ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 7331

И.Берчану, В.К.Игнатович

МОЛЕКУЛЯРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ПО ТРУБАМ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА УЛЬТРАХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ НЕЙТРОННОЙ ФИЗИКИ

P4 - 7331

И.Берчану, В.К.Игнатович

МОЛЕКУЛЯРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ПО ТРУБАМ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА УЛЬТРАХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ

Направлено в журнал Vacuum

Эксперименты с ультрахолодными нейтронами /УХН/ /1/ поставили перед теоретиками задачи, относящиеся не только к области нейтронной физики, но и к области динамики разреженного газа. Одной из таких задач является распространение нейтронов по трубам. Действительно, поскольку нейтроны, обладающие сверхнизкими энергиями, отражаются от стенок при любых углах падения, то их распространение по трубам подчиняется законам молекулярного течения газа. Единственное отличие состоит в том, что отражение от стенок, которое в случае газовых молекул хорошо описывается законом косинуса, т.е. диффузным приближением, в случае УХН может быть частично зеркальным, причем величина зеркальной компоненты определяется шероховатостью отражающей поверхности и сильно зависит от энергии падающего нейтрона и от угла падения.

Настоящая работа посвящена теоретическому анализу и численным расчетам по методу Монте-Карло молекулярного течения УХН по длинным цилиндрическим трубам. Рассмотрено несколько вариантов закона отражения от стенок: чисто диффузное отражение; смешанное диффузно-зеркальное отражение, при котором доля зеркальной компоненты не зависит от угла падения; и "реалистическое" отражение, при котором доля зеркальной компоненты возрастает с увеличением угла падения как $1 - G\cos\theta$, где θ - угол падения, а G - константа, зависящая от энергии нейтрона. Исследование проводится в односкоростном приближении, отражение от стенок считается упругим, а поглощение положено равным нулю.

Первая часть данной работы посвящена законам упругого отражения УХН от стенок. Вторая часть - поискам приближенного аналитического выражения для плотности распределения нейтронов внутри длинной трубы.

В третьей части находятся асимптотические формулы для "сопротивления" труб. В четвертой части - аналитическое выражение для углового распределения УХН, на выходном конце длинного нейтроновода. И в пятой проводится сравнение аналитических формул с результатами численного расчета методом Монте-Карло. В приложении кратко описывается процедура численного расчета.

1. Законы упругого отражения от стенки

Упругое отражение УХН /или молекулы газа/ от стенки описывается функцией $\omega(\Omega_0,\Omega)$, которая определяет вероятность вылета со стенки в направлении телесного угла Ω, при падении на поверхность под углом Ω_0. В соответствии с определением, $\omega(\Omega_0,\Omega)$, при отсутствии поглощения, должна удовлетворять условию нормировки:

$$\int \omega(\Omega_0, \Omega) d\omega = 1. \qquad /1/$$

Поскольку при отражении часть УХН может отражаться в строго зеркальном направлении, то $\omega(\Omega_0,\Omega)$ можно представить в виде

$$\omega(\Omega_0, \Omega) = (1 - g(\Omega_0))\delta(\Omega - \Omega_0) + f(\Omega_0, \Omega), \qquad /2/$$

где $\delta(\Omega - \Omega_0)$ - δ - функция Дирака: $\int \delta(\Omega - \Omega_0) d\Omega = 1$, а $f(\Omega_0,\Omega)$ и $g(\Omega_0)$ связаны друг с другом посредством соотношения /1/. Функция $f(\Omega_0,\Omega)$ не может быть произвольной, а должна быть, исходя из принципа детального равновесия, вида $\phi(\Omega_0,\Omega)\cos\theta$, где $\phi(\Omega_0,\Omega)$ симметрична по своим аргументам.

