

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



С326  
3-144

18/41

P4 - 7143

В.А. Загребнов

2222/2-73

МЕТОД ИНФРАКРАСНОЙ АСИМПТОТИКИ  
В МОДЕЛИ ИЗИНГА II

(Корреляционная функция в критической области)

**1973**

**ЛАБОРАТОРИЯ  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

P4 - 7143

В.А. Загребнов

МЕТОД ИНФРАКРАСНОЙ АСИМПТОТИКИ  
В МОДЕЛИ ИЗИНГА II

(Корреляционная функция в критической области)

*Направлено в Acta Physica Polonica*

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

### Summary

A method similar to the infrared branching investigation in field theory, developed in the first paper<sup>/1/</sup>, is applied now to the problem of evaluation of the critical exponent

$\eta_d$ . Asymptotics in microscopic and macroscopic critical regions are obtained. It is shown, that for dimensions:  $2 < d < 4$  the asymptotics of pair correlation function is nonclassical. It has nonzero critical branching exponent  $\eta_d$  in the microscopic region and a temperature deviation factor in the macroscopic one. When  $d$  tends to 4 the formal expression for  $\eta_{d \leq 4}$  converges to zero, but the direct calculations demonstrate a logarithmic branching and a temperature renormalization for  $d=4$ . For

$d > 4$  the pair correlation manifests a classical behaviour in the whole critical region. In the intermediate critical region the asymptotic has a "macroscopic character" contrarily to strong scaling proposition by M. Fisher<sup>/4/</sup>.

The evaluation for  $\eta_{d=3} \approx 0.40$  is much greater than Wilson-Fisher's results<sup>/11,12/</sup>, experimental and numerical data having values:  $\eta_{d=3} \approx 0.041 + 0.1$  <sup>/4,6/</sup>. The difficulties in the case of  $d=2$  are discussed. Higher corrections by the infrared evaluation method will be considered elsewhere.

### §1. ВВЕДЕНИЕ

Как показано в работе <sup>/1/</sup>, имеется сходство между проблемой исследования асимптотик двухточечной функции  $d$ -мерной модели Изинга  $R_d(\tau, \kappa) = \langle \tilde{\phi}_\tau \tilde{\phi}_0 \rangle$  (или ее фурье-образа  $\tilde{R}_d(p, \kappa)$ ) в парамагнитной критической области:  $0 < \tau = \frac{\theta - \theta_c}{\theta_c} \ll 1$ ,  $\tau \gg \lambda$  (или  $p\lambda \ll 1$ ),  $h=0$  <sup>\*/</sup> и задачей вычисления инфракрасного ветвления функций Грина (или пропагаторов) в теории поля при наличии квантов с массой покоя  $m_0 \rightarrow 0$  <sup>/2/</sup>. Это позволяет для исследования  $\tilde{R}_d(p, \kappa)$  в критической области сформулировать методику, которая близка к технике вычисления инфракрасной асимптотики, причем массе  $m_0$  соответствует параметр  $\kappa \sim \tau^{\nu/4}$ . Для фурье-образа  $\tilde{R}_d(p, \kappa)$  в парамагнитной критической области получено представление <sup>/1/</sup>:

$$\tilde{R}_d(p, \kappa) \Big|_{\substack{\kappa \ll 1 \\ p\lambda \ll 1}} \approx \frac{\text{Re} \left\{ i \int_0^\infty dz \exp[-iz - f_d(\frac{z}{\lambda^2 p^2 + \kappa^2}, p^2, \kappa^2)] \right\}}{2\kappa(\lambda^2 p^2 + \kappa^2)}, \quad (1)$$

где

$$f_d(\nu, p^2, \kappa^2) = \int_{\Omega_d} dk D(\nu, \tau, p, \kappa) \Pi_d^{-1}(k, \kappa) D(\nu, \tau, p, -k), \quad (2)$$

$$K = J/2\theta,$$

и

$$D(\nu, \tau, p, k) = \frac{\{ \exp[-i(k^2 + 2pk)\lambda^2 \nu] - 1 \} e^{ik\tau}}{\lambda^2(k^2 + 2pk)}, \quad (3)$$

$$\Pi_d(k, \kappa) = \int_{\Omega_d} dq \mathcal{G}_0(q) \mathcal{G}_0(k+q), \quad \mathcal{G}_0(q) = (\lambda^2 q^2 + \kappa^2)^{-1}. \quad (4)$$

<sup>\*/</sup> Т.е. при нулевом внешнем поле  $h$ , для температуры больше или равной критической  $\theta_c$  и расстояний между спинами, гораздо больших радиуса взаимодействия  $\lambda$ .

Интегрирование в (2), (4) ведется по первой зоне Бриллюэна  $\Omega_d$  с обрезанным импульсом  $L = a_0^{-1}$ ,  $a_0$  - параметр решетки, в узлах которой сосредоточены спины. Классическое выражение Орнштейна-Цернике для  $\tilde{R}_d^{(0)}(p, \kappa)$  имеет в критической области вид /1,3/:

$$\tilde{R}_d^{(0)}(p, \kappa) \Big|_{\substack{\kappa \ll 1 \\ p\lambda \ll 1}} \approx \frac{1}{\lambda^2 p^2 + \kappa^2} \quad (5)$$

Из (1) следует, что отклонение асимптотики  $\tilde{R}_d(p, \kappa)$  от  $\tilde{R}_d^{(0)}(p, \kappa)$  определяется поведением  $f_d(\nu, p^2, \kappa^2)$  при  $\nu \gg 1$  /2/.

