая процедура, как нам кажется, не вполне подходит для задачи построения системы ортогональных собственных функций. В этом случае удобно использовать весьма простой и эффективный метод приближенной факторизации фурье-образа потенциала, основанный на использовании приближенных гауссовских квадратур:

$$V_{\ell}(p, k) = \int_0^{\infty} z^2 dz j_{\ell}(pz) V(z) j_{\ell}(kz) = \sum_{i=1}^N V_i j_{\ell}(pz_i) j_{\ell}(kz_i), \quad (13)$$

где  $V_i, z_i$  — соответственно веса и узлы гауссовской квадратуры. Заметим, что для потенциала Юквы веса  $V_i$  выражаются аналитически через полиномы Лаггера. Эти же веса можно использовать и для других потенциалов (например, Хюльгена, Саксона-Вудса), выделив из них соответствующий множитель. Сопоставление с точным выражением для фурье-образа триплетного потенциала Юквы показало, что при  $N \sim 30-40$  приближение (13) как для  $\ell=0$ , так и для высших парциальных компонент справедливо с точностью до нескольких процентов в широкой области изменения  $p$  и  $k$  (вплоть до  $3\phi^{-1}$ ).

Подстановка разложения (13) непосредственно в уравнение (5) приводит к приближенному выражению для собственных функций:

$$\Psi_n(p, E) = - \frac{1}{\lambda_n(E)} \frac{1}{E-p^2} \sum_{i=1}^N V_i^{1/2} j_{\ell}(pz_i) C_i^{(n)}(E). \quad (14)$$

Коэффициенты  $C_i^{(n)}(E)$  определяются следующим образом:

$$C_i^{(n)}(E) = \frac{2V_i^{1/2}}{\pi} \int_0^{\infty} p^2 dp j_{\ell}(pz_i) \Psi_n(p, E) \equiv V_i^{1/2} \Psi_n(z_i, E), \quad (15)$$

и удовлетворяют однородной системе линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^N [\lambda_n(E) \delta_{ij} + (V_i V_j)^{1/2} Y_{\ell}(z_i, z_j, E)] C_j^{(n)}(E) = 0, \quad (16)$$

$$\text{где } Y_{\ell}(z, z', E) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} p^2 dp \frac{j_{\ell}(pz) j_{\ell}(pz')}{E-p^2}. \quad (17)$$

— Таким образом, приближение (13) позволяет, согласно (16), свести решение уравнения (5) к задаче определения собственных значений и собственных векторов симметричной вещественной матрицы  $(V_i V_j)^{1/2} Y_{\ell}(z_i, z_j, E)$ . Учитывая ортонормированность собственных векторов  $C_i^{(n)}$  и соотношение (15), непосредственно получаем следующее условие ортонормированности приближенных собственных функций  $\Psi_n$ :

$$\sum_{i=1}^N C_i^{(n)}(E) C_i^{(n')}(E) = \sum_{i=1}^N V_i \Psi_n(z_i, E) \Psi_{n'}(z_i, E) = \delta_{nn'}. \quad (18)$$

В координатном представлении функции  $\Psi_n$ , согласно (14) и (17), имеют вид:

$$\Psi_n(z, E) = - \frac{1}{\lambda_n(E)} \sum_{i=1}^N V_i^{1/2} Y_{\ell}(z, z_i, E) C_i^{(n)}(E). \quad (19)$$

Заметим, что последнее выражение можно получить непосредственно из уравнения (5) в координатном представлении. Однако в этом случае возникает вопрос о законности применения гауссовской квадратуры к функции Грина (17) с бесконечными высшими производными при  $z=z'$ , поэтому рассматриваемый метод требует дополнительного обоснования.

Применение гауссовской квадратуры в приближении (I3) вполне законно и для этого приближения существует оценка <sup>/4/</sup>

$$|V_e(\rho, \kappa) - \sum_{i=1}^N V_i j_e(\rho z_i) j_e(\kappa z_i)| < \varepsilon_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (20)$$

Для отрицательных энергий из условия (20) следует <sup>/5/</sup> сходимость решения (I4), полученного методом приближенной факторизации (I3) ядра интегрального уравнения (5), которое при  $E < 0$  является фредгольмовым. Следовательно, для отрицательных энергий будет сходиться и решение (I9), что оправдывает в этом случае применение гауссовских квадратур в интегральном уравнении (5) в координатном представлении. Ввиду того, что при  $E > 0$  характер сингулярностей высших производных функции Грина такой же, как и при  $E < 0$ , можно считать, что для решения (I9) будет иметь место сходимость и при положительных энергиях.