В случае отражения молекул газа, как следует из работ /2,18/ $g(\Omega_0)$ при всех углах падения близка к единице, поэтому $\phi(\Omega_0,\Omega)=1/\pi$ и выполняется закон косинуса. В случае УХН ситуация несколько иная, ибо отражение УХН подчиняется законам волновой оптики. Если отражающая поверхность идеально ровная, то отражение целиком зеркальное, если же имеются малые шероховатости, то незеркальная часть отражения описывается, согласно /3/, выражением

$$\phi(\Omega_0,\Omega)=\frac{1}{\pi}\sigma^2T^2k^4\cos\theta_0\cos\theta\exp[-\frac{T^2}{4}(k_t-k_{t0})^2], \qquad /3/$$

где σ - высота шероховатостей, T - их средняя ширина, k_{t0} и k_t - проекции на отражающую плоскость волнового вектора, падающего и отраженного нейтрона соответственно. Выражение /3/ слишком сложно, чтобы им пользоваться непосредственно, поэтому мы рассмотрим упрощенный вариант, который соответствует случаю $kT \ll 1$. Таким образом, все последующее изложение будет опираться на закон отражения, представимый в виде

$$\omega(\Omega_0,\Omega) = (1-GA(\Omega_0))\delta(\Omega-\Omega_0)+GcA(\Omega_0)A(\Omega)\cos\theta, \qquad /4/$$

где c определяется из соотношения нормировки /1/, а $A(\Omega)$принимает один из двух видов

$$A(\Omega)=1, \qquad /5/$$

$$A(\Omega)=\cos\theta. \qquad /6/$$

2. Плотность распределения внутри длинной трубы

Молекулярному течению газа через трубы посвящена обширная библиография /см. обзор /2//, однако почти во всех работах принимается предположение о диффузном характере отражения от стенок. В отдельных случаях допускается примесь зеркальной компоненты. Но, или считается, что величина зеркальной компоненты не зависит от угла падения /4/, или такая зависимость вводится без учета требования детального баланса [5]. Наиболее успешным оказался подход Клаузинга [6]. В нем записывается интегральное уравнение непосредственно для вероятности вылета из трубы, которое затем решается тем или иным приближенным методом. В дальнейшем результаты Клаузинга неоднократно проверялись и уточнялись [1,7–11].

В настоящей работе мы будем пользоваться методом, близким к методу Смолуховского [12], т.е. искать плотность распределения УХН внутри трубы $f(z,\vec{r},\vec{\Omega})$, где z - координата вдоль оси трубы $(0 \le z \le L)$, $\vec{r}=(x,y)$, а $\vec{\Omega}$ - вектор скорости, который в односкоростной задаче можно положить равным единичному. Поскольку в молекулярном потоке УХН столкновения между частицами отсутствуют, то функция $f(z,\vec{r},\vec{\Omega})$ определяется плотностью распределения у стенок. Обозначим $f_+(z,\vec{\Omega})$ плотность распределения нейтронов, падающих на стенку трубы, а $f_-(z,\Omega)$ - плотность распределения нейтронов, вылетающих со стенки. Для функции $f_+(z,\vec{\Omega})$ можно записать следующее уравнение

$$f_+(z,\Omega)=f_-(z',\Omega)=\int f_+(z',\Omega_0)\omega(\Omega_0,\Omega)\frac{\cos\theta_0}{\cos\theta}\,d\Omega_0, \qquad /7/$$

где z' - точка на стенке трубы, расположенная от z в направлении $\vec{\Omega}$, т.е. $z-z'\approx\zeta_1(\vec{\Omega})$ полностью определяется геометрией. Подстановка /4/ в /7/ приводит последнее к разностно-интегральному уравнению, которое нетрудно привести к интегральному со сложным ядром, или приближенного заменить интегро-дифференциальным

$$\frac{\zeta_1(\vec{\Omega})}{GA(\Omega)}\,\frac{d f_+(z,\vec{\Omega})}{dz}=f(z,\vec{\Omega})+\rho(z),\quad \rho(z)=\int f_+(z,\vec{\Omega})cA(\Omega)\cos\theta\,d\Omega \qquad /8/$$

и, в свою очередь, привести к интегральному виду

$$
f_+(z,\vec{\Omega}) \begin{cases} f_0(\Omega)e^{-\gamma(\Omega)z} + \gamma\int\limits_0^z e^{-\gamma(\Omega)(z-z')}\rho(z')dz', & \gamma(\Omega)>0, \\ \gamma\int\limits_L^z e^{-\gamma(\Omega)(z-z')}\rho(z')dz', & \gamma(\Omega)<0, \end{cases}
$$