В /1/ отмечалось, что в микроскопической критической области:  $\kappa \ll 1$ ,  $\lambda p \ll 1$ ,  $\kappa/\lambda p \ll 1$ , т.е. внутри радиуса корреляции:  $\lambda \ll \tau \ll \tau_c(\kappa) = \lambda/\kappa$ ,  $R_d^{(0)}(\tau, \kappa)$  и  $R_d(\tau, \kappa)$  спадают степенным образом \*/:

$$R_{d>2}^{(0)}(\tau, \kappa) \Big|_{\substack{\tau \gg \lambda \\ \tau \ll \tau_c}} \approx \frac{D_d^{(0)} e^{-\tau/\tau_c}}{\tau^{d-2}}; \quad R_d(\tau, \kappa) \Big|_{\substack{\tau \gg \lambda \\ \tau \ll \tau_c}} \approx \frac{D_d e^{-\tau/\tau_c}}{\tau^{d-2+\eta_d}}; \quad (6)$$

$$R_{d=2}^{(0)} \Big|_{\substack{\tau \gg \lambda \\ \tau \ll \tau_c}} \approx D_{d=2}^{(0)} e^{-\tau/\tau_c} \ln \frac{2\lambda}{\kappa\tau},$$

а в макроскопической критической области:  $\kappa \ll 1$ ,  $\lambda p \ll 1$ ,  $\kappa/\lambda p \gg 1$ , т.е. вне корреляции:  $\tau \gg \tau_c(\kappa)$  - экспоненциально:

$$R_d^{(0)}(\tau, \kappa) \Big|_{\substack{\kappa \ll 1 \\ \tau \gg \tau_c}} \approx \frac{B_d^{(0)} \kappa^{(d-3)/2}}{\tau^{(d-1)/2}} e^{-\tau/\tau_c}; \quad R_d(\tau, \kappa) \Big|_{\substack{\kappa \ll 1 \\ \tau \gg \tau_c}} \approx \frac{B_d \kappa^{(d-3)/2+\eta_d}}{\tau^{(d-1)/2}} e^{-\tau/\tau_c} \quad (7)$$

\*/ В промежуточной критической области:  $\kappa \ll 1$ ,  $\lambda p \ll 1$ ,  $\kappa/\lambda p \sim 1$  имеем для  $R_d^{(0)}(\tau, \kappa) \Big|_{\substack{\kappa \ll 1 \\ \tau \sim \tau_c}} \approx \frac{F_d^{(0)}}{\tau^{d-2}} e^{-\tau/\tau_c}$  /1/.

Критический индекс  $\eta_d$  /1,4/ характеризует отклонение асимптотик двухточечной корреляционной функции  $R_d(\tau, \kappa)$  (или  $\tilde{R}_d(p, \kappa)$ ) от классического поведения, причем пространственная асимптотика в макроскопической области совпадает с классической (с точностью до температурного фактора  $\kappa^{\eta_d}$ ) даже для  $d=2$  (ср. (6) и (7)). На основе анализа  $R_{d=2}(\tau, \kappa)$  /5/, а также экспериментальных данных и численных расчетов для  $R_{d=3}(\tau, \kappa)$  в /4,6/ было сделано предположение об универсальной однородности (сильный скейлинг) функций  $R_d(\tau, \kappa)$ ,  $\tilde{R}_d(p, \kappa)$  в критической области, т.е. при  $0 < \kappa \ll 1$ ,  $\tau \gg \lambda$  ( $p\lambda \ll 1$ ) и произвольных  $\tau/\tau_c(\kappa)$  ( $p\lambda/\kappa$ ):

$$R_d(\tau, \kappa) \Big|_{\substack{\kappa \ll 1 \\ \tau \gg \lambda}} \approx D_d \left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^{d-2+\eta_d} e^{-\tau/\tau_c} \left[1 + Q_d\left(\frac{\tau\kappa}{\lambda}\right)\right] \lambda^{2-\eta_d}; \quad (8)$$

$$\tilde{R}_d(p, \kappa) \Big|_{\substack{\kappa \ll 1 \\ \lambda p \ll 1}} \approx \frac{\tilde{D}_d}{(\lambda^2 p^2 + \kappa^2)^{1-\eta_d/2}} \left[1 + \tilde{Q}_d\left(\frac{\kappa}{\lambda p}\right)\right],$$

где

$$Q_d(x) \Big|_{x \rightarrow 0} = 0; \quad Q_d(x) \Big|_{x \rightarrow \infty} = x^{(d-3)/2+\eta_d}; \quad (9)$$

$$\tilde{Q}_d(y) \approx \text{Const.}$$

Гипотеза сильного скейлинга хорошо согласуется с поведением  $R_{d=2}(\tau, \kappa)$ ,  $\tilde{R}_{d=2}(p, \kappa)$  во всей критической области,  $\eta_{d=2} = 1/4$  /5-8/. Для  $d=3$ , как показано в работе /7/ из анализа высокотемпературных разложений, представление \*/

\*/ Причем  $\eta_{d=3}$  в (10) совпадает с критическим индексом в микроскопической области:  $\tilde{R}_d(p, \kappa) \sim (\lambda^2 p^2 + \kappa^2)^{-1+\eta_d/2}$ , что подтверждает предположение универсальности в слабой форме (слабый скейлинг) /7,8/.

$$\tilde{R}_d(p, \kappa) \sim \frac{\kappa \eta_d}{\lambda^2 p^2 + \kappa^2} \quad (10)$$

справедливо не только в макроскопической критической области ( $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$  см. (8), (9)), как для  $d=2$ , а уже при  $x \gg 0.1$ ,  $y \gg 0.1$ , т.е. начиная с промежуточной критической области.

В настоящей работе с помощью представления (I) проведено исследование асимптотик  $\tilde{R}_d(p, \kappa)$ , по которым легко восстанавливается поведение  $R_d(\tau, \kappa) = \langle \tilde{\epsilon}_\tau \tilde{\epsilon}_0 \rangle$  (см. (8)) во всей критической области. Показано, что метод инфракрасной асимптотики Изинга позволяет для  $d > 2$  определить критический индекс  $\eta_d$  как функцию непрерывно изменяющегося параметра размерности модели  $d$ . В заключение проведено сравнение полученных асимптотик с численным анализом высокотемпературных разложений и результатами других методов исследования корреляционной функции  $R_d(\tau, \kappa)$ .