В качестве иллюстрации изложенного выше метода были рассчитаны собственные значения  $\lambda_n$  и собственные функции  $\psi_n$  для отрицательных энергий в случае потенциала Хюльдена

$$V(z) = V_0 \frac{e^{-\mu z}}{e^{-\mu z} - 1}, \quad (21)$$

который имеет хорошо известное точное решение для  $S$ -состояния. На рис. I для девяти первых собственных значений показаны величины отношений приближенных значений  $\lambda_n^{(N)}(-\gamma^2)$  к точным  $\lambda_n(-\gamma^2)$  соответственно для  $N = 20$  (пунктирные линии) и  $N = 50$  (сплошные линии) при значениях  $\gamma = 0,1; 1; 3\phi^{-1}$ . Из рис. I видно, что для первых собственных значений  $\lambda_n$  ( $n \leq 6$ ) при  $N = 50$  имеет место хорошее совпадение между приближенными  $\lambda_n^{(N)}$  и точными  $\lambda_n$  значениями. В таблице 2 представлены две первые собственные функции, точные  $\psi_n(z, -\gamma^2)$  и приближенные  $\psi_n^{(N)}(z, -\gamma^2)$ , вычисленные при  $\gamma = 1,5 \phi^{-1}$  и  $N = 50$ .

Рис. I. Зависимость от номера  $n$  отношения приближенного значения  $\lambda_n^{(N)}(-\gamma^2)$  к точному значению  $\lambda_n(-\gamma^2)$  для потенциала Хюльдена (21) с параметрами  $V_0 = \phi^{-2}$ ,  $\mu = \phi^{-1}$  для двух значений числа гауссовских узлов:  $N = 50$  (кружки) и  $N = 20$  (крестики). Через точки проведены кривые - сплошные для  $N = 50$  и пунктирные для  $N = 20$ . Цифры около кривых указывают значение  $\gamma$  ( $\phi^{-1}$ ).

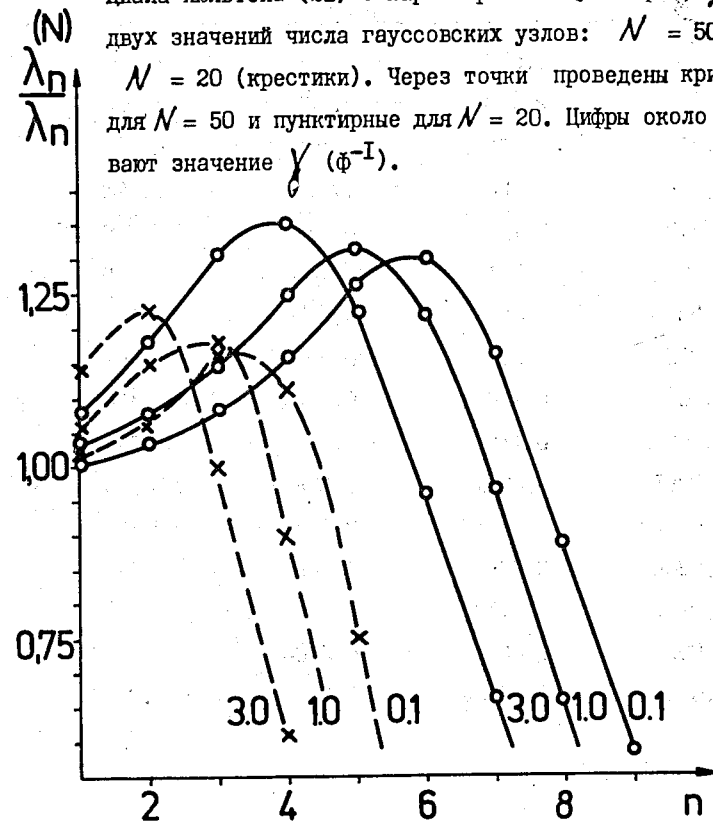


Таблица 2. Значения в зависимости от  $r(\phi)$  двух первых приближенных  $\psi_n^{(N)}(r, \gamma^2)$  (19) и точных  $\psi_n(r, \gamma^2)$  собственных функций для потенциала Хюльгена (21) ( $V_0 = I\phi^{-2}$ ,  $\mu = I\phi^{-1}$ ) при  $N=50$  и  $\gamma = 1,5\phi^{-1}$ .

