СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 7109

И.В.Амирханов, В.Е.Гречко, Р.К.Дементьев

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 7109

И.В.Амирханов, В.Е.Гречко,* Р.К.Дементьев *

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ

* НИИЯФ МГУ

Обратная задача теории рассеяния в квантовой механике состоит в отыскании потенциала $V(r)$ в уравнении Шредингера по тем или иным асимптотическим свойствам его решений /например, по фазе рассеяния $\delta(k)$, собственным значениям ϵ_n, нормированным коэффициентам N_n или по спектральной функции/. Математически строгое решение обратной задачи, содержащееся в известных работах И.М.Гельфанда и Б.М.Левитана, М.Г.Крейна, В.А.Марченко и др. /подробный список литературы см. в работах [1,2] /, оказывается непосредственно не применимым к анализу экспериментальных данных по рассеянию. Дело в том, что фаза рассеяния $\delta(k)$ должна быть известна при $0 \le k \le \infty$. Физически это означает, что нужно иметь данные по рассеянию частиц сколь угодно больших энергий. Но уже при сравнительно небольших энергиях частицы становятся релятивистскими и их поведение не описывается нерелятивистским уравнением Шредингера.

Поэтому принципиальное значение имеет решение обратной задачи для релятивистских уравнений квазипотенциального подхода[3,4]. Этой задаче и посвящена настоящая работа.

Использование метода введения непрерывного параметра и метода регуляризации, развитых в [5–7] для решения нерелятивистской обратной задачи теории рассеяния[8], можно распространить на релятивистский случай, используя результаты работы[9]. Дело в том, что в [8] в качестве исходного уравнения рассматривается фазовое уравнение[10].

$$\frac{d}{dr}\,\delta(r,k,t) = -\frac{V(r,t)}{k}\,\sin^2\left(kr + \delta(r,k,t)\right). \qquad /1/$$

Дифференцируя по t обе части последнего равенства, можно получить следующее уравнение [8]:

$$\int_0^\infty dr Z(r,t) \sin^2[kr+\delta(r,k,t)] \exp[-\frac{1}{k}\int_r^\infty dr' V(r',t) \times$$
$$\times \sin 2[kr'+\delta(r',k,t)] = k[\delta_p(k,t)-\delta_э(k)], \qquad /2/$$

где

$$Z(r,t) = \frac{d}{dt} V(r,t), \qquad /3/$$

$\delta_э(k)$ и $\delta_p(k,t)$ - соответственно, экспериментальная и приближенная фаза рассеяния.

Система /2/-/3/ решается при начальном условии

$$V(r,0) = V_0(r). \qquad /4/$$

Решая уравнение /1/ с начальным значением потенциала V_0 и подставляя полученные решения в /2/, определяем неизвестную функцию $Z(r,0)$. Тогда из /3/ получают следующее приближение для потенциала

$$V(r,\tau) = V(r,0) + \tau Z(r,0), \qquad /5/$$

где τ - шаг по переменной t.

Далее процесс вычислений повторяется до тех пор, пока искомый потенциал не стабилизируется.

1. Вышеописанный метод [8] справедлив только при условии, что $\delta(0)=\delta(\infty)=0$, т.е. когда нет связанных состояний и рассеиваются незаряженные частицы. Поэтому сначала этот метод распространим на случай рассеяния заряженных частиц, а также случай, когда в системе имеются связанные состояния. Пусть потенциал взаимодействия состоит из двух частей $V(r)=V_1(r)+V_2(r,t)$, причем $V_1(r)$ - известный потенциал /например, кулоновский потенциал/ и $V_2(r,t)$ - неизвестная часть потенциала /ядерный потенциал/.

Тогда связанные состояния в системе двух тел описываются уравнением Шредингера /для простоты положим $\ell=0$ /.

$$[\frac{d^2}{dr^2} - k_n^2 - V_1(r)]\Psi_n(r,t) = V_2(r,t)\Psi_n(r,t), \qquad /6/$$

где $E_n = k_n^2$ - собственные значения энергий связанных состояний и соответствующие им нормировочные константы определяются по формуле

$$N_n = N_{1n} + \int_0^\infty dr \Phi_n^{(1)}(r) V_2(r,t)\Psi_n(r,t), \qquad /7/$$

где $\Phi_n^{(1)}(r)$ и N_{1n} - решение уравнения Шредингера и нормировочная константа с потенциалом $V_1(r)$.