где $\gamma(\Omega) = GA(\Omega)/\zeta_1(\Omega)$, а $f_0(\Omega)$- распределение падающих нейтронов у входного отверстия. Последнее уравнение легко решить в линейном по z приближении, $\rho(z)=a+bz$, которое справедливо вдали от концов и для тех углов Ω, для которых $\gamma(\Omega)z \gg 1$ или $\gamma(\Omega)(z-L) \gg 1$. Соответствующее решение имеет вид

$$
f_+(z,\vec{\Omega}) = a+bz-\frac{b}{\gamma(\Omega)} = \rho(z) - \frac{1}{\gamma(\Omega)}\frac{d\rho(z)}{dz}. \qquad /10/
$$

Зная $f_+(z,\vec{\Omega})$, легко находим в том же дифференциальном приближении

$$
f(z,r,\Omega) = f_-(z',\Omega) = a+bz-b[(1-GA(\Omega))\frac{\zeta_1(\Omega)}{GA(\Omega)} + \zeta_2(r,\Omega)] =
$$

$$
= \rho(z) - \psi(r,\Omega)\frac{d\rho(z)}{dz}, \qquad /11/
$$

где $\zeta_2(\vec{r},\Omega) = z - z'$.

Функция $\psi(\vec{r},\Omega)$ в случае цилиндрической трубы имеет вид

$$
\psi(\vec{r},\Omega_z) = [\frac{2-GA(\Omega_z)}{GA(\Omega_z)}\sqrt{1-r^2\sin^2\phi_z} + r\cos\phi_z]\mathrm{ctg}\,\theta_z, \qquad /12/
$$

где радиус R трубы полагается равным единице, а углы Ω снабжены индексом z, который указывает, что они определены в системе координат с полярной осью вдоль оси трубы / ϕ_z отсчитывается от направления $\vec{r}$ /.

3. *Сопротивление нейтроновода*

Коэффициент передачи нейтроновода определяется отношением прошедшего потока I к падающему I_0

$$W = \frac{I}{I_0}.$$

Прошедший поток I выражается через плотность распределения

$$I = \int f(\vec{r}, z, \Omega_z)\cos\theta_z\, d\Omega_z d^2r = -4\pi^2 D\,\frac{d\rho(z)}{dz}, \qquad /13/$$

где

$$D = \frac{l}{4\pi^2}\int \psi(\vec{r}, \Omega_z)\cos\theta_z\, d\Omega_z d^2\vec{r}. \qquad /14/$$

Выражение /13/, вообще говоря, справедливо только для сечений внутри трубы, достаточно удаленных от краев. Однако вследствие непрерывности потока оно должно оставаться справедливым и на концах трубы. Последнее накладывает два условия на коэффициенты a и b и определяет их однозначно. В связи с определением коэффициента D, который по смыслу выражения /13/ является коэффициентом диффузии, следует отметить следующее: нетрудно убедиться, что при $A(\Omega_R) = 1$ /индекс R указывает, что углы определены в системе координат с полярной осью, *направленной вдоль нормали* R – к данному участку поверхности/, коэффициент совпадает с общепринятым значением $D = \frac{2}{3}\frac{2-G}{G}$, с другой стороны, при $A(\Omega_R) = \cos\theta_R$, непосредственное вычисление по формуле /13/ с $\psi(\vec{r}, \Omega_z)$, выраженным с помощью /12/, дает бессмысленное расходящееся выражение. Расходимость возникает при тех углах Ω, при которых нарушается условие $\gamma(\Omega_z)L \gg 1$ при интегрировании у выходного отверстия. Однако при этих углах Ω_z выражение /10/ уже не является хорошим решением и должно быть заменено иным, а именно, вместо коэффициента $\frac{1}{\gamma(\Omega)}$ перед $\frac{d\rho(z)}{dz}$ должен стоять коэффициент $(1-e^{-\gamma(\Omega)L})\frac{1}{\gamma(\Omega)}$, который и ликвидирует расходимость /заметим, что при $\gamma(\Omega)L \gg 1$ экспонентой в скобках можно пренебречь. Подобная замена эквивалентна введению обрезания при значениях $\theta_z \approx \sqrt{2/LG}$ /напоминаем, что труба считается достаточно длинной, т.е. $\sqrt{2/LG}$ - мало/. Учитывая сказанное, при $A(\Omega_R)=\cos\theta_R$ получаем

