СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р4 - 7349

В.П.Жигунов, Б.Н.Захарьев, С.А.Ниязгулов,
А.А.Сузько

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ (АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД)

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 7349

В.П.Жигунов, Б.Н.Захарьев, С.А.Ниязгулов,
А.А.Сузько

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ (АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД)

Жигунов В.П., Захарьев Б.Н., Ниязгулов С.А., Сузько А.А. Р4 - 7349

Приближенные методы в обратной задаче рассеяния
(алгебраический подход)

Показано, что в приближении, когда волновая функция строится из базисных элементов Φ_n N-мерного функционального пространства ($\Psi \simeq \Psi^N = \sum_n^N F_n \Phi_n$), обратная задача дает потенциал в виде линейной комбинации тех же функций Φ_n : $V \simeq V^N = \sum_n^N C_n \Phi_n$.
Рассматривается случай рассеяния частицы сферически несимметричным потенциалом.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1973

Р4 - 7349
Zhigunov V.P., Zakhariev B.N., Nijasgulov S.A., Suzko A.A.

Approximate Methods in Inverse Scattering Problems (Algebraic Approach)

In the approximation, when the wave function is constructed with the basic elements Φ_n of N-dimensional function space ($\Psi \simeq \Psi^N = \sum_n^N F_n \Phi_n$), it is shown that the inverse problem solution produces the potential as a linear combination of the same functions Φ_n : $V \simeq V^N = \sum_n^N C_n \Phi_n$. The case of particle scattering by non-spherically symmetric potential is considered.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1973

1. Введение

Одна из задач нерелятивистской квантовой теории заключается в извлечении информации о законах, по которым взаимодействуют частицы, составляющие практически все объекты окружающего нас материального мира.

В настоящее время такая информация получается методом проб и ошибок. Сначала делается некоторое предположение о динамике изучаемой квантовой системы /задается гамильтониан H/. Затем решается соответствующее уравнение Шредингера $(H-E)\Psi \simeq 0$, а вычисленные с помощью волновой функции Ψ наблюдаемые величины сравниваются с их экспериментальными значениями. Если таким образом не достигается удовлетворительное согласие, то выбранные параметры взаимодействия изменяются, и вся процедура повторяется снова, пока результаты теоретических оценок не окажутся достаточно близкими к опытным данным.

Вместе с тем, в теории рассеяний известен более прямой путь определения сил по измеренным величинам, это - обратная задача /см., например, /1/ /. Однако на практике он почти не используется. Этому мешает ряд обстоятельств. Часть из них связана с трудностями фазового анализа /этого вопроса мы здесь касаться не будем/. Другая трудность состоит в том, что в классической постановке в обратной задаче требуется знать матрицу рассеяния при всех значениях энергии, что невозможно, например, просто из-за ограниченности энергетической области, где применимы уравнения нерелятивистской квантовой механики. Следовательно, если мы не хотим выходить за ее рамки, нужно как-то обрывать интегралы по энергии * входящие в теорию. Корректность же такого приближения вызывала серьезные сомнения.

Но оказывается, пригодный для практического использования подход в обратной задаче может быть развит /2/ на основе формализма, близкого к давно и успешно используемому в ядерной /и атомной/ физике аппарату проекционных методов /3/ - методов так называемой единой теории реакций.

Характерным элементом последних является представление волновой функции Ψ приближенно в виде линейной комбинации конечного числа (N) некоторых известных базисных функций Φ_n:

$$\Psi \approx \Psi^N = \sum_n^N F_n^N \Phi_n . \qquad /1/$$

Это соответствует редукции размерности пространства функций, в котором отыскивается Ψ: вместо бесконечномерного пространства, где заведомо расположена Ψ, ограничиваются N-мерным подпространством. При этом для нахождения Ψ^N /т.е. коэффициентов F_n в /1// решается не исходное уравнение Шредингера, а его "проекция" на N-мерное подпространство.

Замечательно, что редукция $\infty \to N$ автоматически /без дополнительных приближений/ влечет за собой сведение спектра системы к N точкам E_λ: не требуется специально отбрасывать состояния с большими E. Экспериментальные данные в E_λ определяют приближенный потенциал, имеющий в рассматриваемом подпространстве, естественно, вид линейной комбинации тех же базисных функций Φ_n

$$V^N = \sum_n^N C_n^N \Phi_n . \qquad /2/$$

Хотя вопрос о сходимости $\Psi^N \underset{N\to\infty}{\to} \Psi$, $V^N \underset{N\to\infty}{\to} V$ является сложным и недостаточно исследованным, накоплен большой практический опыт работы с приближениями типа /1/. Это должно убрать психологический

* Данные рассеяния входят в обратную задачу через фурье-образ от матрицы рассеяния.

