ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 7144

Р.В.Джолос, Ф.Дэнау, Д.Янсен

ПОСТРОЕНИЕ КОЛЛЕКТИВНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА В МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЯДРА

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 7144

Р.В.Джолос, Ф.Дэнау, Д.Янсен

ПОСТРОЕНИЕ КОЛЛЕКТИВНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА В МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЯДРА

Направлено в ТМФ

Введение

Теоретическое изучение низколежащих ядерных состояний является серьезной проблемой. Экспериментальные данные говорят о том, что разделение ядер на сферические и деформированные с характерными для каждого типа коллективными возбуждениями часто оказывается условным. Однако всегда можно выделить последовательность коллективных состояний данного ядра, отличающихся лишь значениями некоторых квантовых чисел и связанных большими матричными элементами матрицы плотности /1/. Выделенные таким образом состояния описываются малым числом степеней свободы, что используется в различных феноменологических моделях.

Низколежащие состояния в средних и тяжелых ядрах принадлежат коллективной квадрупольной ветви возбуждений, которая в феноменологических моделях описывается пятью коллективными координатами $a_{2\mu}$ / μ =0, ± 1, ± 2/ и пятью импульсами $\pi_{2\mu}$ /2/. Конечно, для описания отдельных экспериментальных фактов, таких как β-распад, M1-переходы, может стать важным учет связи различных степеней свободы ядра. Но основные характеристики низколежащих уровней: энергии, квадрупольные моменты, быстрые $E2$ -переходы, безусловно, связаны с квадрупольными колебаниями среднего поля ядра. Для описания таких колебаний в феноменологических моделях строится коллективный гамильтониан

$$H_{колл} = T(\pi, a) + V(a),$$

где T - кинетическая /3а/, а V - потенциальная энергия /3b/ колебаний.

Существует много работ /3ь/, где в различных приближениях, используя имеющуюся информацию об уровнях среднего поля ядра, вычисляли потенциальную энергию V. Результаты таких расчетов имеют большую ценность, поскольку дают общее представление о форме среднего поля ядра, однако их недостаточно для полного динамического описания. Попытки построения $H_{колл}$ делались в рамках метода бозонного разложения фермионных операторов /4/. Но они не были успешными, поскольку, как выяснилось /5/, такие бозонные разложения плохо сходятся. В /6/ был разработан метод построения конечных бозонных представлений фермионных операторов. Он оказался весьма эффективным при описании парных вибраций /7/. Но при использовании его для построения $H_{колл}$, описывающего квадрупольные колебания, структура которых намного сложнее, чем структура парных вибраций, встретились серьезные трудности при вычислении параметров гамильтониана на основе тех или иных остаточных сил.

В данной работе будет развит метод, который позволит построить $H_{колл}$, основываясь на гамильтониане микроскопической модели ядра с произвольным остаточным взаимодействием. При этом $H_{колл}$ будет конечным и эрмитовским. Вся информация об уровнях среднего поля ядра и остаточных взаимодействиях окажется заключенной в небольшом числе коэффициентов. Это позволит проводить рассмотрение конкретных ядер в два этапа. На первом этапе найти значения коэффициентов, которые дают наиболее близкое к эксперименту описание свойств ядер. Затем, зная численные значения коэффициентов, оценить роль разных типов остаточных сил в формировании коллективных возбуждений.

I. Построение коллективного гамильтониана

Гамильтониан ядра запишем в достаточно общем виде:

$$H=\sum_{jm} E_j\, a^+_{jm} a_{jm} + \sum_{j_i,m_i} G(j_1m_1, j_2m_2; j_2'm_2', j_1'm_1') \times$$
$$\times\, a^+_{j_1m_1} a^+_{j_2m_2} a_{j_2'm_2'} a_{j_1'm_1'}\,, \qquad /1/$$

где a^+_{jm} (a_{jm}) - операторы рождения /уничтожения/ фермионов; jm - квантовые числа одночастичных состояний; $G(j_1m_1, j_2m_2; j_2'm_2', j_1'm_1')$ - произвольная матрица взаимодействия, обладающая, однако, всеми свойствами симметрии, следующими из свойств антикоммутативности операторов a^+_{jm}, a_{jm}, эрмитовости гамильтониана и его инвариантности относительно отражения времени.

С помощью $u-v$ преобразования Боголюбова /8/

$$a^+_{jm} = u_j \alpha^+_{jm} + (-1)^{j+m} v_j \alpha_{j-m} \qquad /2/$$

можно выразить $\hat{H}$ через операторы квазичастиц α^+_{jm}, α_{jm}.

Так как в $\hat{H}$ входит не взаимодействие свободных нуклонов, а эффективное взаимодействие, действующее в ограниченном пространстве нуклонных состояний, то мы, в принципе, должны использовать различные матрицы для задания взаимодействия в каналах частица - частица и частица - дырка /9/. Если взаимодействие действует в канале частица - частица, мы введем для него обозначение:

$$G(j_1m_1, j_2m_2; j_2'm_2', j_1'm_1') \to G_\xi (j_1m_1, j_2m_2; j_2'm_2'; j_1'm_1').$$

Для взаимодействия в канале частица - дырка обозначение будет следующим:

$$G(j_1m_1, j_2m_2; j_2'm_2', j_1'm_1') \to G_\omega (j_1m_1, j_1'm_1'; j_2m_2, j_2'm_2').$$

Будем рассматривать только ядра, состоящие из четного числа нейтронов и протонов. В таких ядрах реализуются лишь состояния с четным числом квазичастиц. Поэтому от операторов α^+_{jm}, α_{jm} удобнее перейти к бинарным фермионным операторам:

$$q_{LN\mu} = \frac{1}{2} \sum_{j,j',m,m'} q^{LN}_{jj'} C^{L\mu}_{jmj'm'} (\alpha^+_{jm} \alpha^+_{j'm'} + \tilde{\alpha}_{j'm'} \tilde{\alpha}_{jm}), \qquad /3а/$$

$$p_{LN\mu} = \frac{i}{2} \sum_{j,j',m,m'} p^{LN}_{jj'} C^{L\mu}_{jmj'm'} (\tilde{\alpha}^+_{jm} \tilde{\alpha}^+_{j'm'} - \alpha_{j'm'} \alpha_{jm}), \qquad /3б/$$

