СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 7107

И.В.Амирханов, В.Е.Гречко, Р.К.Дементьев

МЕТОД ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ. 2.ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 7107

И.В.Амирханов, В.Е.Гречко, Р.К.Дементьев

МЕТОД ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ. 2.ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

Обобщение квазипотенциальной теории, развитой в работах [1], на случай рассеяния трех релятивистских частиц сделано в [2], где были введены относительные импульсы Якоби посредством операции сложения в пространстве Лобачевского; показано, что движение центра масс системы отделяется, и был дан релятивистский аналог уравнений Фадеева. Последовательное решение таких уравнений встречает значительные трудности счетного характера. В этом смысле метод сильной связи каналов Фешбаха [3] отличается сравнительной простотой, а плодотворность его в нерелятивистской квантовой механике была продемонстрирована на большом количестве примеров [4,11,12]. Однако в задачах физики элементарных частиц /в таких, например, как рассеяние псевдоскалярных мезонов на нуклонах в нарушенной SU_3 -симметрии [5], или будстрэп-расчетах рассеяния в приближении эффективного потенциала, который строится из абсортивной части $\pi-\pi$ -амплитуды в t -канале [6], /этот метод дает неудовлетворительное согласие с экспериментальными данными, что, конечно, в первую очередь, связано с нерелятивистским характером уравнения Шредингера. Поэтому представляет интерес распространение многоканального метода Фешбаха на релятивистский случай.

В связи с актуальностью релятивистского рассмотрения многочастичных систем представляет также интерес обобщение метода фазовых функций [7,10] на случай взаимодействия трех и более релятивистских частиц.

1. Система связанных уравнений

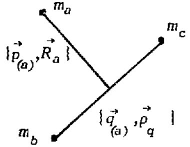
В /2/ показано, что релятивистское уравнение Шредингера для трех частиц с массами m_a и 4-импульсами K_a $(a=1,2,3)$ в общей системе центра масс /с.ц.м./ можно записать в терминах относительных импульсов Якоби $\vec q_{(a)}$ и $\vec p_{(a)}$ /см. рис. 1/ следующим образом:*

$$\left[\sqrt{S} - \frac{m_b+m_c}{\sqrt{m_b m_c}}\, q_{(a)0} - \frac{m_a}{\mu_a}\, p_{(a)0}\right]\Psi(\vec q_{(a)}, \vec p_{(a)}) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^6}\int V(\vec q_{(a)}, \vec p_{(a)}, \vec q\,'_{(a)}, \vec p\,'_{(a)})\,\Psi(\vec q\,'_{(a)}, \vec p\,'_{(a)}) \qquad /1/$$

$$\times\, d\vec q\,'_{(a)}/\sqrt{1+\vec q\,'^{2}_{(a)}/m_b m_c}\; d\vec p\,'_{(a)}/\sqrt{1+\vec p\,'^{2}_{(a)}/\mu_a^2}\,,$$

где $S=(K_1+K_2+K_3)^2$, V - квазипотенциал, $M_a = \dfrac{m_a(m_b+m_c)}{m_a+m_b+m_c}$,



$$\mu_a = \sqrt{m_a M_a}\,, \quad q_{(a)0} = \sqrt{m_b m_c + \vec q^{\,2}_{(a)}}\,,$$

$$p_{(a)0} = \sqrt{\mu_a^2 + \vec p^{\,2}_{(a)}}\,,$$

$$q_{(a)} = |\vec q_{(a)}|\,, \quad p_{(a)} = |\vec p_{(a)}|\,, \quad a \neq b = 1,2,3.$$

Рис. 1

В пределе больших масс

$$\vec q_{(a)} \to \vec q_a = \frac{m_c \vec k_b - m_b \vec k_c}{m_b+m_c}\,, \quad \vec p_{(a)} \to \vec p_a = \frac{(m_b+m_c)\vec k_a - m_a(\vec k_b + \vec k_c)}{m_a+m_b+m_c}\,,$$

и /1/ переходит в нерелятивистское уравнение Шредингера, в котором исключено движение центра масс.