## §2. МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ КРИТИЧЕСКАЯ ОБЛАСТЬ

С помощью (4) выражение для  $\Pi_d(k, \kappa)$  можно представить в виде:

$$\Pi_d(k, \kappa) = S_{d-1} \frac{k^{d-4}}{\lambda^4} Y_d(L/k, \frac{\kappa}{k\lambda} = m), \quad (11)$$

где

$$Y_d(L/k, m) = \int_0^{L/k} \frac{dx x^{d-1}}{x^2 + m^2} \int_0^\pi \frac{(\sin \theta)^{d-2} d\theta}{1 + x^2 + 2x \cos \theta + m^2}; \quad (12)$$

$$S_d = 2 \pi^{d/2} [\Gamma(d/2)]^{-1}.$$

Поскольку (12) допускает продолжение на нецелые  $d$  ( $\Gamma(x)$  - гамма-функция),  $\Pi_d(k, \kappa)$ ,  $f_d(\nu, p^2, \kappa^2)$  и  $\tilde{R}_d(p, \kappa)$  можно определить, как функции непрерывного параметра размерности  $d$  при  $\kappa > 0$

для  $d > 1$ , при  $\kappa = 0$  для  $d > 2$ . Асимптотика  $f_d(\nu, p^2, \kappa^2) \Big|_{\nu \rightarrow \infty}$  (2), определяющая поведение  $\tilde{R}_d(p, \kappa)$  в критической области  $\kappa \ll 1$ ,  $p\lambda \ll 1$  (см. (I)), регулярна в точке  $p^2 = 0$  при любом фиксированном  $\kappa$  (см. Приложение):

$$f_d(\nu, p^2, \kappa^2) \Big|_{\lambda p \ll 1} = f_d(\nu, 0, \kappa^2) + o(\lambda p) \varphi_d(\nu, \kappa^2), \quad (13)$$

где  $\varphi_d(\nu, \kappa^2) \Big|_{\nu \gg 1} \approx C(\kappa^2)$ . Таким образом, поведение  $f_d(\nu, p^2, \kappa^2)$  в критической области при  $\nu \gg 1$  определяется функцией  $f_d(\nu, 0, \kappa^2)$  (13), для которой из (2), (3) и (II), (I2) получаем:

$$f_d(\nu, p^2 = 0, \kappa^2) = \frac{S_d}{S_{d-1}} \int_0^L \frac{(e^{-ik^2 \lambda^2 \nu} - 1)^2}{k} \frac{dk}{Y_d(L/k, m)}. \quad (14)$$

Из выражения (14) следует, что асимптотика  $f_d(\nu, 0, \kappa^2) \Big|_{\nu \gg 1}$  определяется поведением  $Y_d(L/k, \frac{\kappa}{\lambda k})$  при малых  $k$  ( $k \ll L$ ):

$$f_d(\nu, 0, \kappa^2) = \frac{S_d}{2 S_{d-1}} \int_0^{L^2 \nu} \frac{(e^{-i\lambda^2 \xi} - 1)^2}{\xi} \frac{d\xi}{Y_d(L \frac{\nu^{1/2}}{\xi^{1/2}}, \frac{\kappa \nu^{1/2}}{\lambda \xi^{1/2}})}. \quad (15)$$

Рассмотрим микроскопическую критическую область:  $\kappa \ll 1$ ,  $\lambda p \ll 1$ ,  $\frac{\kappa}{\lambda p} \ll 1$ , которая включает в себя критический случай  $\kappa = 0$  ( $\theta = \theta_c$ ). Подынтегральное выражение в (12) при  $m = \frac{\kappa}{k\lambda} = 0$  в точке  $x = 1$  имеет особенность, которая для всех  $d > 2$  является интегрируемой, т.е.  $Y_{d,2}(L/k, m)$ , определяющая  $\Pi_{d,2}(k, \kappa)$  (II), является непрерывной функцией в окрестности  $\kappa = 0$  и  $k \neq 0$ . В то же время поведение  $\Pi_{d,2}(k, \kappa)$  в окрестности  $k = 0$ , которое определяет асимптотику  $f_d(\nu, p^2, \kappa^2)$  при  $\nu \gg 1$  (13-15), существенно различно для  $\kappa = 0$  и произвольного  $0 < \kappa \ll 1$  (см. (12))<sup>\*/</sup>.

<sup>\*/</sup> Например,  $Y_{d,2}(L/k, m) = 2 \operatorname{Arctg} \frac{k\lambda}{\kappa} \cdot \operatorname{Arctg} \frac{L}{k\lambda}$ .

Поскольку нас интересует микроскопическая критическая область, необходимо рассматривать  $\Pi_d(k, \kappa)$  при  $\kappa=0$ , так как при любом конечном  $\kappa > 0$  можно попасть вне ее <sup>13,4/</sup> ( $\Pi_d$  - не зависит от  $p$ :  $p\lambda \ll 1$ ,  $\frac{\kappa}{p\lambda} \ll 1$ ), где поведение  $f_d(\nu, p^2, \kappa^2)|_{\nu \gg 1}$  существенно отличается от асимптотики  $f_d(\nu, p^2, \kappa^2=0)|_{\nu \gg 1}$  (15). Из выражения для  $Y_d(L/k, m=0)$  (12) получаем:

$$Y_{2 < d < 4}(L/k, m=0) \Big|_{k \ll L} = \int_0^\infty dx x^{d-3} \int_0^\pi \frac{(\sin \theta)^{d-2} d\theta}{1+x^2+2x \cos \theta} \equiv Y_{2 < d < 4}(\infty, 0);$$

$$Y_{d=4}(L/k, m=0) \Big|_{k \ll L} = \int_0^{L/k} dx x \int_0^\pi \frac{(\sin \theta)^2 d\theta}{1+x^2+2x \cos \theta} \Big|_{k \ll L} = \frac{\pi}{4} (1+2 \ln L/k);$$

$$Y_{d>4}(L/k, m=0) \Big|_{k \ll L} = \int_0^{L/k} dx x^{d-3} \int_0^\pi \frac{(\sin \theta)^{d-2} d\theta}{1+x^2+2x \cos \theta} \Big|_{k \ll L} \approx X_d \left(\frac{L}{k}\right)^{d-4} \quad (16)$$