где $\tilde{a}_{jm} = (-1)^{j+m} a_{j-m}$; $C^{L\mu}_{jmj'm'}$ - коэффициенты Клебша-Гордана; $q^{LN}_{jj'}$, $p^{LN}_{jj'}$ - произвольные пока коэффициенты; N - дополнительное квантовое число, различающее операторы с одинаковым значением $L\mu$. Удобно ввести следующие обозначения, существенно сокращающие запись:

$$LN\mu \equiv k; \quad jm \equiv s; \quad j-m \equiv \bar{s};$$

$$(-1)^{j+m} \equiv \sigma_s;$$

$$q^{LN}_{jj'} C^{L\mu}_{jmj'm'} \equiv q^{k}_{ss'};$$

$$p^{LN}_{jj'} C^{L\mu}_{jmj'm'} \equiv p^{k}_{ss'}.$$

Коэффициенты $q^k_{s\nu}$, $p^k_{s\nu}$ удобно выбрать так, чтобы они удовлетворяли следующим соотношениям ортогональности:

$$\sum_{s,\nu} q^k_{s\nu} p^\ell_{s\nu} = \delta_{k\ell},$$

$$\sum_k q^k_{ss'} p^k_{\nu\nu'} = \frac{1}{2}(\delta_{s\nu}\delta_{s'\nu'} - \delta_{s\nu'}\delta_{s'\nu}). \qquad /4/$$

Нормировка коэффициентов $q^k_{s\nu}$, $p^k_{s\nu}$ такова, что постоянная в коммутаторе $[q_k, p_\ell]$ равна $i\delta_{k\ell}$:

$$[q_k, p_\ell] = i\delta_{k\ell} - i\sum_{s,s',\nu} q^k_{ss'} p^\ell_{\nu s'} (\tilde{a}^+_\nu \tilde{a}_s + a^+_s a_\nu). \qquad /5/$$

В приближении хаотических фаз [10] вторым слагаемым в /5/ пренебрегают. В этом случае операторы q_k, p_ℓ удовлетворяют коммутационным соотношениям, характерным для операторов координаты и импульса, и могут быть названы обобщенными координатами и импульсами. Два других коммутатора имеют вид:

$$[q_k, q_\ell] = -\sum_{s,s',\nu} \sigma_s (q^k_{ss'} q^\ell_{\nu\bar{s}'} - q^\ell_{ss'} q^k_{\nu\bar{s}'}) a^+_\nu \tilde{a}_s, \qquad /6а/$$

$$[p_k, p_\ell] = \sum_{s,s',\nu} \sigma_{s'} (p^k_{ss'} p^\ell_{\nu\bar{s}'} - p^\ell_{ss'} p^k_{\nu\bar{s}'}) \tilde{a}^+_\nu a_s. \qquad /6б/$$

Используя /4/, можно показать /Приложение I/, что существует обратное преобразование от операторов $q_k p_\ell$, $[q_k, p_\ell]$, $[q_k, q_\ell]$, $[p_k, p_\ell]$ к операторам $a_\nu a_s$, $a^+_s a^+_\nu$, $a^+_s a_\nu$. Таким образом, оба набора операторов эквивалентны.

Операторы q_k , p_ℓ , $[q_k, p_\ell]$, $[q_k, q_\ell]$, $[p_k, p_\ell]$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[[q_k, p_\ell], p_n] = \sum_t K_{k\ell nt} q_t, \quad [[q_k, p_\ell], q_n] = -\sum_t L_{k\ell nt} p_t,$$

$$[[q_k, q_\ell], p_n] = -\sum_t N_{k\ell nt} p_t, \quad [[q_k, q_\ell], q_n] = -\sum_t M_{k\ell nt} q_t,$$

$$[[p_k, p_\ell], p_n] = \sum_t U_{k\ell nt} p_t, \quad [[p_k, p_\ell], q_n] = \sum_t T_{k\ell nt} q_t, \qquad /7/$$

где константы $K_{k\ell nt}$, $L_{k\ell nt}$ и т.д. выражаются через $q^k_{s\nu}$, $p^k_{s\nu}$.

Легко видеть, что коммутатор любых двух из этих операторов является линейной функцией рассматриваемых операторов. Например,

$$\begin{aligned}[][q_k, q_\ell], [p_n, p_t]] &= [[[q_k, q_\ell], p_n], p_t] - \\ &- [[[q_k, q_\ell], p_t], p_n] = -\sum_r N_{k\ell nr} [p_r, p_t] + \\ &+ \sum_r N_{k\ell tr} [p_r, p_n]. \end{aligned} \qquad /8/$$

Значит, операторы q_k, p_ℓ , $[q_k, p_\ell]$ и т.д. образуют замкнутую алгебру. Поэтому структурные константы $K_{k\ell nt}$ и другие должны удовлетворять соотношениям, следующим из тождеств Якоби. Поскольку наборы операторов q_k, p_ℓ , $[q_k, p_\ell]$, $[q_k, q_\ell]$, $[p_k, p_\ell]$ и $a^+_s a^+_\nu$, $a_\nu a_s$, $a^+_s a_\nu$ эквивалентны, эти соотношения удовлетворяются тождественно.

До сих пор рассмотрение было формально точным. Наша задача состоит в том, чтобы из гамильтониана /1/ выделить ту его часть, которая описывает только состояния, принадлежащие коллективной квадрупольной ветви возбуждений. Для этого из всего набора операторов q_k, p_ℓ мы сохраним лишь пять операторов обобщенных координат $q_{L=2\mu}$ /μ = 0, ±1, ±2/ и пять обобщенных импульсов $p_{L=2\mu}$. С их помощью можно построить все семейство коллективных квадрупольных состояний точно так же, как это делалось в феноменологических моделях при помощи операторов $\alpha_{2\mu}$ и $\pi_{2\mu}$.

Будем предполагать, что нам известны наборы коэффициентов $q_{s\nu}$, $p_{s\nu}$, характеризующих оставленные операторы $q_{2\mu}$ и $p_{2\mu}$. Для вычисления $q_{s\nu}$ и $p_{s\nu}$ может быть использован метод, развитый в /7/. Более детально этот вопрос будет рассмотрен в отдельной работе.

Необходимо сохранить и все коммутаторы операторов $q_{2\mu}$ и $p_{2\mu}$. При вычислении двойных коммутаторов, типа $[[q_{2\mu}, p_{2\mu'}], p_{2\mu''}]$, в правой части равенства будем оставлять лишь сохраненные нами операторы $q_{2\mu}$, $p_{2\mu}$. В этом заключено основное приближение данной работы. Основания для него следующие. Поскольку операторы $q_{2\mu}$ и $p_{2\mu}$ по определению являются операторами, генерирующими коллективную квадрупольную ветвь возбуждений /это накладывает жесткие ограничения на $q_{ss'}$, $p_{ss'}$, но вопрос о вычислении этих коэффициентов здесь не рассматривается/, то для этих операторов характерны большие величины матричных элементов, связывающих коллективные состояния. Для оставшихся операторов эти матричные элементы значительно меньше по величине. А так как мы рассматриваем только коллективные состояния, то влияние этих операторов ввиду малости матричных элементов невелико, и мы можем их не учитывать. В сформулированном приближении операторы $q_{2\mu}$, $p_{2\mu}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям, совпадающим с /7/, но индексы "k", "ℓ", "n", "t" принимают теперь только значения 2μ /μ = 0, ±1, ±2/. Для сокращения записи будем опускать неменяющийся индекс "2". Структурные константы имеют следующий вид:

$$K_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \sum_{\ell M} K_\ell \Big((-)^{\mu_4} C^{\ell M}_{2\mu_1 2-\mu_4} C^{\ell M}_{2\mu_3 2\mu_2} + (-)^{\mu_3} C^{\ell M}_{2\mu_1 2-\mu_3} C^{\ell M}_{2\mu_4 2\mu_2} \Big),$$

$$L_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \sum_{\ell M} L_\ell \Big((-)^{\mu_3} C^{\ell M}_{2\mu_1 2\mu_4} C^{\ell M}_{2\mu_2 2\mu_3} + (-)^{\mu_4} C^{\ell M}_{2\mu_1 2\mu_3} C^{\ell M}_{2-\mu_4 2\mu_2} \Big),$$

$$M_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \sum_{\ell M} L_\ell \Big((-)^{\mu_1} C^{\ell M}_{2\mu_1 2-\mu_4} C^{\ell M}_{2-\mu_3 2-\mu_2} - (-)^{\mu_2} C^{\ell M}_{2\mu_2 2-\mu_4} C^{\ell M}_{2-\mu_3 2-\mu_1} \Big),$$

$$T_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \sum_{\ell M} K_\ell \Big((-)^{\mu_1} C^{\ell M}_{2\mu_2 2\mu_4} C^{\ell M}_{2\mu_3 2-\mu_1} - (-)^{\mu_2} C^{\ell M}_{2\mu_1 2\mu_4} C^{\ell M}_{2\mu_3 2-\mu_2} \Big), \qquad /9/$$

$$N_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = -M_{\mu_1\mu_2\mu_4\mu_3},$$

$$U_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = -T_{\mu_1\mu_2\mu_4\mu_3},$$

$$K_\ell = 50 \sum_{s,s',\nu,\nu'} q_{j_s j_{s'}} p_{j_\nu j_s} p_{j_{s'} j_\nu} p_{j_\nu j_{\nu'}} \times$$

$$\times (-)^{j_{s'} - j_{\nu'}} \begin{Bmatrix} j_s & j_{\nu'} & 2 \\ j_{s'} & j_\nu & 2 \\ 2 & 2 & \ell \end{Bmatrix}.$$

$$L_\ell = 50 \sum_{s,s',\nu,\nu'} q_{j_s j_{s'}} p_{j_\nu j_s} q_{j_s j_\nu} q_{j_\nu j_{\nu'}} \times$$

$$\times (-)^{j_{s'}-j_{\nu'}} \begin{Bmatrix} j_s & j_{\nu'} & 2 \\ j_{s'} & j_\nu & 2 \\ 2 & 2 & \ell \end{Bmatrix}$$

Операторы $q_\mu, p_\mu, [q_\mu, p_{\mu'}]$, $[q_\mu, q_{\mu'}]$, $[p_\mu, p_{\mu'}]$ по-прежнему образуют замкнутую алгебру. Но поскольку число операторов в алгебре уменьшилось, нарушилась эквивалентность наборов операторов $a_s^+ a_\nu^+$, $a_\nu a_s$, $a_s^+ a_\nu$ и q_μ, p_μ, $[q_\mu, p_{\mu'}]$, $[q_\mu, q_{\mu'}]$, $[p_\mu, p_{\mu'}]$. Соотношения для структурных констант, следующие из тождеств Якоби, теперь не удовлетворяются тождественно, а накладывают дополнительные ограничения на структурные константы. Можно показать /Приложение II/, что эти ограничения следующие:

$$K_1 = K_3 = L_1 = L_3 = 0, \quad K_0 = K_2 = K_4 \equiv K, \quad L_0 = L_2 = L_4 \equiv L.$$

Подставляя эти соотношения в /9/, получаем

$$K_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_3} = KG^{(+)}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}, \quad L_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = L(-)^{\mu_3+\mu_4} G^{(+)}_{\mu_1\mu_2-\mu_3-\mu_4},$$

$$M_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = LG^{(-)}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}, \quad T_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = -K(-)^{\mu_1+\mu_2} G^{(-)}_{\mu_1\mu_2-\mu_3-\mu_4},$$

$$G^{(+)}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{1}{2}(-)^{\mu_2}\left(\delta_{\mu_1\mu_3}\delta_{-\mu_2\mu_4} + \delta_{\mu_1\mu_4}\delta_{-\mu_2\mu_3}\right) + (-)^{\mu_3}\delta_{\mu_1\mu_2}\delta_{-\mu_3\mu_4},$$

$$G^{(-)}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{1}{2}\left((-)^{\mu_1}\delta_{-\mu_3\mu_1}\delta_{\mu_2\mu_4} - (-)^{\mu_2}\delta_{-\mu_2\mu_3}\delta_{\mu_1\mu_4}\right). \qquad /10/$$

Простой вид структурных констант существенно упрощает анализ коммутационных соотношений. Можно показать, что из этого анализа следует

$$[q_\mu, q_{\mu'}] = \frac{L}{K}(-1)^{\mu+\mu'}[p_{-\mu}, p_{-\mu'}],$$

$$[q_\mu, p_{\mu'}] = (-1)^{\mu+\mu'}[q_{-\mu'}, p_{-\mu}],$$

а для оставшихся операторов справедливо следующее представление в терминах операторов квадрупольных бозонов $b^+_{2\mu}$, $b_{2\mu}$ /линейно связанных с

$$a_{2\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b^+_{2\mu} + (-1)^\mu b_{2-\mu}) \quad \text{и} \quad \pi_{2\mu} = \frac{i}{\sqrt{2}}((-1)^\mu b^+_{2-\mu} - b_{2\mu})/,$$

удовлетворяющее всем полученным выше коммутационным соотношениям:

$$\frac{q_\mu}{\sqrt{L}} + i\frac{(-)^\mu p_{-\mu}}{\sqrt{K}} = \left(\frac{2}{\sqrt{KL}}\right)^{1/2}\sqrt{1-\sqrt{KL}\sum_\nu b^+_{2\nu} b_{2\nu}}\,(-1)^\mu b_{2-\mu},$$

$$\frac{q_\mu}{\sqrt{L}} - i\frac{(-1)^\mu p_{-\mu}}{\sqrt{K}} = \left(\frac{2}{\sqrt{KL}}\right)^{1/2} b^+_{2\mu}\sqrt{1-\sqrt{KL}\sum_\nu b^+_{2\nu} b_{2\nu}}$$

$$[q_\mu, p_{\mu'}] = i\sqrt{KL}\Big\{-\frac{1}{2}(b^+_{2\mu} b_{2\mu'} + (-)^{\mu+\mu'} b^+_{2-\mu'} b_{2-\mu}) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{KL}}\delta_{\mu\mu'}(1-\sqrt{KL}\sum_\nu b^+_{2\nu} b_{2\nu})\Big\}, \qquad /11/$$

$$[q_\mu, q_{\mu'}] = \frac{L}{2}\left((-1)^{\mu'} b^+_{2\mu} b_{2-\mu'} - (-1)^\mu b_{2\mu'} b_{2-\mu}\right).$$