Переходя в координатное представление с помощью

---

* В данной работе всюду используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

преобразования Шапиро /8/ $(\xi(\vec{K},\vec{r}) = (\frac{K_0 - \vec{K}\vec{n}}{m})^{-1+irm}$, $\vec{r} = \vec{rn}$, $\vec{n}^2 = 1$, $k_0^2 = \vec{k}^2 + m^2)$

и предполагая, что потенциалы взаимодействия парные, локальные и центрально-симметричные, получим релятивистское уравнение для трех тел в координатном представлении /2/:

$$[\sqrt{S} - \frac{m_b + m_c}{\sqrt{m_b m_c}} H^0_{\sqrt{m_b m_c}}(\vec{\rho}_a) - \frac{m_a}{\mu_a} H^0_{\mu_a}(\vec{R}_a)]\Psi(\vec{R}_a, \vec{\rho}_a) = \tag{2}$$

$$= (V_a(\rho_a) + V_b(\rho_b) + V_c(\rho_c))\Psi(R_a, \rho_a),$$

где, например, $V_a(\rho_a)$ - квазипотенциал взаимодействия между частицами b и c.

$$H^0_m(\vec{r}) = 2m\,ch(\frac{i}{m}\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{2i}{r} sh(\frac{i}{m}\frac{\partial}{\partial r}) - \frac{\Delta_{\theta,\phi}}{mr^2} \exp\{\frac{i}{m}\frac{\partial}{\partial r}\}.$$

Теперь рассмотрим частный случай, когда бесспиновая частица a рассеивается на системе, состоящей из двух других бесспиновых частиц $(b+c)$, и не происходит перераспределения частиц. Спины частиц можно легко включить в рассмотрение, если учесть результаты работы /9/. Тогда решение уравнения /2/ удобно искать в виде разложения по полной системе волновых функций подсистемы $(b+c)$:

$$\Psi(\vec{R}_a, \vec{\rho}_a) = \sum_{\alpha_a}^{N} \Psi_{\alpha_a}(\vec{R}_a)\phi_{\alpha_a}(\vec{\rho}_a) + \tag{3}$$
$$+ \int \Psi_{\vec{q}_{(a)}}(\vec{R}_a)\phi_{\vec{q}_{(a)}}(\vec{\rho}_a)\, d\vec{q}_{(a)} / \sqrt{1 + \vec{q}^{\,2}_{(a)}/m_b m_c}\,.$$

Здесь $\phi_{\alpha_a}(\vec{\rho}_a)$ и $\phi_{\vec{q}_{(a)}}(\vec{\rho}_a)$ - решения двухчастичных уравнений:

$$[\sqrt{S_{\alpha_a}} - \frac{m_b + m_c}{\sqrt{m_b m_c}} H^0_{\sqrt{m_b m_c}}(\vec{\rho}_a)]\phi_{\alpha_a}(\vec{\rho}_a) = V_a(\rho_a)\phi_{\alpha_a}(\vec{\rho}_a), \tag{4a}$$

$$(\sqrt{S_{\alpha_a}} = m_b + m_c - |W^{cb}_{\alpha_a}| \equiv \frac{m_b + m_c}{\sqrt{m_b m_c}} \cos\chi_a)$$

$$[\sqrt{S_{q(a)}} - \frac{m_b+m_c}{\sqrt{m_b m_c}} H^0_{\sqrt{m_b m_c}}(\vec{\rho}_a)]\phi_{\vec{q}(a)}(\vec{\rho}_a) = \qquad /4б/$$

$$= V_0(\rho_a)\phi_{\vec{q}(a)}(\vec{\rho}_a),$$

соответственно, для дискретного и непрерывного спектров. N - число связанных состояний в подсистеме $(b+c)$. Подставляя разложение /3/ в /2/, используя /4а/, /4б/ и проводя парциальное разложение, получим связанную систему уравнений ($2E_{\alpha_a} = (\sqrt{S} - \sqrt{S_{\alpha_a}})\mu_a/m_a$, $2E_{q(a)} = (\sqrt{S} - \sqrt{S_{q(a)}})\mu_a/m_a$):

$$[2E_{\alpha_a} - H^0_{\mu_a}(R_a)]\Psi_{\alpha_a\nu_a}(R_a) = \sum_{\alpha_a'\nu_a'} U^{\nu_a\nu_a'}_{\alpha_a\alpha_a'}(R_a)\times$$

$$\Psi_{\alpha_a'\nu_a'}(R_a) + \sum_{\nu_a'}\int U^{\nu_a\nu_a'}_{\alpha_a q_{(a)}}(R_a)\Psi_{q_{(a)}\nu_a'}(R_a)\,dq_a/$$

$$/\sqrt{1+\vec{q}^{\,2}_{(a)}/m_b m_c} = J^{\nu_a}_{\alpha_a}(R_a) \qquad /5/$$

$$[2E_{q(a)} - H^0_{\mu_a}(R_a)]\Psi_{q_{(a)}\nu_a}(R_a) = \sum_{\alpha_a'\nu_a'} U^{\nu_a\nu_a'}_{q_{(a)}\alpha_a'}(R_a)\times$$

$$\times\Psi_{\alpha_a'\nu_a'}(R_a) + \sum_{\nu_a'}\int U^{\nu_a\nu_a'}_{q_a q_{(a)}'}(R_a)\times$$

$$\times\Psi_{q'_{(a)}\nu_a'}(R_a)\,dq'_{(a)}/\sqrt{1+\vec{q}'^{\,2}_{(a)}/m_b m_c} = J^{\nu_a}_{q_{(a)}}(R_a),$$