Учитывая (13), оценим с помощью (15), (16)  $f_d(\nu, p^2=0, \kappa^2=0)|_{\nu \gg 1}$ , которая при  $(\lambda^2 p^2 + \kappa^2) \ll 1$  дает главный вклад в асимптотику  $f_d(\nu, p^2, \kappa^2)|_{\nu \gg 1}$  в микроскопической критической области. При  $2 < d < 4$  получаем:

$$f_d(\nu, p^2=0, \kappa^2=0) \Big|_{\nu \gg 1} = \frac{S_d}{2 S_{d-1} Y_d(\infty, 0)} \int_0^{L^2 \nu} \frac{(e^{-i\lambda^2 \xi} - 1)^2 d\xi}{\xi} \Big|_{\nu \gg 1} \approx$$

$$\approx \frac{S_d}{2 S_{d-1} Y_d(\infty, 0)} \ln \nu + \text{Const} \quad (17)$$

При  $d=4$ :

$$f_{d=4}(\nu, p^2=0, \kappa^2=0) \Big|_{\nu \gg 1} \approx \frac{S_4}{2 S_3} \frac{4}{\pi} \int_0^{L^2 \nu} \frac{(e^{-i\lambda^2 \xi} - 1)^2 d\xi}{\xi (1 + \ln \frac{L^2 \nu}{\xi})} \Big|_{\nu \gg 1} \approx (18)$$

$$\approx \ln |\ln \nu|.$$

При  $d > 4$ :

$$f_{d>4}(\nu, p^2=0, \kappa^2=0) \Big|_{\nu \gg 1} \approx \frac{S_d}{2 S_{d-1}} \int_0^{L^2 \nu} \frac{(e^{-i\lambda^2 \xi} - 1)^2 \nu^{(4-d)/2} d\xi}{\xi^{(6-d)/2} X_d L^{d-4}} \Big|_{\nu \gg 1} \approx \text{Const} \quad (19)$$

Таким образом, из (1) и (17) получаем для  $\tilde{R}_{2 < d < 4}(p, \kappa)$  в микроскопической критической области выражение (ср. (8)):

$$\tilde{R}_{2 < d < 4}(p, \kappa) \Big|_{\substack{p\lambda \ll 1 \\ \kappa/p\lambda \ll 1}} \approx \frac{1}{2K} \frac{J_d}{(\lambda^2 p^2 + \kappa^2)^{1-\eta_d/2}}, \quad (20)$$

где

$$J_d = \text{Re} \left[ i \int_0^\infty e^{-iz} z^{-\eta_d/2} dz \right]; \quad \eta_d = \frac{S_d}{S_{d-1} Y_d(\infty, 0)}, \quad (21)$$

т.е. для моделей с размерностями  $2 < d < 4$  асимптотика

$\tilde{R}_d(p, \kappa) \Big|_{\substack{p\lambda \ll 1 \\ \kappa/p\lambda \ll 1}}$  отклоняется от классического поведения в этой области (5), что характеризуется критическим индексом ветвления  $\eta_{2 < d < 4} = \frac{S_d}{S_{d-1} Y_d(\infty, 0)}$  (8). Из (21), с учетом  $\lim_{d \rightarrow 4-0} Y_d(\infty, 0) = \infty$  (16), получаем  $\eta_{d \rightarrow 4-0} \rightarrow 0$ , однако прямое вычисление с помощью (18) дает:

$$\tilde{R}_{d=4}(p, \kappa) \Big|_{\substack{p\lambda \ll 1 \\ \kappa/p\lambda \ll 1}} \approx \frac{1}{2K} \frac{\text{Re} \left[ i \int_{\Lambda \gg 1}^\infty dz e^{-iz} \left| \ln \frac{z}{\lambda^2 p^2 + \kappa^2} \right|^{-1} \right]}{\lambda^2 p^2 + \kappa^2} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2K} \frac{\tilde{P}_{d=4}(p^2, \kappa^2)}{(\lambda^2 p^2 + \kappa^2) |\ln(\lambda^2 p^2 + \kappa^2)|}, \quad (22)$$

где  $\tilde{P}_{d=4}(p^2, \kappa^2) = \text{Re} \left[ i \int_{\Lambda(\lambda^2 p^2 + \kappa^2)}^\infty dz e^{-iz} \left| \frac{\ln z}{\ln(\lambda^2 p^2 + \kappa^2)} - 1 \right|^{-1} \right]$  ограниченная гладкая функция  $p^2, \kappa^2$ . Для  $R_{d=4}(\tau, \kappa)$  соответственно получаем:

$$R_{d=4}(\tau, \varepsilon) \Big|_{\substack{\tau \ll \tau_c(\varepsilon) \\ \tau \gg \lambda}} \approx \frac{1}{2K(2\pi)^2} \frac{P_{d=4}(\tau) \lambda^{-2} e^{-\tau/\lambda}}{\tau^2 \ln \tau^2/\lambda^2}, \quad (23)$$

где  $P_{d=4}(\tau) = \int_0^\infty J_1(x) \left| \frac{\ln x^2}{\ln \tau^2/\lambda^2} - 1 \right|^{-1} dx$  также гладкая ограниченная функция  $\tau^{-1/2}$ . Из сравнения (22), (23) и (5), (6), (8) видно, что при  $d=4$  в микроскопической критической области имеет место неклассическое поведение с критическим индексом  $\eta_{d=4} = 0$  и логарифмическим ветвлением. При  $d > 4$  из (I) и (I9) следует, что асимптотика  $\tilde{R}_{d>4}(p, \varepsilon)$  в микроскопической области имеет классический вид (5) с  $\eta_{d>4} = 0$ :

$$\tilde{R}_{d>4}(p, \varepsilon) \Big|_{\substack{p\lambda \ll 1 \\ \varepsilon/p\lambda \ll 1}} \approx \frac{1}{2K} \frac{\tilde{P}_{d>4}(p^2, \varepsilon^2)}{(\lambda^2 p^2 + \varepsilon^2)}; \quad (24)$$

$$\tilde{P}_{d>4}(p^2, \varepsilon^2) \Big|_{\substack{p\lambda \ll 1 \\ \varepsilon/p\lambda \ll 1}} \approx \operatorname{Re} \left[ i \int_0^\infty dz e^{-iz} \exp \left\{ -f_{d>4} \left( \frac{z}{\lambda^2 p^2 + \varepsilon^2}, p^2, \varepsilon^2 \right) \right\} \right] \Big|_{\substack{p\lambda \ll 1 \\ \varepsilon/p\lambda \ll 1}} \approx \exp \left\{ -f_{d>4}(\infty, 0, 0) \right\}.$$