Таким образом, мы получили следующий результат. В общем случае любые одночастичные операторы могут быть точно выражены через q_k, p_k, $[q_k, p_\ell]$, $[q_k, q_\ell]$, $[p_k, p_\ell]$ /Приложение I/. Сохранив только коллективные операторы q_μ, p_μ и их коммутаторы, мы получили приближенные выражения для одночастичных операторов через q_μ, p_μ, $[q_\mu, p_{\mu'}]$, $[q_\mu, q_{\mu'}]$ /Приложение III/, а значит, и в терминах операторов квадрупольных бозонов /11/. Так как гамильтониан, полученный в результате u, v - преобразования гамильтонниана /1/, построен из одночастичных операторов, то в итоге мы получаем бозонное представление и для этого гамильтониана. Можно показать, что это представление следующее:

$$H = \omega \sum_\mu b^+_{2\mu} b_{2\mu} + g^{(-)}\Big(\sum_\mu (-1)^\mu \; b^+_{2\mu} b^+_{2-\mu} \times$$

$$\times \sqrt{\Big(1 - \sqrt{KL}\,\big(\sum_\nu b^+_{2\nu} b_{2\nu} + 1\big)\Big)\Big(1 - \sqrt{KL} \sum_\nu b^+_{2\nu} b_{2\nu}\Big)} + h.c.\Big) + \qquad /12/$$

$$+ f\Big(\sum_{\mu,\mu',\eta} C^{2\mu'}_{2\eta 2\mu} \; b^+_{2\eta} b^+_{2\mu} b_{2\mu'} \sqrt{1 - \sqrt{KL} \sum_\nu b^+_{2\nu} b_{2\nu}} + h.c.\Big) +$$

$$+ 2g^{(+)} \sum_\mu b^+_{2\mu}\Big(1 - \sqrt{KL} \sum_\nu b^+_{2\nu} b_{2\nu}\Big) b_{2\mu} \;,$$

где константы ω, $g^{(\pm)}$, f приведены в Приложении IУ.

Итак, исходя из гамильтониана ядра с произвольным остаточным взаимодействием,мы построили коллективный гамильтониан, который содержит только операторы квадрупольных бозонов $b^+_{2\mu}$, $b_{2\mu}$. Этот гамильтониан имеет замкнутый вид, эрмитов и удобен для конкретных расчетов.

Гамильтониан /12/ зависит от пяти параметров ω, $g^{(\pm)}$, f и $\sqrt{KL}$, из которых один имеет размерность энергии, а в качестве четырех других можно выбрать безразмерные величины $\omega/g^{(-)}$, $g^{(+)}/g^{(-)}$, $f/g^{(-)}$ и $\sqrt{KL}$.

Отношения энергий будут зависеть только от четырех безразмерных параметров. И хотя численные значения этих параметров мы найдем, лишь вычислив коэффициенты $q_{s\nu}$, $p_{s\nu}$, их физический смысл можно выяснить, используя выражения, приведенные в приложении IУ, и зная ту роль, которую играют эти параметры в гамильтониане. Величина $1/\sqrt{KL}$ характеризует максимально возможное число бозонных возбуждений в системе, т.е. глубину коллективного потенциала. Поэтому оценить этот коэффициент можно, зная величину барьера деления. Отношение $\dfrac{\omega}{g^{(-)}}$ пропорционально сумме энергий квазичастиц, умноженных на некоторый весовой фактор, и потому определяется плотностью одночастичных уровней вблизи поверхности Ферми. Оно растет с уменьшением плотности и убывает с ее ростом. Коэффициент $\dfrac{g^{(+)}}{g^{(-)}}$ характеризует отношение вкладов T-четных и T-нечетных каналов взаимодействия в коллективный гамильтониан /T-четность относительно операции отражения времени/. Величина отношения $\dfrac{f}{g^{(-)}}$ зависит от распределения величин матричных элементов матрицы взаимодействия относительно поверхности Ферми. Эта величина мала для симметричного распределения и возрастает, если такое распределение несимметрично. Проиллюстрируем это утверждение на примере, когда остаточное взаимодействие совпадает с квадруполь-квадрупольным. В этом случае

$$f \sim \sum_{s,s',\nu} \langle s | r^2 Y_{20} | s' \rangle \,(u_s u_{s'} - v_s v_{s'})\, p^{20}_{s\nu} p^{20}_{s'\nu}.$$

Сохраняя для простоты только диагональные элементы $(r^2 Y_{20})$ и пренебрегая сверхтекучими поправками, получаем:

$$f \sim \sum_s{}^{(+)} \langle s | r^2 Y_{20} | s \rangle \sum_\nu (P^{20}_{s\nu})^2 - \sum_s{}^{(-)} \langle s | r^2 Y_{20} | s \rangle \sum_\nu (p^{20}_{s\nu})^2,$$

где $\Sigma^{(+)}$ означает суммирование по уровням выше поверхности Ферми, а $\Sigma^{(-)}$ - суммирование по уровням ниже поверхности Ферми. При симметричном распределении эта разность равна нулю. Если квадрупольные моменты имеют разные знаки для уровней выше и ниже поверхности Ферми, то эта сумма резко возрастает.

II. Потенциальная энергия деформации

Из полного коллективного гамильтониана /12/ можно выделить потенциальную энергию деформации. Это даст нам возможность сделать ряд качественных предсказаний о характере спектра коллективных состояний.

В качестве переменной, описывающей деформацию, обычно используют среднее значение оператора квадрупольного момента $Q_{2\mu}$. Введем в рассмотрение этот оператор и выразим его, как это было сделано выше для гамильтониана H, в терминах операторов $b^+_{2\mu}$, $b_{2\mu}$. Результат следующий:

$$Q_{2\mu} = h\Big(b^+_{2\mu}\sqrt{1-\sqrt{KL}\sum_\nu b^+_{2\nu}b_{2\nu}} + \sqrt{1-\sqrt{KL}\sum_\nu b^+_{2\nu}b_{2\nu}}\,(-1)^\mu b_{2-\mu}\Big) + R\sum_{\nu,\nu'} C^{2\nu}_{2\nu',2\mu}\, b^+_{2\nu} b_{2\nu'}, \qquad /13/$$

где

$$h \sim \Sigma \langle j\,||\,r^2 Y_{20}\,||\,j'\rangle (u_j v_{j'} + u_{j'} v_j)\,p_{jj'},$$

$$R \sim \Sigma \langle j\,||\,r^2 Y_{20}\,||\,j'\rangle (u_j u_{j'} - v_j v_{j'})\begin{Bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ j & j' & j_1 \end{Bmatrix} p_{jj_1}\, p_{j'j_1}.$$