где

$$H^0_{\mu_a}(R_a) = 2\mu_a \operatorname{ch}\left(\frac{i}{\mu_a}\frac{d}{dR_a}\right) - \frac{L_a(L_a+1)}{\mu_a R_a(R_a + i/\mu_a)}\exp\left\{\frac{i}{\mu_a}\frac{d}{dR_a}\right\},$$

с параметризацией: $2E_{\alpha_a} = 2\mu_a \operatorname{ch}\chi_{\alpha_a}$, $2E_{q(a)} = 2\mu_a \operatorname{ch}\chi_{q(a)}$ – для открытых каналов и $2E_{\alpha_a} = 2\mu_a \cos\chi_{\alpha_a}$,

$2E_{q(a)} = 2\mu_a \cos\chi_{q(a)}$ - для закрытых каналов;

$\nu_a = \{\ell_a, \bar{m}_a, L_a, \bar{M}_a\}$ - совокупность квантовых чисел орбитальных моментов и их проекций.

$$U^{\nu_a \nu_a'}_{a_a a_a'}(R_a) = \frac{\mu_a}{m_a} \int \Phi^*_{a_a \nu_a} [V_b(\rho_b) + V_c(\rho_c)] \times$$

$$\times \Phi_{a_a' \nu_a'} d\rho_a \, d\Omega_{\vec{R}_a} \, d\Omega_{\vec{\rho}_a} ,$$

$$U^{\nu_a \nu_a'}_{a\, q_{(a)}}(R_a) = \frac{\mu_a}{m_a} \int \Phi^*_{a_a \nu_a} [V_b(\rho_b) + V_c(\rho_c)] \times$$

$$\times \Phi_{q_{(a)} \nu_a'} d\rho_a \, d\Omega_{\vec{R}_a} \, d\Omega_{\vec{\rho}_a}$$

$$U^{\nu_a \nu_a'}_{q_{(a)} q_{(a)}'}(R_a) = \frac{\mu_a}{m_a} \int \Phi^*_{q_{(a)} \nu_a} [V_b(\rho_b) + V_c(\rho_c)] \times$$

$$\times \Phi_{q_{(a)}' \nu_a'} d\rho_a \, d\Omega_{\vec{R}_a} \, d\Omega_{\vec{\rho}_a} ,$$

$$\Phi_{a_a \nu_a} = \phi_{a_a \ell_a \bar{m}_a}(\rho_a) Y_{\ell_a \bar{m}_a}(\vec{\rho}_a/\rho_a) Y_{L_a M_a}(\vec{R}_a/R_a),$$

$$\Phi_{q_{(a)} \nu_a} = \phi_{q_{(a)} \ell_a m_a}(\rho_a) Y_{\ell_a \bar{m}_a}(\vec{\rho}_a/\rho_a) Y_{L_a M_a}(\vec{R}_a/R_a)$$

и, как следует из закона сохранения углового момента,

$$\bar{m}_a + \bar{M}_a = \bar{m}_a' + \bar{M}_a' .$$

При решении полученной системы /5/ необходимо знать волновые функции двухчастичной подсистемы, т.е. решение уравнений /4а/ и /4б/. Приближенный метод решения этих уравнений в интегральной форме подробно обсуждался в /10/, поэтому здесь мы будем считать, что волновые функции ϕ_{a_a} и $\phi_{\vec{q}_{(a)}}$ известны. Теперь систему уравнений /5/ перепишем в интегральной форме.

$$\Psi^{(+)}_{a_a \nu_a}(R_a) = s_{L_a}(R_a, \chi_{a_a}) \delta_{a_{a_0} a_a} \delta_{\nu_{a_0} \nu_a} +$$

$$+ \int G^{(+)}_{L_a}(R_a, R_a', E_{a_a}) J^{\nu_a}_{a_a}(R_a') dR_a' \qquad /6/$$

$$\Psi^{(+)}_{q_{(a)}\nu_a}(R\ )=\int G^{(+)}_{L_a}(R_a\,,R_a'\,,E_{\,q(a)}\ )J^{\nu_a}_{q_{(a)}}(R_a')dR_a' .$$

Здесь a_{a_0}, ν_{a_0} - квантовые числа входного канала, $G^{(+)}_{L_a}(R_a\,,R_a'\,,E_{\,a_a})$ и $G^{(+)}_{L_a}(R_a,R_a'\,,E_{\,q_{(a)}})$ - функции Грина однородных уравнений при $J^{\nu_a}_{a_a}=0$ и $J^{\nu_a}_{q_{(a)}}=0$.