$r(\phi)$	$\psi_1^{(N)}(r)$	$\psi_1(r)$	$\psi_2^{(N)}(r)$	$\psi_2(r)$
0,1	3,501	3,663	-4,469	-4,896
0,3	2,376	2,463	-0,879	-1,025
0,5	1,550	1,662	0,497	0,561
0,7	1,100	1,125	1,034	1,074
0,9	0,717	0,764	0,972	1,116
1,1	0,509	0,521	0,930	0,976
1,3	0,335	0,356	0,677	0,788
1,5	0,233	0,244	0,544	0,608
1,7	0,160	0,168	0,404	0,456
1,9	0,109	0,116	0,286	0,336
2,1	0,0761	0,0801	0,214	0,244
2,3	0,0529	0,0555	0,155	0,176
2,5	0,0364	0,0386	0,108	0,127
3,0	0,0149	0,0157	0,0471	0,0545
4,0	0,0026	0,0027	0,0084	0,0099
5,0	0,00046	0,00049	0,0015	0,0018

Рассмотрим далее потенциал Юкавы с параметрами, использованными в работе [3]:

$$V(r) = g e^{-\mu r} / r, \quad (22)$$

$$g = 65,246 \text{ мэв.ф}, \quad \mu = 0,6329 \text{ ф}^{-1}$$

На рис.2 показана для  $S$ -состояния зависимость от энергии нескольких первых собственных значений  $\lambda_n^{(N)}(E)$ , вычисленных при  $N = 50$  для положительных ( $E = K^2$ ) и отрицательных ( $E = -\gamma^2$ ) энергий. Заметим, что для потенциала Юкавы, который имеет гладкую радиальную зависимость, отрицательные собственные значения ( $\lambda_n \rightarrow -0$ ), в отличие от прямоугольной ямы, появляются при любой энергии  $E > 0$ , в частности, и при бесконечно малой.

В таблице 3 представлены приближенные значения  $V_n(k, k)$  фурье-образа потенциала (22), полученные при учете  $n$  первых слагаемых в разложении  $V(k, k)$  по собственным функциям  $\psi_n$  (19), найденным при  $N = 50$ :

$$V(k, k) = (j_0 | V | j_0) = \sum_n (j_0 | V | \psi_n)^2. \quad (23)$$

Разложение (23) можно выразить непосредственно через собственные векторы  $c_i^{(N)}$ , определяемые системой уравнений (16):

$$V(k, k) = \sum_n \left( \sum_{i=1}^N v_i^{1/2} j_0(k r_i) c_i^{(N)} \right)^2. \quad (24)$$

Из таблицы 3 видно, что разложение (24) хорошо сходится для всех энергий, если суммирование по  $n$  проводится с учетом условия  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \dots$  и что вклад собственных функций, соответствующих отрицательным собственным значениям, весьма существенен при  $K \geq I\phi$  и заметен даже при меньших энергиях. Учет даже большого числа только одних положительных собственных значений не может обеспечить сходимости разложения (23).



Рис.2. Приближенные собственные значения  $\lambda_n^{(M)}(E)$  для потенциала Яманы (22), вычисленные при  $N = 50$  для положительных ( $E = K^2\phi^{-2}$ ) и отрицательных ( $E = -\int^2\phi^{-2}$ ) энергий.