$$D = \frac{2}{G}\,[\,\ln(\sqrt{2LG}) - 1 - G/3\,]\,.$$

Определяя коэффициенты a и b из непрерывности потока на обоих концах трубы, получим коэффициент передачи нейтроновода в виде

$$W = \frac{1}{1 + L/4D}\,. \tag{15}$$

Введем понятие "сопротивление трубы" $R_T = 1/W - 1 = L/4D$. Это понятие вводится потому, что есть надежда выразить коэффициент передачи сложной системы труб через сопротивления отдельных участков /13/ аналогично тому, как это делается в электрических цепях. Сопротивление R_T при $A(\Omega_R)=1$ принимает значение $R_T = \frac{3}{8}\,\frac{LG}{2-G}$, а при $A(\Omega_R)=\cos\theta_R$ - значение $\frac{1}{8}LG/\ln(\sqrt{2LG}\,e^{-G/3-1})$. Последнее выражение имеет смысл только при $x = \sqrt{2LG}\,e^{-G/3-1} > 1$. Удобнее переписать его в таком виде, чтобы оно имело смысл при всех значениях x, а при $x \gg 1$ тождественно переходило в выше написанное. Таким выражением может служить $R_T = \frac{LG}{\ln(1+x)}$. Полученные формулы хорошо согласуются с численными расчетами по методу Монте-Карло в области $LG > 4$. Согласие получается еще лучше, если коэффициент 1/8 в обоих выражениях заменить на

1/7 и 2/15 - соответственно. /Этот факт есть следствие отклонение $f(\vec{r}, z, \Omega)$ от линейной зависимости/. В результате окончательно получаем:

$$R = \frac{3}{7}\,\frac{LG}{2-G}\,, \qquad /16/$$

$$R_T = \frac{2}{15}\,\frac{LG}{\ln\left(1+\sqrt{2LG}\,e^{-G/3-1}\right)}\,. \qquad /17/$$

Однако и при такой замене согласие ухудшается при уменьшении LG. Это естественно, поскольку /16/ и /17/ дают неправильное асимптотическое поведение сопротивлений при $LG \to 0$. Нетрудно показать, что в этом пределе $R_I \to \frac{LG}{7}$ при $A(\Omega_R) = 1$ и $R_T \to LG/3$ при $A(\Omega_R) = \cos\theta_R$.

4. *Асимптотические угловые распределения*

Замечено, что длинные трубы оказывают формирующее действие на молекулярный пучок [8,14–16]. Это формирование имеет двоякий смысл: во-первых, длинная труба является коллиматором и по мере увеличения длины пропускает все более узко распределенную часть первичного потока; однако имеется и другой механизм, который приводит к тому, что продиффундировавшие через трубу молекулы тоже имеют вытянутое вдоль оси распределение. Совершенно очевидно, что в случае длинных труб интенсивность продиффундировавших молекул гораздо больше интенсивности молекул, дошедших из прямого пучка без соударения со стенками, ибо первая падает с увеличением длины как $1/L$, тогда как вторая как $1/L^2$. Поэтому в дальнейшем, говоря об угловом распределении, мы будем иметь в виду продиффундировавшую часть потока.

На формирование пучка влияет не только длина трубы, но и характер отражения от стенок. Ниже приводятся формулы для проинтегрированного по сечению и отнормированного на единицу углового распределения потока, определенного с помощью выходного отверстия при больших длинах труб, когда прямым прошедшим пучком можно пренебречь, а сопротивление трубы хорошо описывается асимптотическими формулами /16/ и /17/.