Учитывая явный вид функции Грина/1,10/ из системы уравнений /6/ находим, что при $R_a\to\infty$ $\Psi^{(+)}_{a_a\nu_a}$ и $\Psi^{(+)}_{q_{(a)}\nu_a}$ имеют следующую асимптотику:

$$\Psi^{(+)}_{a_a\nu_a}(R_a)\approx\sin\left(R_a\mu_a\chi_{a_a}-\frac{\pi L_a}{2}\right)\delta_{a_{a_0}a_a}\,\delta_{\nu_{a_0}\nu_a}+$$

$$+f_{\nu_a}(E_{a_a})\,e^{\,i(R_a\mu_a\chi_{a_a}-\frac{\pi L_a}{2})}, \qquad /7/$$

$$\Psi^{(+)}_{q_{(a)}\nu_a}(R_a)\simeq f_{\nu_a}(E_{\,q_{(a)}})\,e^{\,i(R_a\mu_a\chi_{q_{(a)}}-\frac{\pi L_a}{2})},$$

где

$$f_{\nu_a}(E_{a_a})=-\frac{1}{sh\,\chi_{a_a}}\int s^*_{L_a}(R_a\,,\chi_{a_a}\ )J^{\nu_a}_{a_a}(R_a\ )\,dR_a\ ,$$

$$/8/$$

$$f_{\nu_a}(E_{q_{(a)}})=-\frac{1}{sh\chi_{q_{(a)}}}\int s^*_{L_a}(R_a\,,\chi_{q_{(a)}})J^{\nu_a}_{q_{(a)}}(R_a)\,dR_a$$

- парциальные амплитуды рассеяния прямого канала и канала развала.

Если квазипотенциалы V_b, V_c удовлетворяют условию

$$\int\rho\,V(\rho)\,d\rho<\infty,$$

то можно показать, что функции $J^{\nu_a}_{a_a}(R_a)$ и $J^{\nu_a}_{q_{(a)}}(R_a)$- квадратично интегрируемые функции и справедливо следующее разложение:

$$J^{\nu_a}_{a_a}(R_a)=\sum_n A_n^{a_a\nu_a}\,\Phi_n(R_a), \qquad /9/$$

$$J^{\nu_a}_{q_{(a)}}(R_a)=\sum_m A_m^{q_{(a)}\nu_a}\Phi_m(R_a),$$

где

$$A_n^{\alpha_a\nu_a}=\int\Phi_n^*(R_a)J^{\nu_a}_{\alpha_a}(R_a)dR_a,$$
$$A_m^{q_{(a)}\nu_a}=\int\Phi_m^*(R_a)J^{\nu_a}_{q_{(a)}}(R_a)dR_a, \qquad /10/$$

и $\Phi_n(R_a)$, $\Phi_m(R_a)$ - полный набор известных функций.

Используя разложение /9/, решение системы /6/ и парциальные амплитуды рассеяния /8/ получим в виде:

$$\Psi^{(+)}_{\alpha_a\nu_a}(R_a)=s_{L_a}(R_a,\chi_{\alpha_a})\delta_{\alpha_{a_0}\alpha_a}\delta_{\nu_{a_0}\nu_a}+$$
$$+\sum_n A_n^{\alpha_a\nu_a}\Psi_{\alpha_a\nu_a n}(R_a), \qquad /11/$$
$$\Psi^{(+)}_{q_{(a)}\nu_a}(R_a)=\sum_m A_m^{q_{(a)}\nu_a}\Psi_{q_{(a)}\nu_a m}(R_a)$$

и

$$f_{\nu_a}(E_{\alpha_a})=\sum_n A_n^{\alpha_a\nu_z}f_{\nu_a n}(E_{\alpha_a}),$$
$$f_{\nu_a}(E_{q_{(a)}})=\sum_m A_m^{q_{(a)}\nu_a}f_{\nu_a m}(E_{q_{(a)}}), \qquad /12/$$

где

$$\Psi_{\alpha_a\nu_a n}(R_a)=\int G^{(+)}_{L_a}(R_a,R_a',E_{\alpha_a})\Phi_n(R_a')dR_a'$$
$$\Psi_{q_{(a)}\nu_a n}(R_a)=\int G^{(+)}_{L_a}(R_a,R_a',E_{q_{(a)}})\Phi_m(R_a')dR_a'$$

и

$$f_{\nu_a n}(E_{\alpha_a})=-\frac{1}{sh\chi_{\alpha_a}}\int s^*_{L_a}(R_a,\chi_{\alpha_a})\Phi_n(R_a)dR_a$$

$$f_{\nu_a m}(E_{q_{(a)}}) = -\frac{1}{sh\chi_{q_{(a)}}}\int s^*_{L_a}(R_a, \chi_{q_{(a)}})\Phi_m(R_a)dR_a$$

- известные функции.