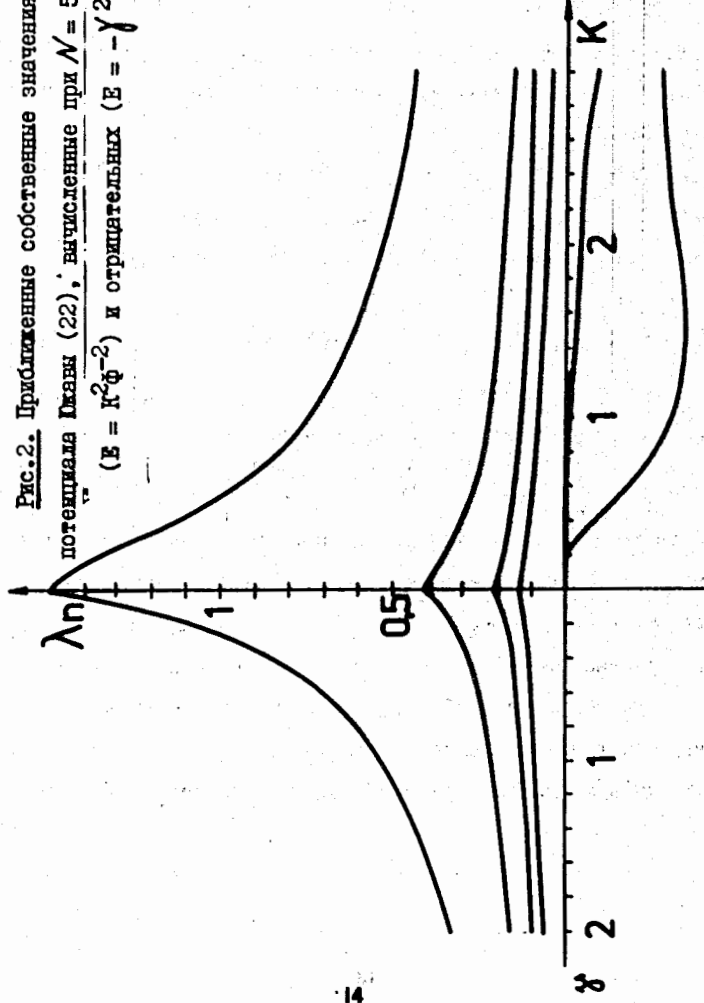


Таблица 3. Приближенные значения  $V_n(K, K)$  Фурье-образа потенциала Яманы (22) в зависимости от числа слагаемых  $n$  в разложении (23) для ряда значений  $K$ . В таблице указаны также первые пять собственных значений  $\lambda_n$  и точное значение  $V(K, K)$  (последняя строка).

$n$	0,1		0,5		1,0		1,5		2,0		2,5	
	$V_n(K, K)$	$\lambda_n$	$V_n(K, K)$	$\lambda_n$	$V_n(K, K)$	$\lambda_n$	$V_n(K, K)$	$\lambda_n$	$V_n(K, K)$	$\lambda_n$	$V_n(K, K)$	$\lambda_n$
1	2,921	1,449	1,161	1,015	0,458	0,751	0,251	0,615	0,161	0,535	0,115	0,465
2	3,360	0,396	1,317	0,288	0,821	-0,309	0,476	-0,341	0,310	-0,323	0,218	-0,307
3	3,499	0,195	1,365	0,154	0,876	0,229	0,505	0,198	0,329	0,189	0,232	0,163
4	3,562	0,126	1,885	-0,146	0,894	0,132	0,515	0,119	0,337	0,110	0,239	0,102
5	3,615	0,086	1,911	0,103	0,907	0,086	0,525	0,073	0,345	-0,036	0,246	-0,041
10	3,734	0,053	1,965		0,941		0,551		0,365		0,263	
Точн.	3,742		1,968		0,942		0,551		0,365		0,261	