Для выделения потенциальной энергии удобно в /12/ перейти в систему координат, вращающуюся вместе

со средним полем ядра. Это позволит выделить явно энергию вращения и кинетнческую энергию колебаний. Такой переход осуществляется с помощью преобразования:

$$a_{2\mu} = \frac{b^+_{2\mu} + (-1)^\mu b_{2-\mu}}{\sqrt{2}} = D^2_{\mu 0}(\bar\theta)\, a_0 + \frac{D^2_{\mu 2}(\bar\theta) + D^2_{\mu -2}(\bar\theta)}{\sqrt{2}}\, a_2,$$

где углы Эйлера $\bar\theta$ описывают вращение, а переменные a_0, a_2 - колебания среднего поля ядра; $D^2_{\mu k}$ - функции Вигнера. После несложных преобразований, используя тот факт, что

$$i\,\frac{(-1)^\mu b^+_{2-\mu} - b_{2\mu}}{\sqrt{2}} = \pi_{2\mu} = -i\,\frac{\partial}{\partial a_{2\mu}},$$

получаем

$$b^+_{2\mu} = \frac{D^2_{\mu 0}}{\sqrt{2}}\Big(a_0 - \frac{\partial}{\partial a_0}\Big) + \frac{D^2_{\mu 2} + D^2_{\mu -2}}{2}\Big(a_2 - \frac{\partial}{\partial a_2}\Big) + \frac{D^2_{\mu 2} - D^2_{\mu -2}}{\sqrt{2}\, a_2}\,\hat{\mathfrak{L}}_0 + \frac{D^2_{\mu 1}\big(\sqrt{3}\, a_0 \hat{\mathfrak{L}}_{-1} + a_2 \hat{\mathfrak{L}}_1\big) - D^2_{\mu -1}\big(a_2 \hat{\mathfrak{L}}_{-1} + \sqrt{3}\, a_0 \hat{\mathfrak{L}}_1\big)}{\sqrt{2}\,(3a_0^2 - a_2^2)}.$$

Здесь $\hat{\mathfrak{L}}_{0,\pm 1}$ - операторы проекций момента вращения на оси системы координат, жестко связанной со средним полем.

Чтобы выделить потенциальную энергию, нужно пренебречь вкладом операторов $\hat{\mathfrak{L}}_{0,\pm 1}$, $\frac{\partial}{\partial a_0}$, $\frac{\partial}{\partial a_2}$, с которыми связаны энергия вращения и кинетическая энергия колебаний. Переменная a_0 описывает аксиальную деформацию формы ядра, а переменная a_2 - отклонение от аксиальности. Наибольший интерес представляет зависимость потенциальной энергии от a_0. Поэтому для простоты мы всюду будем полагать $a_2 = 0$. Тогда

$$b^{+}_{2\mu} \approx D^{2}_{\mu 0} \frac{1}{\sqrt{2}} a_0 . \qquad /14/$$

Подставляя /14/ в /12/ и /13/, выразим H и $Q_{2\mu}$ через a_0:

$$H = \frac{\omega a_0^2}{2} + \left(g^{(+)} + g^{(-)} \right) a_0^2 \left(1 - \frac{\sqrt{KL}\, a_0^2}{2} \right) + \frac{f}{\sqrt{7}} a_0^3 \sqrt{1 - \frac{\sqrt{KL}\, a_0^2}{2}} ,$$

$$Q_{2\mu} = D^{2}_{\mu 0} \left(\sqrt{2}\, \hbar\, a_0 \sqrt{1 - \frac{\sqrt{KL}\, a_0^2}{2}} + \frac{R}{\sqrt{14}} a_0^2 \right).$$

Определим новую переменную Q следующим образом:

$$Q_{2\mu} = D^{2}_{\mu 0}\, Q\, (a_0).$$

Найдя обратное выражение $a_0 = a_0(Q)$ и подставив его в H, выразим H через Q. Это и будет потенциальная энергия деформации. Она зависит от пяти параметров, один из которых имеет размерность энергии, а другой - размерность квадрупольного момента. Безразмерных параметров только три. Они и будут определять форму кривой потенциальной энергии. Один из трех параметров характеризует плотность одночастичных состояний вблизи поверхности Ферми, а два других - распределение матричных элементов матрицы взаимодействия и оператора квадрупольного момента относительно поверхности Ферми. Если такие распределения симметричны, то с увеличением плотности одночастичных состояний потенциальная энергия деформации меняется, как показано на рис. 1. Если фиксировать плотность одночастичных состояний, а затем увеличивать асимметрию в распреде-