Итак, мы представили решение уравнения /6/ и парциальные амплитуды рассеяния в форме /11/ и /12/ через неизвестные коэффициенты разложения $A_n^{a_a \nu_a}$ и $A_n^{q_{(a)}\nu_a}$. Система уравнений на эти коэффициенты получается путем подстановки /11/ в /10/. Такой метод решения системы уравнений был исследован в ряде работ /11/.

2. *Фазовые уравнения для реакций общего типа*

В этом пункте мы приведем окончательный вид фазовых уравнений на парциальные амплитуды рассеяния, которые получаются методом, развитым в работе /10/. Эти уравнения имеют вид:

$$\frac{d}{dR_a} f_{\nu_a}(E_{a_a}, R_a) = -\frac{1}{sh\chi_{a_a}}\nu_{L_a}(R_a)Q_{a_a\nu_a}(E_{a_a}, R_a)\times$$

$$\times\{\sum_{a_a'\nu_a'} U_{a_a a_a'}^{\nu_a\nu_a'}(R_a)Q_{a_a\nu_a'}(E_{a_a'}, R_a)+$$

$$+\sum_{\nu_a'}\int U_{a_a q_{(a)}}^{\nu_a\nu_a'} f_{\nu_a'}(E_{q_{(a)}}, R_a)\Phi^{(2)}_{q_{(a)}\nu_a'}(R_a)dq_{(a)}/$$

$$/\sqrt{1+\vec{q}^{\,2}_{(a)}/m_b m_c}\ \},\tag{13}$$

$$\frac{d}{dR_a} f_{\nu_a}(E_{q_{(a)}}, R_a) = -\frac{1}{sh\chi_{q_{(a)}}}\nu_{L_a}(R_a)\times$$

$$\times f_{\nu_a}(E_{q_{(a)}}, R_a)\Phi^{(2)}_{q_{(a)}\nu_a}\{\sum_{a_a'\nu_a'} U_{q_{(a)}a_a'}^{\nu_a\nu_a'}(R_a)\times$$

$$\times Q_{\alpha_a' \nu_a'}(E_{\alpha_a'}, R_a) + \sum_{\nu_a'} \int U^{\nu_a \nu_a'}_{q_{(a)} q'_{(a)}}(R_a) f_{\nu_a'}(E_{q'_{(a)}}, R_a) \times$$

$$\times \Phi^{(2)}_{q'_{(a)} \nu_a'}(R_a) dq'_{(a)} / \sqrt{1 + \vec{q}'^{\,2}_{(a)} / m_b m_c} \}$$

$$Q_{\alpha_a \nu_a}(E_{\alpha_a}, R_a) = \Phi^{(1)}_{\alpha_a \nu_a}(R_a) + f_{\nu_a}(E_{\alpha_a}, R_a) \times$$

$$\times \Phi^{(2)}_{\alpha_a \nu_a}(R_a),$$

$$\Phi^{(1)}_{\alpha_a \nu_a}(R_a) = s_{L_a}(R_a, \chi_{\alpha_a}) \delta_{\alpha_{a_0} \alpha_a} \delta_{\nu_{a_0} \nu_a} +$$

$$+ \int_0^{R_a} D^{(+)}_{L_a}(R_a, R_a', E_{\alpha_a}) J^{\nu_a}_{\alpha_a}(R_a') dR_a',$$

/14/

$$\Phi^{(2)}_{\alpha_a \nu_a}(R_a) = e^{(1)}_{L_a}(R_a, \chi_{\alpha_a}) + \int_0^{R_a} D^{(+)}_{L_a}(R_a, R_a', E_{\alpha_a}) \times$$

$$\times J^{\nu_a}_{\alpha_a}(R_a') dR_a',$$

$$\Phi^{(2)}_{q_{(a)} \nu_a}(R_a) = e^{(1)}_{L_a}(R_a, \chi_{q_{(a)}}) +$$

$$+ \int_0^{R_a} D^{(+)}_{L_a}(R_a, R_a', E_{q_{(a)}}) J^{\nu_a}_{q_{(a)}}(R_a') dR_a',$$

а функции ν_{L_a}, s_{L_a}, $e^{(1)}_{L_a}$ и $D^{(+)}_{L_a}$ определены в /10/.