Применение излагаемого метода к  $d=2$  в микроскопической критической области приводит к трудностям, связанным в первую очередь с расходимостью интегралов (I2) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $m \rightarrow 0$ ):

$$Y_{d=2}(L/k, \frac{\varepsilon}{k\lambda}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{k^2 \lambda^2}{\varepsilon^2} & \text{при } \frac{\varepsilon}{k\lambda} \gg 1, \varepsilon \ll 1 \\ \frac{\pi}{2} \ln \frac{2k^2 \lambda^2}{\varepsilon^2} & \text{при } \frac{\varepsilon}{k\lambda} \ll 1, k \ll L \end{cases} \quad (25)$$

$$\varepsilon / \lim_{(\lambda^2 p^2 + \varepsilon^2) \rightarrow 0} \tilde{P}_{d=4}(p^2, \varepsilon^2) = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} P_{d=4}(\tau) = 1.$$

Причем формально из (2I) и (25) получаем  $\lim_{d \rightarrow 2+0} \eta_d = 0$ . Как отмечалось в /I/, "нулевым" приближением для  $\tilde{R}_d$  является классическое выражение (5), которое соответствует в (I)  $f_d(\nu, p^2, \varepsilon^2) \equiv 0$ . В микроскопической области  $R_{d=2}^{(0)}(\tau, \varepsilon)$  является функцией, логарифмически растущей при  $\tau \gg \lambda$  (6). Это нефизическое поведение корреляционной функции, приводящее, в частности, к расходимостям  $Y_{d=2}(L/k, m)$  (25), означает, что  $\mathcal{G}_0(k, \varepsilon)$  и, соответственно, (5) не являются хорошим исходным приближением для  $\tilde{R}_{d=2}(p^2, \varepsilon^2)$  в этой критической подобласти (см. также §4).

### §3. МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ КРИТИЧЕСКАЯ ОБЛАСТЬ

В макроскопической критической области  $\varepsilon/p\lambda \gg 1$  при  $p\lambda \ll 1$  и  $\varepsilon \ll 1$  (см. §I), т.е.  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Последнее, как установлено в §2, приводит к существенной перестройке поведения  $Y_d(L/k, m)$  при малых  $k$  (I2), по сравнению со случаем  $\varepsilon = 0$ , и соответствующему изменению асимптотики  $f_d(\nu, p^2, \varepsilon^2) \Big|_{\nu \gg 1}$ . При интегрировании в (I4) по малым  $k$  необходимо учитывать теперь наличие двух подобластей:  $m \gg 1$  и  $m \ll 1$  ( $0 < \varepsilon \ll 1, k \ll L$ ). Из (I2) получаем, что в первой из них  $Y_d(L/k, m)$  имеет вид:

$$Y_{2 < d < 4}(L/k, m) \Big|_{\substack{k \ll L \\ m \gg 1}} \approx A_d \left( \frac{\varepsilon}{k\lambda} \right)^{d-4}; \quad (26)$$

$$Y_{d=4}(L/k, m) \Big|_{\substack{\varepsilon \ll 1 \\ m \gg 1}} \approx A_{d=4} \ln \frac{L^2 \lambda^2}{\varepsilon^2};$$

$$Y_{d>4}(L/k, m) \Big|_{\substack{\varepsilon \ll 1 \\ m \gg 1}} \approx A_d \left( \frac{\varepsilon}{k\lambda} \right)^{-4} \left( \frac{L}{k} \right)^d.$$

Во второй поведение  $Y_d(L/k, m)$  совпадает с (16), причем такой же вид  $Y_d(L/k, m)$  имеет в более широкой промежуточной области  $m = \frac{x}{k\lambda} \sim 1, 0 < x \ll 1, k \ll L$  \*/. Из (15), (16) и (26) получаем для асимптотик  $f_d(\nu, p^2, x^2) \Big|_{\nu \gg 1}$  следующие выражения:

$$f_{d=2}(\nu, p^2, x^2) \Big|_{\substack{\nu \gg 1 \\ x \ll 1 \\ \frac{x}{p\lambda} \gg 1}} \approx \frac{S_d}{2S_{d-1}A_d} \frac{\nu x^2}{\lambda^2} + \frac{S_d}{2S_{d-1}Y_d(\infty, 1)} \ln(x\lambda^{-2});$$

$$f_{2 < d < 4}(\nu, p^2, x^2) \Big|_{\substack{\nu \gg 1 \\ x \ll 1 \\ \frac{x}{p\lambda} \gg 1}} \approx \frac{S_d}{2S_{d-1}A_d} \frac{(\nu x^2)^{(4-d)/2}}{\lambda^{4-d}} + \frac{S_d}{2S_{d-1}Y_d(\infty, 0)} \ln(x\lambda^{-2}); \quad (27)$$

$$f_{d=4}(\nu, p^2, x^2) \Big|_{\substack{\nu \gg 1 \\ x \ll 1 \\ \frac{x}{p\lambda} \gg 1}} \approx \frac{S_d}{2S_{d-1}} \frac{\ln \nu x^2}{\ln \frac{L^2 \lambda^2}{x^2}} + \frac{S_d}{2S_{d-1}} \frac{1}{4} \ln |\ln x\lambda^{-2}|;$$

$$f_{d>4}(\nu, p^2, x^2) \Big|_{\substack{\nu \gg 1 \\ x \ll 1 \\ \frac{x}{p\lambda} \gg 1}} \approx \frac{S_d}{2S_{d-1}A_d} \frac{x^4}{\lambda^4} + \frac{S_d}{2S_{d-1}X_d}.$$