В этом случае фазовые уравнения для амплитуды рассеяния имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dr} f(r,k,t) = V_2(r,t)[\Phi_k^{(1)}(r) + f(r,k,t)\Phi_k^{(2)}(r)]^2, \qquad /8/$$

где $\Phi_k^{(1)}(r)$ и $\Phi_k^{(2)}(r)$ - два линейно независимых решения уравнения Шредингера /6/ при $k^2>0$ и $V_2=0$

Дифференцируя по t обе части уравнения /7/ и /8/, можно получить следующие уравнения:

$$\int_0^\infty dr Z_2(r,t)\Psi_n^2(r,t) = (N_n - N_{1n}),$$
$$\int_0^\infty dr Z_2(r,t)[\Phi_k^{(1)}(r) + f(r,k,t)\Phi_k^{(2)}(r)]^2 \times \qquad /9/$$
$$\times \exp[\int_r^\infty dr'[\Phi_k^{(1)}(r') + f(r',k,t)\Phi_k^{(2)}(r')] \times$$
$$\times \Phi_k^{(2)}(r')] = [F_э(k) - F_k(k,t)],$$

где

$$Z_2(r,t)=\frac{d}{dt}V_2(r,t) \qquad /10/$$

$F_Э(k)$ и $F_p(k,t)$ - соответственно экспериментальная и приближенная амплитуды рассеяния. Система уравнений /9/ и /10/ решается при начальном условии $V_2(r,0)=V_0(r)$.

2. Теперь перейдем к рассмотрению релятивистского случая. Для простоты рассмотрим случай рассеяния незаряженных частиц, когда в системе не имеется связанных состояний. Тогда фазовые уравнения имеют следующий вид[9]:

$$\frac{d}{dr}f_\ell(W,r)=-\frac{2\mu}{\sqrt{m_1m_2}\,sh\,\chi_{(12)}}V(r)\nu_\ell(r)\times \qquad /11/$$

$$\times[\Phi^{(1)}(r,q_{(12)})+f_\ell(W,r)\Phi_\ell^{(1)}(r,q_{(12)})]^2,$$

$$\Phi_\ell^{(1)}(r,q_{(12)})=s_\ell(r,\chi_{(12)})+$$

$$+\int_0^r dr'D_\ell^{(+)}(r,r',W)V(r')\Phi_\ell^{(1)}(r',q_{(12)}),$$

$$/12/$$

$$\Phi_\ell^{(2)}(r,q_{(12)})=e_\ell^{(1)}(r,\chi_{(12)})+$$

$$+\int_0^r dr'D_\ell^{(+)}(r,r',W)V(r')\Phi_\ell^{(1)}(r',q_{(12)}),$$

где

$$D_\ell^{(+)}(r,r',W)=\frac{2\mu}{\sqrt{m_1m_2}}\frac{\nu_\ell(r')}{sh\,\chi_{(12)}}\{\hat{\theta}(r'-r)\times$$

$$\times[e_\ell^{(1)}(r',\chi_{(12)})s_\ell(r,\chi_{(12)})-e_\ell^{(1)}(r,\chi_{(12)})s_\ell(r',\chi_{(12)})]+$$

$$+\hat{\theta}(-r-r')\,[2i\,s_\ell(r,\chi_{(12)})s_\ell(r',\chi_{(12)})-$$

$$-e_\ell^{(1)}(r,\chi_{(12)})s_\ell(r',\chi_{(12)})-e_\ell^{(1)}(r',\chi_{(12)})s_\ell(r,\chi_{(12)})]\},$$

$s_\ell(r,\chi_{(12)})$ и $e_\ell^{(1)}(r',\chi_{(12)})$ - линейно независимые решения релятивистского уравнения Шредингера[4],

$$W=\frac{m_1+m_2}{\sqrt{m_1m_2}}\sqrt{m_1m_2-\vec{q}^{\,2}_{(12)}},\quad q_{12}=\sqrt{m_1m_2}\,sh\,\chi_{(12)},\quad \mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}.$$

В этом случае уравнение типа /2/ имеет вид:

$$\int_0^\infty dr[Z(r,t)Q_1(r,t)+Q_2(r,t)]\exp[\int_r^\infty dr'Q_3(r',t)= \qquad /13/$$