Уравнения /13/ являются аналогом фазовых уравнений, а функции $\Phi^{(1)}_{\alpha_a \nu_a}$, $\Phi^{(2)}_{\alpha_a \nu_a}$, $\Phi^{(2)}_{q_{(a)} \nu_a}$ зависят от потенциала взаимодействия, поэтому при численных расчетах уравнения следует решать совместно.

3. Релятивистская форма амплитуды Брейта-Вигнера

Для простоты и наглядности предположим, что подсистема частиц $(b+c)$ имеет только два дискретных уровня. Тогда для s-рассеяния и сферически-симметричных потенциалов система имеет вид:

$$[2E_{1a} - 2\mu_a ch(\frac{i}{\mu_a}\frac{d}{dR_a}) - U_{11}(R_a)]\times$$
$$\times\Psi_1(R_a) = U_{12}(R_a)\Psi_2(R_a), \qquad /15а/$$

$$[2E_{2a} - 2\mu_a sh(\frac{i}{\mu_a}\frac{d}{dR_a}) - U_{22}(R_a)]\times$$
$$\times\Psi_2(R_a) = U_{21}(R_a)\Psi_1(R_a). \qquad /15б/$$

Здесь введены обозначения: $E_{2a} = E_{1a} - |\Delta W_{12a}|$, $|\Delta W_{12a}| = |W_{1a}| - |W_{2a}|$ - энергия неупругого порога. Будем искать такие решения Ψ_1 и Ψ_2, которые обращаются в нуль при $R_a = 0$ и имеют следующий асимптотический вид:

$$\Psi_1 \sim \sin(\chi_{E_{1a}}\mu_a R_a) + f\exp(i\chi_{E_{1a}}\mu_a R_a),$$

$$\Psi_2 \sim \exp(-\chi_{E_{2a}}\mu_a R_a),$$

$$(E_{1a} \equiv \mu_a sh\chi_{E_{1a}};\, E_{2a} \equiv \mu_a \cos\chi_{E_{2a}}).$$

Если во втором несвязанном канале могут существовать дискретные уровни энергии E_n, то резонансные эффекты в первом канале должны наблюдаться при таких значениях E_{1a}, когда E_{2a} близко к одному из значений $E_n = E_{res}$.

Используя билинейную форму функции Грина, которая удовлетворяет уравнению:

$$[2E_{2a} - 2\mu_a ch(\frac{i}{\mu_a}\frac{d}{dR_a})]G_0^{(+)}(E_{2a}; R_a, R_a') = \delta(R_a - R_a'),$$

решение уравнения /15б/ запишем так:

$$\Psi_2 = \sum_n \frac{\phi_n(R_a)}{2E_{2a}-2E_n} \int dR_a' \, \phi_n^*(R_a') U_{21} \Psi_1(R_a') +$$

$$+ \iint \frac{\phi(p_{(a)}', R_a)\phi^*(p_{(a)}', R_a') U_{21}(R_a')\Psi_1(R_a')}{\sqrt{1+\vec{p}_{(a)}'^2/\mu_a^2}\,(2E_{2a} - 2E_{p_{(a)}'} + i\epsilon)} dR_a' \, d\vec{p}_{(a)}'.$$

Теперь, подставляя полученное решение в /15а/, получим уравнение на $\Psi_1(R_a)$:

$$[2E_{1a} - 2\mu_a ch(\frac{i}{\mu_a}\frac{d}{dR_a}) - U(R_a)]\Psi_1(R_a) = \qquad /16/$$

$$= C^{res} \frac{U_{12}(R_a)\phi^{res}(R_a)}{2E_{2a} - 2E_{res}},$$

где

$$C^{res} = \int \phi^{res}(R_a) U_{21}(R_a) \Psi_1(R_a) dR_a,$$

$$U(R_a) = U_{11}(R_a) + U_{12}(R_a) \sum_{n \neq n_{res}} \int \frac{\phi_n(R_a)\phi_n^*(R_a')}{2E_{2a} - 2E_n} \times$$

$$\times U_{21}(R_a')\Psi_1(R_a') dR_a' +$$

$$+ U_{12}(R_a) \iint \frac{\phi(p_{(a)}', R_a)\phi^*(p_{(a)}', R_a') U_{21}(R_a')\Psi_1(R_a')}{\sqrt{1+\vec{p}_{(a)}'^2/\mu_a^2}\,(2E_{2a} - 2E_{p_{(a)}'} + i\epsilon)} dR_a' \, dp_{(a)}'.$$