Учитывая, что при  $f_d(\nu, p^2, x^2) \Big|_{\nu \gg 1} \sim \nu^\alpha (\lambda^2 p^2 + x^2)^\alpha$  и  $d \leq 1$  асимптотика (I) в критической области остается такой же, как в случае  $f_d(\nu, p^2, x^2) \Big|_{\nu \gg 1} \sim \text{const}$ , из (I) и (27) получаем:

$$\tilde{R}_{d=2}(p, x) \Big|_{\substack{x \ll 1 \\ \frac{x}{p\lambda} \gg 1}} \approx \frac{1}{2K} \frac{x^{\eta_d}}{(\lambda^2 p^2 + x^2)} I_d; \quad \eta_{d=2} = \frac{S_d}{S_{d-1}Y_d(\infty, 1)}; \quad (28)$$

$$\tilde{R}_{2 < d < 4}(p, x) \Big|_{\substack{x \ll 1 \\ \frac{x}{p\lambda} \gg 1}} \approx \frac{1}{2K} \frac{x^{\eta_d}}{(\lambda^2 p^2 + x^2)} I_d; \quad \eta_d = \frac{S_d}{S_{d-1}Y_d(\infty, 0)}, \quad (29)$$

где  $I_d = \text{Re} \left[ i \int_0^\infty \exp(-iz - \frac{S_d z^{(4-d)/2}}{2S_{d-1}A_d \lambda^{4-d}}) dz \right].$

\*/ Например:  $Y_{d=3}(L/k, m) \Big|_{m \ll 1, k \ll L} \approx 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2;$

$Y_{d=3}(L/k, m) \Big|_{m \sim 1, k \ll L} \approx \pi \text{arctg } 1$  (см. §2).

Следовательно, предлагаемый метод оценки поведения  $\tilde{R}_{2 < d < 4}(p, x)$  в макроскопической и промежуточной критических областях дает результат, совпадающий с классическим (5) с точностью до температурного фактора  $x^{\eta_d}$ , показатель которого для  $2 < d < 4$  совпадает с критическим индексом ветвления в микроскопической области (ср. (21), (29)).

Наличие в выражении для  $f_{d=4}(\nu, p^2, x^2) \Big|_{\nu \gg 1}$  (27) логарифмического члена  $\ln \nu x^2$  приводит для  $\tilde{R}_{d=4}(p, x)$ :

$$\tilde{R}_{d=4}(p, x) \Big|_{\substack{x \ll 1 \\ \frac{x}{p\lambda} \gg 1}} \approx \frac{1}{2K} \frac{I_{d=4}}{(\lambda^2 p^2 + x^2)^{1-\chi(x)} |\ln x\lambda^{-2}|} \approx \frac{I_{d=4} |\ln x\lambda^{-2}|^{-1}}{2K (\lambda^2 p^2 + x^2)}, \quad (30)$$

где  $\chi(x) = \frac{S_d}{2S_{d-1} \frac{\pi}{4} \ln \frac{L^2 \lambda^2}{x^2}}$  асимптотически малый индекс ветвления  $\chi(x) \Big|_{x \ll 1} \approx 0$ . Соответственно для  $R_d(\tau, x)$ :

$$R_{d=4}(\tau, x) \Big|_{\substack{\tau \gg \tau_c(x) \\ x \ll 1}} \approx \frac{1}{2K(2\tau)^2} \frac{I_{d=4} |\ln x\lambda^{-2}|^{-1}}{\tau^2} e^{-\tau/\tau_c} \quad (31)$$

т.е. для  $d=4$  в макроскопической (и промежуточной) критической области так же, как и микроскопической (22), (23), имеет место неклассическое поведение с логарифмическим температурным фактором  $|\ln x\lambda^{-2}|^{-1}$  при формальном значении критического индекса, равном нулю:  $\lim_{d \rightarrow 4-0} \eta_d = 0$  (29).

Наконец, для  $d > 4$  из (I) и (27) получаем асимптотику  $\tilde{R}_{d>4}(p, x)$ , совпадающую с классической (5), т.е.  $\eta_{d>4} = 0$ :

$$\tilde{R}_{d>4}(p, x) \Big|_{\substack{x \ll 1 \\ \frac{x}{p\lambda} \gg 1}} \approx \frac{1}{2K} \frac{I_{d>4}}{(\lambda^2 p^2 + x^2)}. \quad (32)$$



#### §4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Отметим в первую очередь, что полученное методом инфракрасной асимптотики поведение двухточечной корреляционной функции в критической области для моделей с  $d > 2$  (20-24) и (29-32) удовлетворяет гипотезе однородности (8) в ее слабой форме /7,8/, т.е. только в микроскопической и макроскопической подобластях<sup>\*/</sup>. Это подтверждается для  $d=3$  анализом высокотемпературных разложений /7/ (см. §1) и означает, что область, где имеет место "микроскопическая" асимптотика с критическим индексом ветвления  $\eta_d$  (см. (8)), при переходе к моделям с  $d > 2$  сужается. Так как в промежуточной критической подобласти:  $z \sim z_c(x)$ ,  $x \ll 1$ ,  $z \gg \lambda$  для  $d > 2$ , в отличие от  $d=2$ , имеет место представление (10) (ср. с (8) при  $x \sim 1$ ,  $y \sim 1$ ), которое справедливо и в макроскопической области.

Далее, как установлено в §2, ветвление корреляционной функции (6), (20) в микроскопической критической области с ненулевым индексом  $\eta_d$  исчезает для размерности модели  $d=4$ :  $\lim_{d \rightarrow 4} \eta_d = 0$  (21). Аналогичным образом ведет себя показатель  $\eta_d$  (29) температурного фактора асимптотики  $\tilde{R}_d(p, x)$  в макроскопической области, поскольку установлено, что  $\eta_d$  (21) и  $\eta_d$  (29) совпадают (слабый скейлинг /7,8/). Однако поведение  $\tilde{R}_{d=4}(p, x)$  и, соответственно,  $R_{d=4}(z, x)$  (22), (23) и (30, 31) не является классическим (5-7). Наконец, при  $d > 4$  получаем  $\eta_{d>4} = 0$  (24), (32). Таким образом,  $d=4$  отделяет область классического поведения корреляционной функции  $\tilde{R}_d(p, x)$ ,  $R_d(z, x)$ , где  $\eta_{d>4} = 0$ , от раз-

<sup>\*/</sup> Обобщение условий слабого скейлинга /7/ на случай логарифмического ветвления и  $\eta_{d>4} = 0$  очевидно (8).