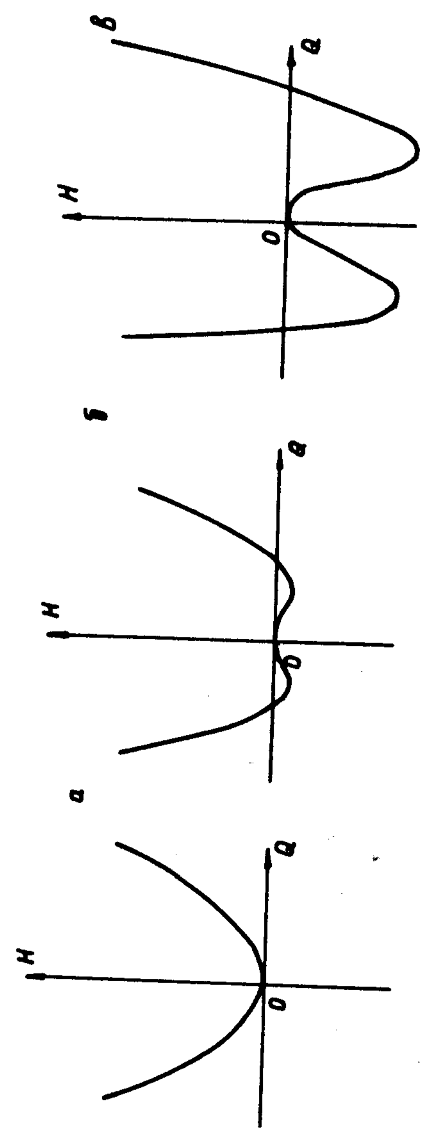

Рис. 1. Потенциальная энергия деформации

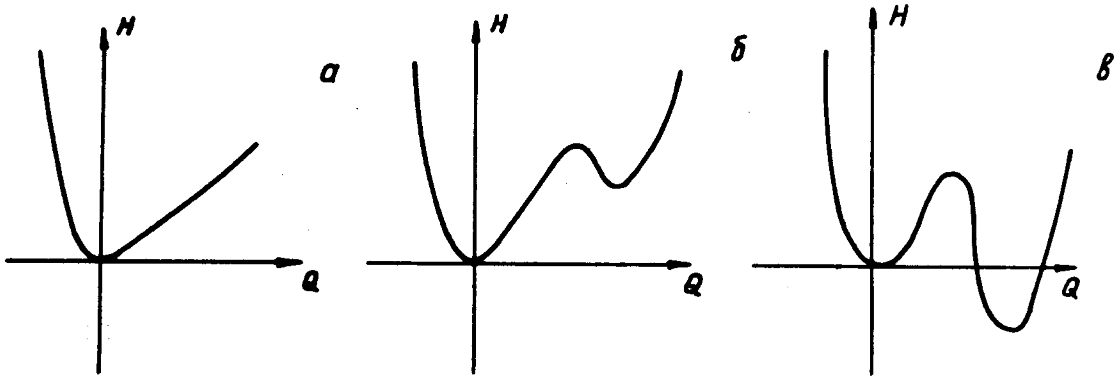

Рис. 2. Потенциальная энергия деформации

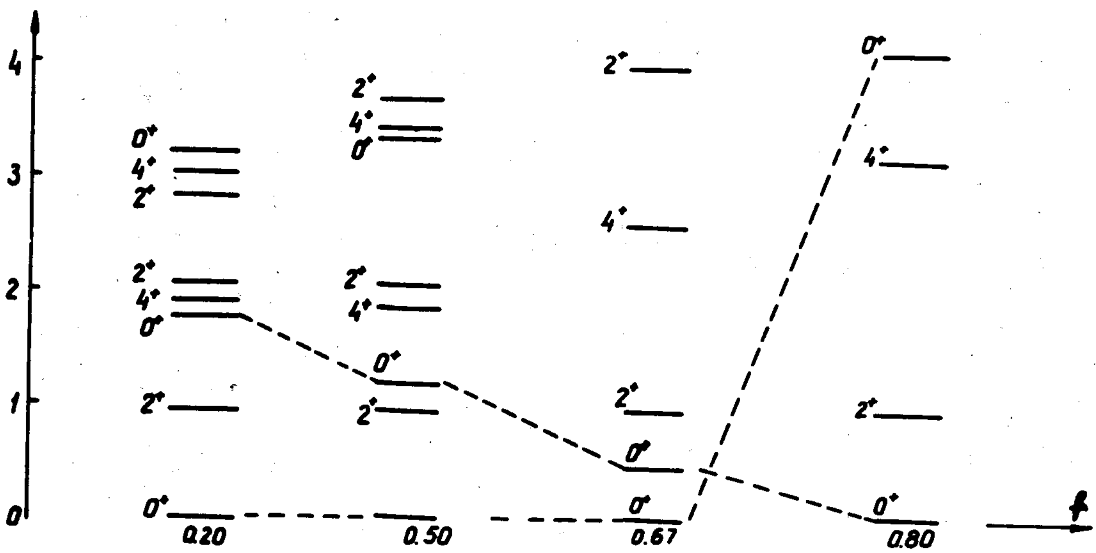

Рис. 3. Спектр коллективных состояний.
Энергия первого 2^+ состояния принята равной единице

лении матричных элементов матриц взаимодействия и квадрупольного момента, то изменение потенциальной энергии будет таким, как показано на рис. 2. Из этого рисунка видно, что возможна ситуация, при которой у потенциальной энергии есть два минимума: один при нулевой, а другой при отличной от нуля деформации. В этом случае при небольшой разнице в глубинах обоих минимумов в спектре коллективных состояний может появиться низколежащее 0^+ состояние с деформацией, отличной от деформации основного состояния.

III. Спектр коллективных состояний

Перейдем к точному решению задачи с гамильтонианом /12/, зависящим от четырех безразмерных параметров. Один из них - максимальное число бозонов, примем равным 8, что грубо соответствует величинам барьеров деления, ожидаемых для ядер с $A \sim 100$. Наибольший интерес представляет случай большой асимметрии в распределении элементов матрицы взаимодействия относительно поверхности Ферми. Поэтому мы фиксируем параметр, характеризующий плотность одночастичных состояний так, чтобы обеспечить стабильность минимума потенциальной энергии при нулевой деформации, и будем менять параметр f, характеризующий асимметрию. Мы получим спектры возбуждения, приведенные на рис. 3 в порядке возрастания величины параметра асимметрии f. Из рисунка видно, что с ростом f опускается 0_2^+ состояние, так что в переходной области оно находится вблизи первого 2^+ состояния. При дальнейшем увеличении параметра f это состояние становится основным, и мы получаем спектр возбуждения, характерный для деформированных ядер. Но среди возбужденных состояний появляется сферическое 0^+ состояние.

Приложение I

Перепишем /3а/ и /3б/ в сокращенных обозначениях:

$$q_k = \frac{1}{2} \sum_{s',\nu'} q^k_{s'\nu'} (a^+_{s'} a^+_{\nu'} + \tilde{a}_{\nu'} \tilde{a}_{s'}), \qquad /I.1/$$

$$p_k = \frac{i}{2} \sum_{s',\nu'} p^k_{s'\nu'} (\tilde{a}^+_{s'} \tilde{a}^+_{\nu'} - a_{\nu'} a_{s'}). \qquad /I,2/$$

Умножая /I.1/ на $p^k_{s\nu}$, /I.2/ на $q^k_{s\nu}$, суммируя по "k" и используя /4/, получаем:

$$\sum_k p^k_{s\nu} q_k = \frac{1}{2} (a^+_s a^+_\nu + \tilde{a}_\nu \tilde{a}_s),$$

$$\sum_k q^k_{s\nu} p_k = \frac{i}{2} (\tilde{a}^+ \tilde{a}^+ - a_\nu a_s). \qquad /I.3/$$

Из /I.3/ следует

$$a^+_s a^+_\nu = \sum_k (p^k_{s\nu} q_k - i\sigma_s \sigma_\nu q^k_{\bar{s}\bar{\nu}} p_k).$$

Умножая /5/ на $p^k_{ss'}$ и $q^\ell_{\nu s'}$, суммируя по "k" и "ℓ", находим:

$$\sum_{k,\ell} p^k_{ss'} q^\ell_{\nu s'} (\delta_{k\ell} + i[q_k, p_\ell]) = \frac{1}{4}(1 - \delta_{ss'} - \delta_{\nu s'}) \times$$

$$\times (\tilde{a}^+_\nu \tilde{a}_s + a^+_s a_\nu) + \frac{1}{4} \delta_{s\nu} (\tilde{a}^+_{s} \tilde{a}_{s'} + a^+_s a_s).$$