где $\quad =[f_\ell(W)-F_{\ell p}(W,t)]$,

$$Q_1(r,t)=-\frac{2\mu}{\sqrt{m_1m_2}\,sh\chi_{(12)}}\nu_\ell(r)[\Phi_\ell^{(1)}(r,q_{(12)},t)+$$

$$f_\ell(r,W,t)\Phi_\ell^{(2)}(r,q_{(12)},t)]^2,$$

$$Q_2(r,t)=-\frac{4\mu}{\sqrt{m_1m_2}\,sh\chi_{(12)}}V(r,t)\nu_\ell(r)\times$$

$$\times[\Phi_\ell^{(1)}(r,q_{(12)},t)+f_\ell(r,W,t)\Phi_\ell^{(2)}(r,q_{(12)},t)]^2\times \qquad /14/$$

$$\times[\frac{d}{dt}\Phi_\ell^{(1)}(r,q_{(12)},t)+f_\ell(W,r,t)\frac{d}{dt}\Phi_\ell^{(2)}(r,q_{(12)},t)],$$

$$Q_3(r,t)=-\frac{4\mu}{\sqrt{m_1m_2}\,sh\,\chi_{(12)}}V(r,t)\nu_\ell(r)\times$$

$$\times [\Phi^{(1)}_\ell (r, q_{(12)}, t) + f_\ell (W, r, t)\, \Phi^{(2)}_\ell (r, q_{(12)}, t)] \times$$

$$\times \Phi^{(2)}_\ell (r, q_{(12)}, t)$$

$$\frac{d}{dt}\Phi^{(1)}_\ell (r, q_{(12)}, t) = \int_0^r dr'\, D^{(+)}_\ell (r, r', W) \times$$

$$\times [\Phi^{(1)}_\ell (r', q_{(12)}, t) \frac{d}{dt} V(r', t) + V(r', t) \frac{d}{dt}\Phi^{(1)}_\ell (r', q_{(12)}, t)],$$

/15/

$$\frac{d}{dt}\Phi^{(2)}_\ell (r, q_{(12)}, t) = \int_0^r dr'\, D^{(+)}_\ell (r, r', W) \times$$

$$\times [\Phi^{(2)}_\ell (r', q_{(12)}, t) \frac{d}{dt} V(r', t) + V(r', t) \times$$

$$\times \frac{d}{dt}\Phi^{(2)}_\ell (r', q_{(12)}, t)],$$

и

$$Z(r, t) = \frac{d}{dt} V(r, t). \qquad /16/$$

Алгоритм численного решения совместных уравнений /13/ и /16/ с начальным условием $V(r, 0) = V_0(r)$ аналогичен адгоритму, предложенному в работе /8/.

Заметим, что в нерелятивистском пределе $(r \to \infty)$ функции $Q_r \to 0$, $\frac{d}{dt}\Phi^{(1)}_\ell \to 0$, $\frac{d}{dt}\Phi^{(r)}_\ell \to 0$ и уравнение /13/ переходит в обычное уравнение типа /2/.

3. До сих пор при решении обратной задачи рассеяния потенциал восстанавливался по косвенным экспериментальным данным /сдвиги фаз и амплитуды/. Было бы весьма желательно так сформулировать обратную задачу рассеяния, чтобы в качестве информации использовать непосредственно измеряемые на опыте сечения рассеяния.

Ниже мы обсудим одну из возможностей такой постановки задачи для нерелятивистского уравнения Шредингера. Используя метод, развитый в работе /9/, можно получить следующее равенство для полной амплитуды рассеяния:

$$\frac{d}{dt} f(\vec{k}_b, \vec{k}_a, t) = -\frac{\mu}{2\pi}\int d\vec{r}\, \phi^{(+)}_{\vec{k}_a}(\vec{r}, t)\, \phi^{(+)}_{-\vec{k}_b}(\vec{r}, t) \frac{d}{dt} V(\vec{r}, t). \qquad /17/$$

Если рассеяние происходит на центрально-симметрическом потенциале в нулевой угол, то равенство /17/ имеет вид:

$$\frac{d}{dt} f(\theta = 0, t) = -\frac{\mu}{2\pi}\int dr\, r^2 [-\frac{d}{dt} V(r, t)] \times$$

$$\times \int d\Omega_{\vec{r}}\, \phi^{(+)}_{\vec{k}_a}(\vec{r}, t)\, \phi^{(+)}_{-\vec{k}_b}(\vec{r}, t). \qquad /18/$$