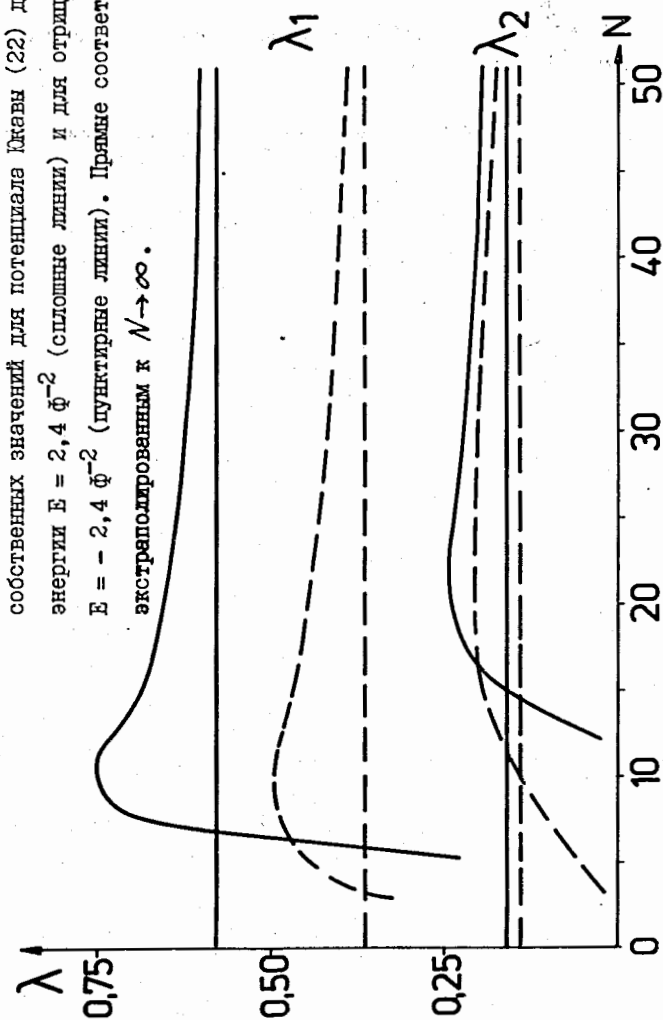
С помощью собственных функций  $\psi_n$  для потенциала Юкавы (22) были найдены также приближенные значения  $S$ -фазы, согласно выражениям (II) и (I2). Эти значения  $S$ -фазы хорошо согласуются со значениями, полученными при численном решении уравнения Шредингера, что вполне понятно, так как для массовой  $K$ -матрицы имеет место разложение, подобное (23) и (24):

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} \operatorname{tg} \delta &= \sum_n \frac{1}{1-\lambda_n} (j_0 V |\psi_n|^2) = \\ &= \sum_n \frac{1}{1-\lambda_n} \left( \sum_{i=1}^N v_i^{1/2} j_0 (k r_{i2}) c_i^{(n)} \right)^2. \end{aligned}$$

В заключение заметим, что для рассмотренного выше метода весьма важным обстоятельством является зависимость результатов от числа гауссовских узлов  $N$  в разложении (I3). На рис.3 показана зависимость от  $N$  двух первых собственных значений для потенциала Юкавы (22), соответственно для положительной энергии  $E = 2,4 \phi^{-2}$  и отрицательной энергии  $E = -2,4 \phi^{-2}$ . Из рис.3 видно, что при небольших значениях  $N$  имеет место резкая и немонотонная зависимость собственных значений от  $N$  и лишь при  $N \sim 20 - 30$  эта зависимость становится плавной. В этой области значений  $N$  приближенные собственные значения хорошо аппроксимируются квадратичным полиномом от  $1/N$ . Из рис.3 видно также, что зависимость собственных значений от  $N$  практически одинакова как для отрицательных, так и для положительных энергий, что может служить оправданием использования приближения (I3) при  $E > 0$ , когда ядро интегрального уравнения (5) (в  $\rho$ -представлении) нефредгольмово.

Авторы выражают благодарность Дж.Бангу, В.Б.Беляеву, В.Е.Бунакову и Ф.А.Гарееву за ряд полезных дискуссий.

Рис.3. Зависимость от числа гауссовских узлов  $N$  двух первых собственных значений для потенциала Юкавы (22) для положительной энергии  $E = 2,4 \phi^{-2}$  (сплошные линии) и для отрицательной энергии  $E = -2,4 \phi^{-2}$  (пунктирные линии). Прямые соответствуют значениям, экстраполированным к  $N \rightarrow \infty$ .



## ЛИТЕРАТУРА

1. S. Weinberg. Phys. Rev., 131, 440 (1963).
2. Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики. Т. I, М.-Л., 1951.
3. T. Sasakawa. Nucl. Phys., A160, 321 (1971).
4. В. И. Крылов. Приближенное вычисление интегралов, Москва, 1959.
5. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. Москва, 1952.

Рукопись поступила в издательский отдел  
2 августа 1973 года.