Из этого равенства следует:

$$\frac{1}{2} (\tilde{a}^+_s \tilde{a}_s + a^+_s a_s) = \sum_{k,\ell} p^k_{s\bar{s}} q^\ell_{s\bar{s}} (\delta_{k\ell} + i[q_k, p_\ell]),$$

$$\frac{1}{4} (\tilde{a}^+_\nu \tilde{a}_s + a^+_s a_\nu)(1 - \delta_{\nu s'} - \delta_{ss'}) =$$

$$= i \sum_{k,\ell} p^k_{ss'} q^\ell_{\nu s'} [q_k, p_\ell], \quad \nu \neq s.$$

Аналогично из /6а/, используя /4/, получаем:

$$\sum_{k,\ell} \sigma_\nu \sigma_{s'} (p^k_{\bar{\nu}\bar{s}'} p^\ell_{ss'} - p^k_{\bar{\nu}s'} p^\ell_{s\bar{s}'}) [q_k, q_\ell] =$$

$$= \frac{1}{4} (\tilde{a}^+_\nu \tilde{a}_s - a^+_s a_\nu) \times (2 - \delta_{ss'} - \delta_{\bar{s}s'} - \delta_{\nu s'} - \delta_{\bar{\nu}s'}).$$

Используя /6б/, можно выразить $(\tilde{a}_\nu^+\tilde{a}_s - a_s^+ a_\nu)$ через $[p_k, p_\ell]$. Это говорит об эквивалентности операторов $[q_k, q_\ell]$ и $[p_k, p_\ell]$.

Приложение II

Из тождеств Якоби

$$\{q_{\mu_1}, p_{\mu_2}, p_{\mu_3}\} = 0, \quad \{q_{\mu_1}, p_{\mu_2}, q_{\mu_3}\} = 0,$$

где $\{a, b, c\} \equiv [[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b]$,
и соотношений /7/ следует:

$$\begin{aligned} T_{\mu_2\mu_3\mu_1\mu_4} &= K_{\mu_1\mu_3\mu_2\mu_4} - K_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}, \\ N_{\mu_3\mu_1\mu_2\mu_4} &= L_{\mu_3\mu_2\mu_1\mu_4} - L_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} \end{aligned} \qquad /II.1/$$

Подставляя /8/ в /II.1/ и используя свойства коэффициентов Клебша-Гордана, получаем:

$$\begin{pmatrix} K_\ell \\ L_\ell \end{pmatrix}(1-(-1)^\ell) = -(1+(-1)^\ell)\sum_{\ell'}\begin{pmatrix} K_{\ell'} \\ L_{\ell'} \end{pmatrix}(1-(-1)^{\ell'})(2\ell'+1)\begin{Bmatrix} 2 & 2 & \ell' \\ 2 & 2 & \ell \end{Bmatrix} \qquad /II.2/$$

Из /II.2/ следует, что $K_1 = K_3 = L_1 = L_3 = 0$.

Подставляя /8/ в тождества Якоби:

$$\{[q_\mu, p_\nu], [q_\eta, q_\xi], p_\zeta\} = 0, \quad \{[q_\mu, p_\nu], [p_\eta, p_\xi], p_\zeta\} = 0.$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых операторах, получаем:

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu'}(L_{\mu\nu\eta\mu'}K_{\xi\mu'\zeta\nu'} - L_{\mu\nu\xi\mu'}K_{\eta\mu'\zeta\nu'} + \\ &+ N_{\eta\xi\zeta\mu'}K_{\mu\nu\mu'\nu'} - K_{\mu\nu\zeta\mu'}M_{\eta\xi\mu'\nu'}) = 0, \\ &\sum_{\mu'}(K_{\mu\nu\xi\mu'}L_{\mu'\eta\zeta\nu'} - K_{\mu\nu\eta\mu'}L_{\mu'\xi\zeta\nu'} + \\ &+ T_{\eta\xi\zeta\mu'}L_{\mu\nu\mu'\nu'} - L_{\mu\nu\zeta\mu'}U_{\eta\xi\mu'\nu'}) = 0. \end{aligned} \qquad /II.3/$$

Подставляя /9/ в /II.3/, используя свойства коэффициентов Клебша-Гордана и $6j$ - символов, находим:

$$\begin{aligned} &(1+(-1)^\ell)(1+(-1)^{\ell'})(1-(-1)^{\bar\ell})(\tilde K_\ell \tilde L_{\ell'} - \tilde L_\ell \tilde K_{\bar\ell}) = 0, \\ &(1+(-1)^\ell)(1+(-1)^{\ell'})(1-(-1)^{\bar\ell})(\tilde L_\ell \tilde K_{\ell'} - \tilde K_\ell \tilde L_{\bar\ell}) = 0, \end{aligned} \qquad /II.4/$$

где

$$\begin{pmatrix} \tilde K_\ell \\ \tilde L_\ell \end{pmatrix} = \sum_{\ell'}\begin{pmatrix} K_{\ell'} \\ L_{\ell'} \end{pmatrix}(2\ell'+1)\begin{Bmatrix} 2 & 2 & \ell' \\ 2 & 2 & \ell \end{Bmatrix}.$$

Из /III.4/ следует, что

$$L_0 = L_2 = L_4 \equiv L, \quad K_0 = K_2 = K_4 \equiv K.$$

Приложение III

Рассмотрим произвольный оператор вида

$$\hat B = \sum_{s\nu} b_{s\nu} a_s^+ a_\nu .$$

Этот оператор удовлетворяет коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [\hat B, q_\mu] &= \sum_{ss'\nu\mu'}(b_{s\nu} - \sigma_s\sigma_\nu b_{\bar\nu\bar s})q^\mu_{\nu s'}p^{\mu'}_{ss'}q_{\mu'} - \\ &- i\sum_{ss'\nu\mu'}(b_{s\nu} + \sigma_s\sigma_\nu b_{\bar\nu\bar s})(-1)^\mu q^{\mu'}_{\nu s'}q^{-\mu}_{ss'}p_{\mu'}, \\ [\hat B, p_\mu] &= i\sum_{ss'\nu\mu'}(b_{s\nu} + \sigma_s\sigma_\nu b_{\bar\nu\bar s})(-1)^\mu p^{-\mu}_{\nu s'}p_{ss'}q_{\mu'} - \\ &- \sum_{ss'\nu\mu'}(b_{s\nu} - \sigma_s\sigma_\nu b_{\bar\nu\bar s})p^\mu_{ss'}q^{\mu'}_{\nu s'}p_{\mu'}. \end{aligned} \qquad /III.1/$$

Найдем выражение для $\hat{B}$ через $[q_\mu, p_{\mu'}]$, $[q_\mu, q_{\mu'}]$. Для этого будем искать $\hat{B}$ в следующем виде:

$$\hat{B} = i\sum_{\mu\mu'} f_{\mu\mu'}([q_\mu, p_{\mu'}] - i\delta_{\mu\mu'}) + \sum_{\mu\mu'} g_{\mu\mu'}[q_\mu, q_{\mu'}]. \qquad /III.2/$$