Переписывая /16/ в интегральном виде и устремляя $R_a \to \infty$, получим явный вид амплитуды рассеяния:

$$f = f_{пот} + f_{Б-В},$$

где

$$f_{пот} = \int_0^\infty dR_a \, U_0(R_a, \chi_{E_{1a}}) U(R_a) \Phi(R_a), \qquad /17/$$

$$f_{Б-В} = \frac{\Gamma_{12}\,\Gamma_{21}}{(2E_{1a} - 2|\Delta W_{12a}| - 2E_{res} - \Delta E) + i\Gamma_{12}\Gamma_{21}} \, . \qquad /18/$$

Здесь

$$\Gamma_{12} = \int \phi^{res}(R_a)\, U_{12}(R_a)\, \Phi(R_a)\, dR_a \, ,$$

$$\Gamma_{21} = \int \phi^{res}(R_a)\, U_{21}(R_a)\, \Phi(R_a)\, dR_a \, ,$$

$$\Delta E = P \int \frac{\Gamma_{12}\Gamma_{21}\; dp'_{(a)}}{(2E_{1a} - 2E_{p'_{(a)}})\sqrt{1 + \vec{p}\,'^2/\mu_a^2}} \, ,$$

а $\Phi(R_a)$ - решение уравнения /16/ с правой частью, равной нулю. Легко видеть, что в пределе больших масс /18/ переходит в нерелятивистскую форму амплитуды Брейта-Вигнера /12/.

4. *Пример точно решаемой релятивистской двухканальной задачи*

В /13/ предложена модель, в которой система двух связанных уравнений Шредингера решается точно, если U_{ij} потенциалы взять в форме прямоугольной ямы с одинаковым радиусом взаимодействия.

Модель наглядно объясняет такой, например, факт, как существование связанного состояния и резонанса в одной и той же парциальной волне /известный, например, в $\pi - N$ -рассеянии, когда нуклон, находясь в P_{11}-состоянии, проявляет себя как связанное состояние и как резонанс Ропера, что невозможно понять в одноканальном приближении /14/.

В нашем случае систему двух релятивистских конечно-разностных уравнений:

$$[2E_1 - 2\mu\, ch\,(\frac{i}{\mu}\frac{d}{dr}) - U_{11}\,]\Psi_1(r) = U_{12}\Psi_2(r),$$
$$[2E_2 - 2\mu\, ch(\frac{i}{\mu}\frac{d}{dr}) - U_{22}\,]\Psi_2(r) = U_{21}\Psi_1(r). \qquad /19/$$

также можно решить аналитически, если все U_{11}, U_{22}, U_{12}, U_{21} - квазипотенциалы имеют форму прямоугольной ямы с одинаковым радиусом взаимодействия a. Для этого решение /19/ будем искать в виде:

$$\Psi_1^I = A(r)\,[a\sin(\chi_p\,\mu r) + b\sin(\chi_q\,\mu r)],$$
$$\Psi_2^I = B(r)[\alpha a\sin(\chi_p\,\mu r) + \beta b\sin(\chi_q\mu r)], \qquad /20/$$
при $r \leq a$

$$\Psi_1^{II} = C(r)\sin(\chi_{E_1}\,\mu r + \delta),$$
$$\Psi_2^{II} = D(r)\exp(-\chi_{E_2}\,\mu r). \qquad /21/$$
при $r > a$

Здесь $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$, $D(r)$ - неизвестные i-периодические функции, a, b, α, β - константы, подлежащие определению, и принята следующая параметризация:

$$E_1 = \mu\, ch\chi_{E_1}\ ;\ p_1 = \mu\, sh\chi_{E_1}\ ;\ E_2 = \mu\cos\chi_{E_2}\ ,$$

причем $E_2 = E_1 - |\Delta W_{12}|$, где $|\Delta W_{12}|$ - энергия неупругого порога. Выбор Ψ_1^I и Ψ_2^{II} в форме /21/ продиктован тем, чтобы в первом входном канале происходило рассеяние /δ - фаза рассеяния/, а во втором существовали связанные состояния.

Теперь, пользуясь условием сшивания /1/ в точке

$$\left|\begin{matrix} \Psi_{1,2}^{I} & \Psi_{1,2}^{II} \\ \frac{1}{i}\,sh\frac{i}{\mu}\frac{d}{dr}\Psi_{1,2}^{I} & \frac{1}{i}\,sh\frac{i}{\mu}\frac{d}{dr}\Psi_{1,2}^{II}\end{matrix}\right|_{r=a} = 0,$$