Коэффициенты a и b, входящие в выражение /11/, находятся из условия непрерывности потока, как было указано выше:

$$a=(I_0/\pi^2)(R_T+1/2)/(R_T+1),\ b=(I_0/\pi^2)R_T/(R_T+1)$$

Угловое распределение удобно представлять в виде функции

$$f(\theta_z)=\frac{1}{I}\cdot\frac{dI(\Omega_z)}{d\cos^2\theta_z}.$$

При этом оказывается, что

$$f(\theta_z)=\frac{1}{2}(1+\frac{2}{\pi}\operatorname{ctg}\theta_z),\qquad A(\Omega_R)=1, \qquad /18/$$

$$f(\theta_z)_\omega=\frac{1}{2}[1+\frac{4R_T}{LG}(1-\frac{4G\sin\theta_z}{3\pi})\frac{\operatorname{ctg}\theta_z}{\sin\theta_z}],\ A(\Omega_R)=\cos\theta_R. \qquad /19/$$

По поводу формулы /18/ интересно отметить, что она дает угловое распределение, не зависящее от LG при достаточно больших LG, т.е. форма пучка в асимптотической области оказывается неизменной. С другой стороны, согласно выражению /19/, предельное распределение никогда не достигается. С увеличением LG половина нейтронов концентрируется все ближе к углу θ_z 0. /Необходимо отметить, что расходимости в формуле /19/ нет, поскольку при углах $\theta_z \simeq \sqrt{2/LG}$, как было указано ранее, необходимо делать обрезание/.

5. Сравнение с численными расчетами по методу Монте-Карло

В литературе насчитывается много работ по расчету молекулярного течения газа методом Монте-Карло /5,17–20/. Однако они относятся лишь к диффузному закону отражения и к небольшим длинам труб /относительно работы /5/, в которой вводится зеркальная компонента в отражении, см. замечание в пункте 2/. В настоящей работе расчеты проводились для законов отражения $A(\Omega_R) = 1$ и $A(\Omega_R) = \cos\theta_R$ при G = 1; 0,5; 0,25; 0,125; и длинах труб L = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Рассчитывались: вероятности выхода W_{MK}, их статистические ошибки DW_{MK} по методу /16/, распределение выходящих нейтронов по радиусу и углу. В таблице представлены результаты расчетов по методу Монте-Карло W_{MK}, DW_{MK} и по формулам /16/ и /17/ W_R. Эти же величины представлены на рис. 1 вверху.

На рис. 1 представлена зависимость от L вероятности выхода из трубы, перегороженной на конце диафрагмой с различными радиусами R_g отверстия. Пунктиром показана зависимость при одном из радиусов диафрагмы, найденная, согласно /13/, по формуле $W = 1/(R_1 + R_0 + 1)$, где $R_1 = 1/W_{MK} - 1$, $R_0 = \left(\frac{R}{R_g}\right)^2 - 1$, а W_{MK} берется из таблицы 1. Хорошее совпадение двух кривых показывает, что распределение выходящих нейтронов равномерно по радиусу. Непосредственные расчеты по методу Монте-Карло показывают, что распределения действительно равномерны при любых длинах L / только при чистом диффузном отражении замечена небольшая концентрация вблизи $\theta_z \approx 0°$ /. Таблицы этого распределения здесь не приводятся. На рис. 2 и 3 приведены угловые распределения выходящих нейтронов. Пунктирная гистограмма соответствует L = 1, пунктирная кривая соответствует угловым распределениям, найденным для L = 64 по формулам /18/ и /19/. Рис. 2 относится к случаю $A(\Omega_R) = 1$, причем видно, что предельное распределение наступает уже при $LG \sim 4$. Рис. 3 относится к случаю $A(\Omega_R) = \cos\theta_R$, причем видно, что предельное распределение не достигается.

Следует отметить, что для чисто диффузного рассеяния, ($A(\Omega_R) = 1$ и $G = 1$) результаты, полученные по методу Монте-Карло, совпадают с результатами других авторов /5,1/.