Подставляя /III.2/ в /III.1/ и приравнивая коэффициенты при одинаковых операторах, получаем:

$$-\sum_{\mu\mu'} g_{\mu\mu'} M_{\mu\mu'\eta\eta'} = \sum_{ss'\nu}(b_{s\nu} - \sigma_s\sigma_\nu b_{\bar{\nu}\bar{s}}) q^{\eta}_{\nu s'} p^{\eta'}_{ss'},$$

$$\sum_{\mu\mu'} g_{\mu\mu'} N_{\mu\mu'\eta\eta'} = \sum_{ss'\nu}(b_{s\nu} - \sigma_s\sigma_\nu b_{\bar{\nu}\bar{s}}) p^{\eta}_{ss'} q^{\eta'}_{\nu s'},$$

$$\sum_{\mu\mu'} f_{\mu\mu'} L_{\mu\mu'\eta\eta'} = \sum_{ss'\nu}(b_{s\nu} + \sigma_s\sigma_\nu b_{\bar{\nu}\bar{s}})(-1)^{\eta} q^{-\eta}_{ss'} q^{\eta'}_{\nu s'}, \qquad /III.3/$$

$$\sum_{\mu\mu'} f_{\mu\mu'} K_{\mu\mu'\eta\eta'} = \sum_{ss'\nu}(b_{s\nu} + \sigma_s\sigma_\nu b_{\bar{\nu}\bar{s}})(-1)^{\eta} p^{-\eta}_{\nu s'} p_{ss'}.$$

Подставляя /10/ в /III.3/, находим:

$$g_{\mu\mu'} = -\frac{1}{2L}\sum_{ss'\nu}(b_{s\nu} - \sigma_s\sigma_\nu b_{\bar{\nu}\bar{s}})\left((-1)^{\mu} q^{-\mu}_{\nu s'} p^{\mu'}_{ss'} - (-1)^{\mu'} q^{-\mu'}_{\nu s'} p^{\mu}_{ss'}\right),$$

$$f_{\mu\mu'} = \frac{1}{K}\sum_{ss'\nu}(b_{s\nu} + \sigma_s\sigma_\nu b_{\bar{\nu}\bar{s}})\left((-1)^{\mu+\mu'} p^{-\mu}_{\nu s'} p^{-\mu'}_{ss'} - \frac{\delta_{\mu\mu'}}{6}\sum_{\eta} p^{\eta}_{\nu s'} p^{\eta}_{ss'}\right).$$

Приложение IУ

$$\omega = \sum_{jj'}(\epsilon_j + \epsilon_{j'})(p_{jj'})^2,$$

$$g^{(\mp)} = \frac{1}{2\sqrt{KL}}\sum_{j_1j_2j_1'j_2'}\Big[G^2_{\xi}(j_1j_2;j_2'j_1')\times$$
$$\times\left(L v^{(+)}_{j_1j_2} v^{(+)}_{j_1'j_2'} p_{j_1j_2} p_{j_1'j_2'} \mp K v^{(-)}_{j_1j_2} v^{(-)}_{j_1'j_2'} q_{j_1j_2} q_{j_1'j_2'}\right) +$$
$$+2G^2_{\omega}(j_1j_2;j_1'j_2')\left(L u^{(+)}_{j_1j_2} u^{(+)}_{j_1'j_2'} p_{j_1j_2} p_{j_1'j_2'} \mp K u^{(-)}_{j_1j_2} u^{(-)}_{j_1'j_2'} q_{j_1j_2} q_{j_1'j_2'}\right)\Big],$$

$$f = -10\left(2\left(\frac{L}{K}\right)^{3/2}\right)^{1/2}\sum_{j_1j_2j_1'j_2'j'}\Big[G^2_{\xi}(j_1j_2;j_2'j_1') v^{(+)}_{j_1j_2} u^{(+)}_{j_1'j_2'} +$$
$$+2(-1)^{j_1'-j_2'} G^2_{\omega}(j_1j_2;j_1'j_2') u^{(+)}_{j_1j_2} v^{(+)}_{j_1'j_2'}\Big]\times$$
$$\times(-1)^{j_2'-j'}\begin{Bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ j' & j_1' & j_2' \end{Bmatrix} p_{j_1j_2} p_{j_1'j'} p_{j_2'j'},$$

$$G^2_{\xi}(j_1j_2;j_2'j_1') = \sum_{m_1m_2m_1'm_2'} G_{\xi}(j_1m_1, j_2m_2; j_2'm_2', j_1'm_1')\times$$
$$\times C^{2M}_{j_1m_1j_2m_2} C^{2M}_{j_1'm_1'j_2'm_2'},$$

$$G^2_{\omega}(j_1j_2;j_2'j_1') = \sum_{m_1m_2m_1'm_2'} G_{\omega}(j_1m_1, j_1'm_1'; j_2m_2, j_2'm_2')\times$$
$$\times(-1)^{j_1'+j_2'+m_1+m_2'} C^{2M}_{j_1m_1j_1'-m_1'} C^{2M}_{j_2m_2j_2'-m_2'}.$$

Здесь ϵ_j - энергии квазичастиц [8],

$$u^{(\pm)}_{jj'} = u_j v_{j'} \pm u_{j'} v_j,$$

$$v^{(\pm)}_{jj'} = u_j u_{j'} \mp v_j v_{j'}.$$

Литература

1. С.Т.Беляев, В.Г.Зелевинский. ЯФ, 16, 1195, 1972.
2. О.Бор. Проблемы современной физики, №9, стр. 3, 1955.
   А.С.Давыдов. Возбужденные состояния атомных ядер. Атомиздат, 1967.
3. а/ С.Т.Беляев, Б.А.Румянцев. ЯФ 3, 234 /1966/.
   б/ M.Brack, J.Damgaard, A.S.Jensen, H.C.Pauli, V.M.Strutinsky and C.Y.Wong. Rev.Mod.Phys., 44, 320, 1972.
   D.A.Arseniev, A.Sobiczewski and V.G.Soloviev. Nucl.Phys., A139, 269, 1969.
   R.K.Sheline, I.Ragnarsson, S.G.Nilsson. Phys. Lett., 41B, 115, 1972.
4. B.Sorensen. Nucl.Phys., A142, 411, 1970.
5. D.R.Bes, G.G.Dussel. Nucl.Phys., A135, 1, 1969.
6. D.Janssen, F.Dönau, S.Frauendorf, R.Jolos. Nucl. Phys., A172, 145, 1971.
   В.Г.Картавенко, Р.В.Джолос, Ф.Дэнау, Д.Янсен. ТМФ 14, 70, 1973.
7. В.Г.Картавенко, Р.В.Джолос. Препринт ОИЯИ, Р4-6781, Дубна, 1973.
8. В.Г.Соловьев. Теория сложных ядер. Наука, 1971.
9. А.Б.Мигдал. Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. Наука, 1968.
   Р.В.Джолос, В.Г.Соловьев. ЭЧАЯ, т. 1, 365, 1971.
10. С.Т.Беляев, В.Г.Зелевинский. ЖЭТФ, 42, 1590, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 мая 1973 года.