барьер, препятствовавший до сих пор широкому внедрению методов обратной задачи в ядерные исследования.

Сначала здесь будет рассмотрен простейший случай одномерной системы двух тел /раздел 2/. В разделе 3 обсуждается более общий пример: рассеяние частицы потенциалом, не обладающим сферической симметрией. Возможным перспективам использования приближенных методов обратной задачи посвящается следующая работа /4/.

2. Одноканальное рассеяния

Для наших целей годятся не всякие разложения Ψ типа /1/, а лишь те, в которых функции Φ_α не зависят от энергии системы /базис не меняется при изменении E/. Можно, например, использовать формализм R-матричной теории /2/.

Будем предполагать, что потенциал $V(r)$, действующий между двумя рассматриваемыми частицами, отличен от нуля в конечной области $0 \le r \le a$.

В качестве N базисных функций можно взять собственные функции W_μ гамильтониана свободного движения

$$H_0 W_\mu \equiv -\frac{h^2}{2M}\frac{d^2}{dr^2} W_\mu = E_\mu W_\mu \qquad /3/$$

с граничными условиями:

$W'_\mu(a) = B/a\, W_\mu(a)$ /как в R-матричной теории/.

В N-мерном пространстве функций, натянутом на W_μ $(\mu = 1,\dots,N)$, уравнение Шредингера с взаимодействием $V^N \approx V(r)$ будет иметь N решений /обобщенных/ U_λ^N:

$$\int_0^a W_\mu \left(-\frac{h^2}{2M}\frac{d^2}{dr^2} U_\lambda^N + V^N(r)\, U_\lambda^N - E_\lambda^N U_\lambda^N\right) dr = 0 . \qquad /4/$$

Функции:

$$U_\lambda^N(r) = \sum_\mu^N B_{\lambda\mu}^N W_\mu(r), \qquad /5/$$

как и W_μ, ортонормированы и образуют новый базис в том же N-мерном пространстве. Матрица *

$$B^N_{\lambda\mu} = V^N_{\lambda\mu} (E^N_\lambda - E_\mu)^{-1};\qquad /6/$$

где $V^N_{\lambda\mu} = \int_0^a U^N_\lambda V^N W_\mu \, dr$,

преобразует решения уравнения Шредингера без потенциала в решения уравнения с взаимодействием и по ней может быть восстановлен потенциал /см. приложение/:

$$V^N(r) = \sum_\mu^N C^N_\mu W_\mu(r).\qquad /7/$$

Это равенство является частным случаем формулы /2/. Для определения же $B^N_{\lambda\mu}$ оказывается достаточно знать $2N$ параметров E_λ $U_\lambda(a)$, которые получаются из экспериментальных данных [2]. Эти параметры следующим образом связаны с R-матрицей /см. /1.10/ в главе 4[5]/:

$$R \simeq R^N(E) = \sum_\lambda^N \frac{U^{N^2}_\lambda(a)}{E^N_\lambda - E}\qquad /8/$$

А $R(E)$, в свою очередь, выражается через логарифмическую производную волновой функции в точке "a" $\frac{\Psi'(a)}{\Psi(a)} \equiv \Re^{-1}$:

$$R(E) = \frac{\Re(E)}{1 - \Re(E)B}\qquad /9/$$

и однозначно связана с матрицей рассеяния S, определяемой при фазовом анализе данных рассеяния:

$$R = \frac{I(a) + S\,O(a)}{I'(a) + SO'(a)},\qquad /10/$$

где $I(a)$, $O(a)$ - значения падающей и уходящей волн в точке "a".

---

* Равенство /6/ получается при подстановке [5] в первое и третье слагаемое в скобках в /4/ с учетом /3/.

3. Многоканальный случай

Как пример многоканальной задачи рассмотрим рассеяние частицы несферическим потенциалом $v(\bar r)$.