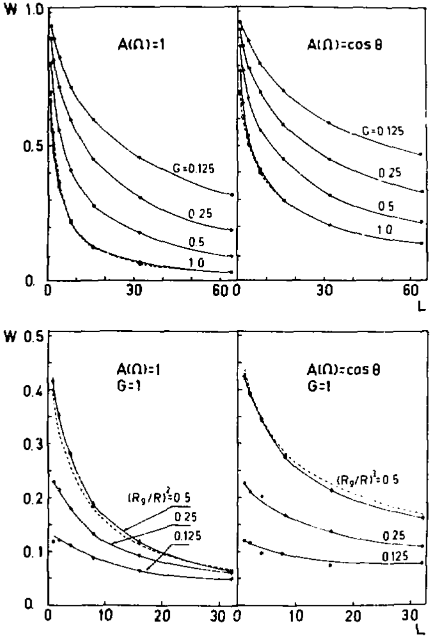

Рис. 1. Зависимость вероятности выхода нейтронов от длины трубы при изотропном падении на входное отверстие. Сплошные кривые соответствуют расчету методом Монте-Карло. Вверху расчеты производились при полностью открытом выходном отверстии. Пунктирные кривые со светлыми точками рассчитывались по асимптотическим формулам /16,17/. /Приведены только для G= 1/. Внизу расчеты относятся к случаю, когда выходное отверстие перегорожено диафрагмой с радиусом R_g. Пунктиром приведены кривые, вычисленные, исходя из предположения, что сопротивление трубы с диафрагмой складывается из сопротивления трубы без диафрагмы и сопротивления диафрагмы.

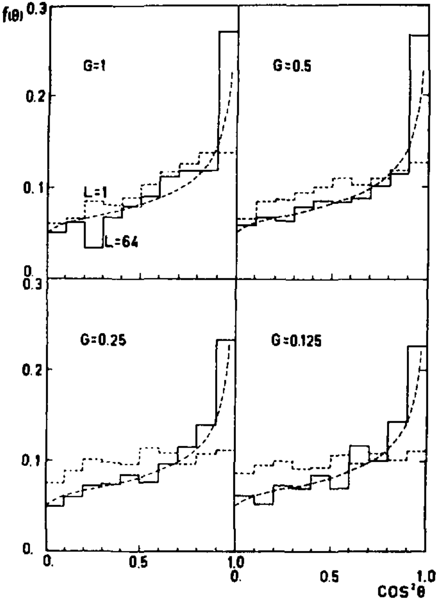

Рис. 2. Угловое распределение УХН на выходе нейтроновода при $A(\Omega_{R}) = 1$. θ - угол вылета УХН с осью нейтроновода. Пунктирная гистограмма относится к L = 1, сплошная - к L = 64. Пунктирная кривая - предельное распределение, рассчитанное по асимптотической формуле /18/.

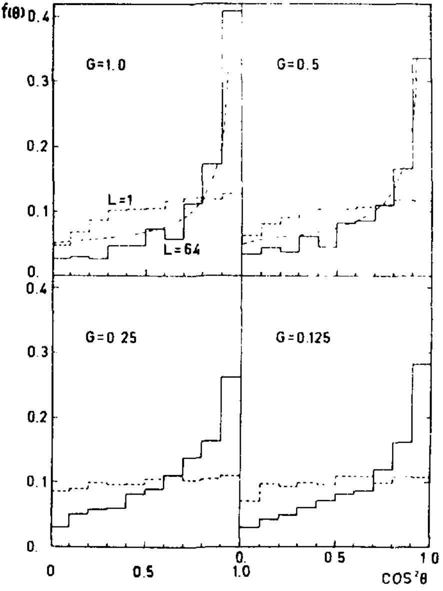

Рис. 3. Угловое распределение УХН на выходе нейтроновода при $A(\Omega_R) = \cos\theta_R$, θ - угол вылета УХН с осью нейтроновода. Пунктирная гистограмма относится к L = 1, сплошная - к L = 64. Пунктирные кривые - угловое распределение, рассчитанное по асимптотической формуле /19/.

6. Заключение

Метод Монте-Карло позволяет рассчитать прохождение УХН через сколь угодно сложную систему с заданными параметрами. Однако было бы желательно иметь формулы, которые позволяли бы оценить величину потока и угловое распределение УХН на выходе при любых параметрах системы без громоздких расчетов.

Исследования, проведенные в настоящей работе, дают возможность оценить как сами искомые величины, так и допускаемые в этих оценках ошибки.

Настоящая работа проводилась по инициативе и при содействии Ф.Л.Шапиро.

Авторы также благодарны В.И.Лущикову, А.В.Стрелкову и В.Н.Покотиловскому за интерес к работе и полезные обсуждения.