В этом случае уравнение типа /2/ запишется так:

$$\int_0^\infty dr Z(r, t) r^2 \int d\Omega_{\vec{r}}\, \phi^{(+)}_{\vec{k}_a}(\vec{r}, t)\, \phi^{(+)}_{-\vec{k}_a}(\vec{r}, t) =$$

$$= \frac{2\pi}{\mu} [f_p(t, k, \theta = 0) - f_{\text{э}}(k, \theta = 0)], \qquad /19/$$

где

$$Z(r, t) = \frac{d}{dt} V(r, t). \qquad /20/$$

Используя оптическую теорему и дисперсионные соотношения для реальной части амплитуды рассеяния /11/, $F(k, \theta = 0)$ можно выразить непосредственно через сечение рассеяния

$$f(k; \theta = 0) = \mathrm{Re}\, f(k, 0) + i\frac{k}{4\pi}\sigma(k),$$

$$\mathrm{Re}\, F(k, 0) = \frac{1}{2\pi^2} P \int_0^\infty dk' \frac{k'^2 \sigma(k')}{k'^2 - k^2} - \qquad /21/$$

$$- \mathrm{Re} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \frac{(-1)^{\ell+1} |N_{n\ell}|^2}{k_{n\ell}(k_{n\ell} - k)}.$$

Так же, как и в предыдущих пунктах, систему уравнений /19/ и /20/ решаем совместно, учитывая равенство /21/ и с начальным условием типа /4/.

Решая уравнение Шредингера с начальным значением потенциала $V_0(r)$, найдем функции $\phi^{(+)}_{\vec{k}_a}$ и $\phi^{(+)}_{-\vec{k}_b}$, а затем из /19/ и неизвестную функцию $Z(r,t)$; на последующем шаге процедура повторяется с потенциалом $V = V_0 + r\,Z$. Заметим, что такой подход к определению $Z(r,t)$ более привлекателен, т.к. одновременно учитывается вся совокупность непосредственно измеряемых на опыте экспериментальных данных $\sigma(k)$, полное сечение, $k^2_{n\ell}$ – энергии связанных состояний и $N_{n\ell}$ -нормировочные константы см/ /21/. Кроме того, уравнение типа /19/ можно получить и для системы уравнений. Так как обычно система уравнений получается при решении задачи трех тел и более, то такой подход может оказаться отправным пунктом при постановке обратной задачи для многочастичных систем.

Заметим, что для релятивистского уравнения Шредингера было бы интересно воспользоваться подходами к обратной задаче, развитыми, например, Гельфандом - Левитаном, Марченко /1/ или методом /2/, где потенциал восстанавливается по всем фазовым сдвигам при одной энергии. Однако то обстоятельство, что асимптотика релятивистской волновой функции не наступает там, где потенциал практически равен нулю /9/, затрудняет непосредственное релятивистское обобщение этих подходов. Можно надеяться, что исследования в этом направлении позволят глубже понять свойства решений релятивистского уравнения и, в частности, выяснить - какие асимптотические свойства этих решений однозначно определяют квазипотенциал.

Мы имели возможность обсуждать вопросы, связанные с методом введения непрерывного параметра с Е.П.Жидковым, Г.И.Макаренко и А.В.Ракитским, за что приносим им глубокую благодарность.

Литература

1. Л.Д.Фаддеев. УМН, 1959, 14, вып. 4 /88, 57.
2. Р.Ньютон. Теория рассеяния волн и частиц. Пер. с англ. М., "Мир", 1959.
3. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 380, 1963.
4. V.G.Kadyshevsky. Nucl.Phys., B6, 125 (1968).
   В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов, Н.Б.Скачков. ЭЧАЯ, том 2, вып. 3, Атомиздат, Москва, 1971 г.
5. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин. ДАН СССР, 180, 18, 1968.
6. Е.П.Жидков, Г.А.Ососков. ДАН СССР, 180, 1279, 1968.
7. А.Н.Тихонов. ДАН СССР, 151, 501 /1963/, 153, 49 /1963/.
8. Е.П.Жидков, Г.И.Макаренко, И.В.Пузынин. ЭЧАЯ, том 4, вып. 1, 127, Москва, Атомиздат, 1973.
9. И.В.Амирханов, В.Е.Гречко, Р.К.Дементьев. Препринт ОИЯИ, Р4-7105, Дубна, 1973.
10. Г.Ф.Друкарев. ЖЭТФ, 1949, 19, 247.
11. А.И.Базь, Я.Б.Зельдович, А.М.Переломов. Рассеяние реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. Москва, 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел 18 мая 1973 года.