путем несложных вычислений получим:

$$p_1 ctg\delta = \frac{p_1 \sin(\chi_{E_1}\mu_a) + \gamma_1 \cos(\chi_{E_1}\mu_a)}{\cos(\chi_{E_1}\mu_a) - (\gamma_1/p_1)\sin(\chi_{E_1}\mu_a)}, \quad /22/$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\mu[\cos(\chi_p \mu a) sh\chi_p + \gamma_2 \cos(\chi_q \mu a) sh\chi_q]}{\sin(\chi_p \mu a) + \gamma_2 \sin(\chi_q \mu a)},$$

$$\gamma_2 = \frac{(2\mu\, ch\chi_p + U_{11} - 2E_1)(\cos(\chi_p \mu_a) sh\chi_p - 2\sin\chi_{E_2} \sin(\chi_p \mu a))}{(2\mu ch\chi_q + U_{11} - 2E_1)(i\sin\chi_{E_2} \sin(\chi_q \mu a) - \cos(\chi_q \mu a) sh\chi_q)},$$

а явный вид $ch\chi_p$ и $ch\chi_q$ можно найти, подставляя /20/ в систему уравнений /19/:

$$ch\chi_p = \frac{1}{4\mu}\{[(4E_1 - 2|\Delta W_{12}| - U_{11} - U_{22})] + $$
$$+[(2|\Delta W_{12}| + U_{22} - U_{11})^2 + 4U_{12}U_{21}]^{1/2}\},$$

$$ch\chi_q = \frac{1}{4\mu}\{[4E_1 - 2|\Delta W_{12}| - U_{11} - U_{22})] -$$
$$-[(2|\Delta W_{12}| + U_{22} - U_{11})^2 + 4U_{12}U_{21}]^{1/2}\}.$$

Тогда сечение рассеяния через T_{11} -матрицу рассеяния в первом канале может быть записано так:

$$\sigma_e(E_1) = 4\pi|T_{11}|^2 = 4\pi|(P_1 ctg\delta - ip_1)|^2.$$

Как и в нерелятивистском случае, если U_{22} достаточно велик, чтобы образовать связанное состояние во втором канале, $p_1 ctg\,\delta$ и $\sigma_e(E_1)$ будут иметь резонансное поведение в области энергий, меньших энергии неупругого порога.

Литература

1. V.G.Kadyshevsky. Nucl.Phys., B6, 125 (1968).
   В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов, Н.Б.Скачков. ЭЧАЯ, том 2, выпуск 3, Атомиздат, Москва, 1971.
2. В.М.Виноградов. Препринт ОИЯИ Р2-5099, Дубна, 1970; Препринт ОИЯИ Р2-5100, Дубна, 1970; Препринт ОИЯИ Р2-5101, Дубна, 1970; Препринт ОИЯИ Р2-5661, Дубна, 1971.
3. H,Feshbach. Ann. of Phys., 5, 357 (1958); 19, 287 (1962).
4. Г.Ф.Друкарев. "Теория столкновений электронов с атомами". Изд-во физ.-мат. литературы, Москва, 1963.
   Т.Г.Ефименко, В.П.Жигунов, Б.Н.Захарьев. Ann. of Phys., 47, 275, 1968.
   И.В.Амирханов, З.К.Смедарчина, Е.Х.Христова. ТМФ, 3, 392, 1970.
5. H.W.Wyld, Jr. Phys.Rev., 155, 1649, 1967.
6. Lonis, A.B.Balaz. Phys.Rev., 137B, 1510, 1965.
   L.A.P Balazs, S.M.Vaidya. Phys.Rev., 140B, 1025, 1965.
   S.M.Vaidya. Phys.Rev., 151, 1192, 1966.
7. В.В.Бабиков. "Метод фазовых функций в квантовой механике". Изд-во "Наука", Москва, 1968.
   Ф.Калоджеро. "Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния". Изд-во "Мир", Москва, 1972.
8. И.С.Шапиро. ДАН СССР, 106, 647, 1956.
9. М.Д.Матеев, Р.М.Мир-Касимов, Н.Б.Скачков. Препринт ОИЯИ Р2-5605, Дубна, 1971.
10. И.В.Амирханов, В.Е.Гречко, Р.К.Дементьев. Препринт ОИЯИ Р4-7105, Дубна, 1973.
11. И.В.Амирханов, В.С.Гурьянов. Препринт ОИЯИ Р4-3741, Дубна, 1968.
    И.В.Амирханов, М.А.Касымжанов. Препринт ОИЯИ Р4-4336, Дубна, 1968.
    И.В.Амирханов, В.Е.Гречко, А.И.Титов. Вестник МГУ, 5, 579, 1971.
12. Н.Мотт, Г.Месси. "Теория атомных столкновений". Изд-во "Мир", Москва, 1969.
13. A.N.Kamal and H.J.Kreuzer. Phys.Rev., 2, 2034, 1970.
14. J.S.Ball and D.Y.Wong. Phys.Rev., 133B, 179, 1964.
    P.W.Coulter and G.L.Shaw. Phys.Rev., 141, 1419, 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 мая 1973 года.