Приложение

В расчетах методом Монте-Карло начальное направление выбиралось из равномерного распределения * по $\cos^2\theta_z$ и ϕ_z, а начальная точка $re^{i\phi_0}$ вылета выбиралась из равномерного распределения по r^2 и ϕ_0. Углы отражения разыгрывались аналогичным образом, т.е. равномерно по ϕ_R и равномерно по $\cos^2\theta_R$, если $A(\Omega_R) = 1$, или по $\cos^3\theta_R$, если $A(\Omega_R)=\cos\theta_R$ /естественно, что предварительно производилась проверка на возможность зеркального отражения/. Траектория нейтрона прослеживалась методом комплексной арифметики, т.е. движение нейтрона разлагалось на две составляющие: одна - вдоль оси, другая - вращение в плоскости перпендикулярного сечения. Если обозначить положение точки соударения со стенкой в плоскости перпендикулярного сечения через $\rho(\psi) = e^{i\psi}$ /заметим, что величину радиуса трубы из соображения подобия, как показано в основном тексте,

---

* Расчеты производились на ЭВМ БЭСМ-6. Источником случайных равномерных чисел в интервале /0,1/ служила подпрограмма функция RNDM(x) из библиотеки стандартных программ.

можно положить равной единице, а оси координат в сечении выбрать произвольным образом, то после соударения вектор $\rho(\varphi_2)$ станет равным $\rho(\varphi_2) = e(\varphi_1) R^{i\psi}$, где

$$e(\varphi_1) = -e^{-2i\varphi_1} \cdot e^{i\psi_1} = (-\cos\theta_R + i\sin\theta_R \sin\varphi_R) \sqrt{1-\sin^2\theta_R \cos^2\varphi_R}$$

;

а θ_R и φ_R - разыгранные углы вылета относительно нормали в точке соударения. Продвижение вдоль оси определяется формулой:

$$\Delta z = 2\,\frac{\sin\theta_R \cos\theta_R \cos\varphi_R}{1-\sin^2\theta_R \cos^2\varphi_R} \qquad /2/$$

Первая точка соударения со стенкой для нейтрона, вылетевшего из точки $r e^{i\varphi_0}$, $z=0$ в направлении θ_z, φ_z, считалась по формулам

$$z_1 = \left(\sqrt{1-r^2\sin^2\varphi_z} - r\cos\varphi_z\right) \mathrm{ctg}\,\theta_z \,, \qquad /3/$$

угол падения на стенку и положение комплексного $\rho(\varphi_1)$ - по формулам:

$$\cos\theta_R = \sqrt{1-r^2\sin^2\varphi_z}\,\sin\theta_z$$

$$\rho(\varphi_1) = e^{i\varphi_0}\left[r + \left(\sqrt{1-r^2\sin^2\varphi_z} - r\cos\varphi_z\right) e^{i\varphi_z}\right]. \qquad /4/$$

История нейтрона считалась законченной, если координата очередного столкновения оказалась больше L или меньше 0. Координата r вылета в угол θ_z вычислялась по формулам:

$$r = \left| e^{i\psi} + (L-z)\, e^{i\psi_1} \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta_R\cos^2\varphi_R}}{\sin\theta_R\cos\varphi_R} \right| \qquad /5/$$

$$\cos\theta_z = \sin\theta_R \cos\varphi_R \,,$$

где z, ψ - координаты предыдущего столкновения, а ψ_1, θ_H, ϕ_H - углы вылета со стенки /определение ψ_1 см.в /1//.