В качестве базисных функций возьмем решения уравнения Шредингера без потенциала:

$$\left(-\frac{h^2}{2M}\Delta_{\bar r} - E_\mu\right) W_\mu(\bar r) = 0\qquad /11/$$

с граничными условиями на поверхности $r = a$:

$$\frac{\partial}{\partial r} W_\mu \Big|_{r=a} = 0.\qquad /12/$$

Теперь μ соответствует трем квантовым числам $n\ell m$. В пространстве, натянутом на N базисных функций $W_\mu(\bar r)$, определяем приближенные решения уравнения Шредингера:

$$U^N_\lambda(\bar r) = \sum_\mu^N B^N_{\lambda\mu} W_\mu(\bar r).\qquad /13/$$

Потенциал получается как и в одноканальном случае, только функции v и W_μ теперь зависят от трех переменных /вектора $\bar r$/:

$$V(\bar r) = \sum_{\mu\mu'\lambda} B_{\lambda\mu} B_{\lambda\mu'} (E_\lambda - E_{\mu'}) \int W_{\mu'}(\bar r) d\bar r\, W_\mu(\bar r).\qquad /14/$$

Матрица $B_{\lambda\mu}$ определяется как в [2] по параметрам $U_{\lambda\ell m}(a)$, связанным с R матрицей

$$R_{\ell m \ell' m'}(E) = \sum_\lambda \frac{h^2}{2Ma} \frac{U_{\lambda\ell m}(a) U_{\lambda\ell' m'}(a)}{E_\lambda - E}.\qquad /15/$$

Таким образом, в алгебраическом подходе обобщение обратной задачи на центрально-несимметричный потенциал делается довольно просто. В то время как в обычном формализме Гельфанда-Левитина прямой переход от одномерного к трехмерному случаю встречает определенные трудности /см. решение обратной задачи для $v(\bar{r})'$ в работе Л.Д.Фаддеева /6/ /.

Авторы выражают благодарность И.В.Амирханову, В.М.Барсукову, Я.А.Смородинскому за полезные дискуссии.

Приложение

Элементы матрицы $V^N_{\lambda\mu} = V^N_{\mu\lambda} = \int_0^a U^N_\lambda V^N W_\mu \, dr$ можно рассматривать как фурье-коэффициенты разложения функции $U^N_\lambda V^N$ по базисному набору $\{W_\mu\}$

$$U^N_\lambda(r) V^N(r) = \sum_\mu^N V^N_{\lambda\mu} W_\mu(r). \qquad /\text{П.1}/$$

Эта функция определяет коэффициенты разложения потенциала по ортонормированному набору $\{U^N_\lambda\}$:

$$V(r) = \sum_\lambda \int_0^a u^N_\lambda v^N dr' \cdot u^N_\lambda(r). \qquad /\text{П.2}/$$

Подставляя /П.1/ и /5/ в /П.2/ и учитывая /6/, получаем /7/:

$$V^N(r) = \sum_{\lambda\mu\mu'} B^N_{\lambda\mu} B^N_{\lambda\mu'} (E^N_\lambda - E_{\mu'}) \int_0^a W_{\mu'}(r') dr' \, W_\mu(r) \equiv$$

$$= \sum_\mu^N C^N_\mu W_\mu(r). \qquad /\text{П.3}/$$

Литература

1. З.С.Агранович, В.А.Марченко. Обратная задача рассеяния, Москва, 1963 год.
   Р.Ньютон. Теория рассеяния волн и частиц. "Мир", Москва, 1969 г.
2. J.L.Cook. Austr.J.Phys., 25, No. 2, 167 (1972).
3. В.П.Жигунов, Б.Н.Захарьев. ЭЧАЯ 2, 499 /1971/.
   B.N.Zakhariev. Direct Methods in Scattering Theory. "The Structure of Nuclei". Труды школы физиков, 1971, стр. 149.

4. Б.Н.Захарьев, С.А.Ниязгулов, А.А.Сузько. Сообщение ОИЯИ, Р4-7403, Дубна, 1973.
   Тезисы Международной конференции по ядерной физике, Мюнхен, 1973 г.
5. А.Лейн и Р.Томас. Теория ядерных реакций при низких энергиях. ИЛ, Москва, 1960 г.
6. Л.Д.Фаддеев. Препринт Института теоретической физики, ИТФ-71-106Е, Киев, 1971 г.

Рукопись поступила в издательский отдел 23 июля 1973 года.