мерностей  $d < 4$ , для которых  $\eta_{d<4} > 0$ . Установленная зависимость критического индекса  $\eta_d$  от размерности подтверждается численными расчетами /4,10/, а также согласуется с оценками, полученными Фишером и Вильсоном /11,12/, которым, однако, не удалось установить поведение  $\tilde{R}_d(p, x)$ ,  $R_d(z, x)$  в критической области при  $d=4$ . Тот факт, что  $\tilde{R}_{d=4}$  имеет в микроскопической области логарифмическое ветвление, наличие которого подтверждается анализом высокотемпературных разложений при  $d=4$  /13/, требует большей осторожности при построении теории возмущений по размерности  $d=4-\epsilon$  /11/. В работах /11,14/ предполагалось, что при  $d=4$  в критической области имеет место классическая асимптотика (5).

Вычисляя  $Y_d(\infty, 0)$  (16) для  $d=3$ , получаем  $Y_{d=3}(\infty, 0) = \frac{\eta^2}{2}$ , т.е.  $\eta_{d=3} = \frac{4}{\eta^2} \approx 0.40$  (21), (29). Этот результат отличается от численных расчетов и экспериментальных данных для трехмерной модели Изинга  $\eta_{d=3} = 0.041 + 0.1$  /4,10/, оценок, полученных с помощью теории возмущений по размерности  $d=4-\epsilon$ :  $\eta_{d=3} \approx 0.037$  /11,14/ или уравнения Челлена-Симанзика:  $\eta_{d=3} \approx 0.033$  /15/, однако лучше, чем результаты работы /16/  $\eta_{d=3} \approx 0.5$  и /17/  $\eta_{d=3} \approx 0.64$  <sup>\*/</sup>.

Поскольку все расчеты в §2 справедливы для непрерывно изменяющегося параметра  $d$ , можно по непрерывности продолжить  $\eta_{2<d}$  на  $d=2$ . Из (16), (21) получаем  $\eta_{d \rightarrow 2} = 0$ . Таким образом, для размерности  $d=2$  критический индекс  $\eta_d$ , определенный из асимптотики в микроскопической критической области, формально равен нулю. Критический индекс  $\eta_{d=2}$ , полученный из асимп-

<sup>\*/</sup> наилучшей оценкой для  $\eta_{d=3}$ , принято сейчас считать  $\eta_{d=3} = 0.055 \pm 0.01$  /15/.

тот же в макроскопической области аномально велик:  $\eta_{d=2} \approx 2.5$  (28), точное решение дает  $\eta_{d=2} = 4/4$  /4,5/. То, что все известные методы приближенного расчета критических индексов не работают при  $d = 2$ , или дают существенно отличные результаты, указывает на специфическую особенность этого случая: двумерная модель Изинга не является аналогом трехмерной, для нее неприемлемо нулевое приближение (4), (5), она обладает аномально широкой "микроскопической областью" (8) (см. начало §4), что приводит к нарушению сильного скейлинга и т.д. /7,9,12/. Метод Абе /16/ дает для  $\eta_{d=2} = 1$ , методы Вильсона /12/, Гельфанда-Лангера /17/, Мигдала /9/ принципиально неприменимы для  $d=2$ .

Необходимо отметить также, что хотя для  $d > 4$   $\eta_d$  и другие критические индексы совпадают с индексами теории самосогласованного поля /4,10-13/, модель Изинга для размерностей больше четырех точнее соответствует решению Орнштейна-Цернике /4/ с  $d > 4$ : при  $\theta \geq \theta_c$  двухточечная корреляционная функция не равна нулю (24) (32), т.е. имеется "хвост" у теплоемкости  $C_v(\theta)$  и т.д. Отметим, что теплоемкость  $C_v(\theta)$  при  $\theta \geq \theta_c$  отлична от нуля ("хвост") и конечна, причем, для  $d \rightarrow \infty$   $C_v \rightarrow 0$  всюду при  $\theta > \theta_c$ , т.е. получаем, как и ожидается в этом случае /18/, кюри-вейссовский предел /4,10/.

Тот факт, что конечные результаты для  $\eta_d$  и функциональные формы асимптотик  $\tilde{R}_d$  и  $R_d$ , полученные настоящим методом (§1 - §3), не зависят от радиуса взаимодействия  $\lambda$  и параметра решетки  $\alpha_0 = L^{-1}$ , подтверждает гипотезу универсальности критических явлений для взаимодействий с конечным радиусом /4,19/.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить В.К.Федянина, И.В.Воловича, Е.А.Дынина, В.П.Фролова за полезные обсуждения и замечания.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

В настоящем пункте мы покажем, что асимптотика  $f_d(\nu, p^2, \kappa^2)$  (2) регулярна в окрестности  $\lambda^2 p^2 \ll 1$  при любом фиксированном  $\kappa^2 \ll 1$ , т.е. в критической области. Это означает, что  $f_d(\nu, p^2, \kappa^2) \Big|_{\nu \rightarrow \infty, \lambda p \ll 1} = f_d(\nu, 0, \kappa^2) \Big|_{\nu \rightarrow \infty} + o(\lambda p) \varphi_d(\nu, \kappa^2)$ , причем асимптотика  $\varphi_d(\nu, \kappa^2) \Big|_{\nu \gg 1}$  не превышает  $f_d(\nu, 0, \kappa^2) \Big|_{\nu \gg 1}$ :  $\varphi_d(\nu, \kappa^2) / f_d(\nu, 0, \kappa^2) \Big|_{\nu \gg 1} = C_{\kappa^2}$ . Представим (2) в виде:

$$f_d(\nu, p^2, \kappa^2) = \frac{1}{2} \int_{L^2 \lambda^2 \nu}^{\Gamma} dy y \int_0^{\Gamma} d\theta (\sin \theta)^{d-2} e^{-i y \cdot x} \times \frac{(2i)^2 \sin \left[ \frac{y}{2} + \lambda p \cos \theta \sqrt{\nu y} \right] \sin \left[ \frac{y}{2} - \lambda p \cos \theta \sqrt{\nu y} \right]}{4 \left[ \frac{y}{2} + \lambda p \cos \theta \sqrt{\nu y} \right] \left[ \frac{y}{2} - \lambda p \cos \theta \sqrt{\nu y} \right] Y_d \left( \frac{L \lambda \nu^{1/4}}{y^{1/2}}, \frac{\kappa \nu^{1/4}}{y^{1/2}} \right)} \quad (\text{П. I})$$