Литература

1. Л.В.Грошев, В.Н.Дворецкий, А.М.Демидов, В.И.Лущиков, Ю.Н.Панин, Ю.Н.Покотиловский, А.В.Стрелков, Ф.Л.Шапиро. Препринт ОИЯИ, Р3-5392, Дубна, 1970. Phys.Lett. 34B, 293 (1971).
2. W.Steckelmacher. Vacuum, 16, 561 (1966).
3. A.Steyerl. Z.Phys., 254, 169 (1972).
   В.К.Игнатович. Сообщение ОИЯИ, Р4-7055, Дубна, 1973.
4. W.C.DeMarcus. Advances in Applied Mechanics, Supplement Rarefield Gas Dynamics (Ed. by L.Talbot), p. 161, Acad.Press. Inc., New York, 1961.
5. J.W.Ward, R.L.Bivins, M.V.Fraser. J.Vac.Sci.Technol., 7, 206 (1970).
6. P.Clausing. Ann.Phys., 12, 961 (1932); J.Vac.Sci.Technol., 8, 636 (1971).
7. W.C.DeMarcus, E.H.Hopper. J.Chem.Phys., 23, 1344 (1955).
8. Б.С.Иванов, В.С.Троицкий. ЖТФ, 33, 494 /1963/.
9. A.S.Berman. J.Appl.Phys., 36, 3356 (1965).
10. J.H.Helmer. J.Vac.Sci.Technol., 4, 360 (1967).
11. И.Г.Неудачин, Б.Т.Породнов, П.Е.Суетин. ЖТФ, 42, 1069 /1972/.
12. M.Smoluchowski. Ann.Phys., 33, 1599 (1910)
13. L.Fustos, G.Toth. J.Vac.Sci.Technol., 9, 1214 (1972).
14. B.B.Dayton. Nat.Symp.Vac.Technol.Trans., Chicago, 1956.
15. J.A.Giordmaine, T.C.Wang. J.Appl.Phys., 31, 463 (1963).
16. P.Zugenmaier. Zeit.Angew.Phys., 20, 184 (1966).
17. D.H.Davis. J.Appl.Phys., 31, 1169 (1960).
18. L.L.Levenson, N.Milleron, D.H.Davis. Le Vide, 103, 42 (1963).
19. L.L.Levenson, N.Milleron, D.H.Davis. J.Appl.Phys., 35, 529 (1965).
20. L.L.Levenson, N.Milleron, D.H.Davis. Trans. 7th Nat.Symp. Vac. Technol., Cleveland, Ohio, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел 16 июля 1973 года.

A(n)	L	G=1.			G=0.[illegible]			G=0.25			G=0.125		
		W_{MK}	DW_{MK}	W_B	W_{MK}	DW_{MK}	W_B	W_{MK}	DW_{MK}	W_B	W_{MK}	DW_{MK}	W_B
	1	0.671	0.007	0.700	0.812	0.005	0.875	0.898	0.004	0.942	0.946	0.003	0.97[illegible]
	2	0.514	0.007	0.538	0.699	0.007	0.778	0.821	0.005	0.891	0.900	0.004	0.946
	4	0.350	0.007	0.368	0.559	0.007	0.636	0.724	0.006	0.803	0.832	0.005	0.897
1	8	0.220	0.00[illegible]	0.226	0.415	0.007	0.467	0.597	0.007	0.671	0.724	0.006	0.814
	16	0.130	0.005	0.1[illegible]7	0.282	0.006	0.304	0.446	[illegible]	0.505	0.602	0.007	0.6[illegible]
	32	0.072	0.004	0.068	0.177	0.005	0.179	0.306	0.007	0.338	0.460	0.007	0.[illegible]
	64	0.035	0.003	0.035	0.103	0.004	0.099	0.195	0.006	0.203	0.322	0.007	0.354
	1	0.[illegible]77	0.006	0.704	0.869	0.005	0.803	0.926	0.004	0.8[illegible]	0.962	0.003	0.[illegible]
	2	0.[illegible]64	0.007	0.614	0.783	0.006	0.732	0.874	0.005	0.8[illegible]4	0.931	0.004	0.870
	4	[illegible]58	[illegible]	0.511	0.680	0.007	0.645	[illegible]	[illegible]	0.746	0.886	0.004	0.81[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.564	0.007	0.542	[illegible]	0.007	0.660	0.811	0.005	0.752
	[illegible]	0.294	0.006	0.300	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]557	0.712	0.006	[illegible]
	32	0.20[illegible]	[illegible]	[illegible]10	[illegible]24	[illegible]007	[illegible]323	[illegible]449	[illegible]	0.44[illegible]	[illegible]4	[illegible]007	[illegible]
	64	[illegible]	[illegible]	[illegible]139	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]