Из (П. I) следует, что при  $2 < d < 4$ , когда  $Y_d(L/k, m) \Big|_{k \ll L} < \infty$  (I2), предел  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_d(\nu, p^2, \kappa^2)$  бесконечен, причем расходится только  $\text{Re} f_d(\nu, p^2, \kappa^2)$ . То же имеет место и для случая  $d=4$  (I6), а при  $d > 4$   $Y_{d>4}(L/k, m) \Big|_{L/k \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$  (I2) и предел  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_d(\nu, p^2, \kappa^2)$  конечен. В последнем случае поставленная проблема решена, так как  $f_d(\nu, p^2, \kappa^2) \Big|_{\nu \gg 1}$  (П. I) аналитическая функция  $p^2$ .

Рассмотрим  $2 < d < 4$  и  $\kappa^2 = 0$ , тогда для  $f_d(\nu, p^2, \kappa^2 = 0)$  из (П. I) получаем ( $\varepsilon = \cos \theta$ ):

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |f_d(\nu, p^2, \kappa^2 = 0)| \leq \left| \frac{1}{2} \int_0^{\Gamma} d\theta \int_0^{\Gamma} \frac{y dy}{|y^{3/4} - \lambda^2 p^2 y \nu^{5/2}| Y_d} \Big|_{\nu \gg 1} + \frac{1}{2} \int_0^{\Gamma} d\theta \int_{-\Delta + 4p^2 \varepsilon^2 \lambda^2 \nu}^{\Delta + 4p^2 \varepsilon^2 \lambda^2 \nu} \frac{dy}{Y_d} \Big|_{\nu \rightarrow \infty} \right. \quad (\text{П. 2})$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{r}} d\theta \int_{\Delta + 4p^2 \tilde{z}^2 \lambda^2 v}^{\tilde{L}^2 \lambda^2 v} \frac{y dy}{|y^2/4 - \lambda^2 p^2 y v \tilde{z}^2| Y_d} \Big|_{v \rightarrow \infty} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2} \frac{1}{Y_d(\tilde{g}, 0)} \left\{ \ln \frac{\Delta}{4p^2 \lambda^2 v} \Big|_{v \gg 1} + 2\tilde{r} \Delta + \ln \frac{\tilde{L}^2 \lambda^2 v - 4p^2 \lambda^2 v}{\Delta} \right\} \Big|_{v \rightarrow \infty} \quad (\text{П.2})$$

С другой стороны, из (П.1) следует, что:

$$|f_d(v, p^2, \kappa^2)|_{v \gg 1} \geq \frac{1}{2} \int_{4p^2 \lambda^2 v + \Delta}^{\tilde{L}^2 \lambda^2 v} \frac{dy}{(y - 4p^2 \lambda^2 v) Y_d} = \frac{1}{2} \frac{1}{Y_d(\tilde{g}, 0)} \times$$

$$\times \ln \frac{\tilde{L}^2 \lambda^2 v - 4p^2 \lambda^2 v}{\Delta} \quad (\text{П.3})$$

Таким образом, как показывают оценки (П.2, П.3), асимптотика  $f_d(v, p^2, \kappa^2)$  регулярна по  $\lambda^2 p^2 \ll 1$  и является логарифмической.

Аналогичные рассуждения справедливы для  $d=4$ , когда  $Y_{d=4}(\tilde{L}_k, 0)$  медленно растет при  $\tilde{L}_k \rightarrow \infty$  (16). Утверждение, сделанное для  $\kappa=0$ , без труда распространяется на случай  $0 < \kappa \ll 1$  методом, сходным с (П.2, П.3), и с учетом того, что  $Y_{2 \leq d \leq 4}(\tilde{L}_k, m) \Big|_{k \ll \tilde{L}} < \infty$  (26). Это приводит к изменению характера асимптотики  $f_d(v, p^2, \kappa^2)$  по сравнению со случаем  $\kappa=0, m=0$  (см. (27)), однако оставляет ее регулярной по  $0 \leq p^2 \lambda^2 \ll 1$ .

## Литература

1. В.А.Загребнов. ОИЯИ, Р4-7001, Дубна, 1973.
2. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, 1957.
3. С.Ди Кастро. Rivista del Nuovo Cimento, 1, 199 (1971).
4. М.Фisher. Rep.Progr. Phys., 30, 731 (1967).
5. Л.Кадановф. Physics, 2, 263 (1966).
6. М.Фisher, Р.Бурфорд. Phys.Rev., 156, 583 (1967).
7. М.Ферер, М.Мурр, М.Вортис. Phys.Rev.Lett., 22, 1382 (1969).
8. М.Ферер, М.Мурр, М.Вортис. Phys. Rev. B3, 3911, (1971).
9. А.А.Мигдал. ЖЭТФ, 59, 1015 (1970).
10. М.Фisher. Essays in Physics, 4, 43 (1973).
11. М.Фisher, К.Уилсон. Phys.Rev. Lett., 28, 240 (1972).
12. К.Уилсон. Phys.Rev., B4, 3174, 3184 (1971).
13. М.Мурр. Phys.Rev., B1, 2238 (1970).
14. К.Уилсон. Phys.Rev.Lett., 28, 548 (1972).
15. Г.Париси. Preprint, Ist. di Fis. G.Marconi. Nota Int. n.426, 1972.
16. Р.Абе. Progr. Theor.Phys., 33, 600 (1965).
17. Е.Хелфанд, Р.Лангер. Phys.Rev., 160, 437 (1967).
18. С.Блох, Ж.Лангер. Journ.Math.Phys., 6, 554 (1965).
19. Н.Далтон, Д.Вуд. Journ.Math.Phys., 10, 1271 (1969).

Рукопись поступила в издательский отдел  
8 мая 1973 года.