СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P4 - 7105

И.В.Амирханов, В.Е.Гречко, Р.К.Дементьев

МЕТОД ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ. 1. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р4 - 7105

И.В.Амирханов, В.Е.Гречко,* Р.К.Дементьев*

МЕТОД ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ. 1. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

* НИИЯФ МГУ

В последнее время в квантовой теории поля [1] были достигнуты значительные успехи в описании системы двух взаимодействующих частиц с помощью квазипотенциального подхода.

Квазипотенциальные уравнения оказались весьма удобными как при исследовании свойств связанных состояний [2], так и при решении задачи рассеяния [3].

В работах [4–9] предложен другой вариант трехмерной формулировки задачи двух тел типа квазипотенциальной, который мы и будем использовать в настоящей статье.

Как показано в [11], известный квантовомеханический метод фазовых функций [12,13] удается распространить на случай релятивистского рассеяния двух скалярных частиц в рамках конечно-разностного формализма квазипотенциальной теории. При этом полученные уравнения являются нелинейными конечно-разностными уравнениями.

В работе [18] был предложен несколько иной, чем в [12,13], способ получения уравнений метода фазовых функций, который для рассеяния релятивистских частиц опять приводит к обыкновенным нелинейным дифференциальным уравнениям первого порядка, причем, в отличие от [11], удается сохранить обычный смысл "обрезания" потенциала.

В настоящей статье результаты [18] обобщаются на случай релятивистского рассеяния двух бесспиновых частиц с неравными массами.

1. Приведем основные формулы, необходимые в дальнейшем.

Как было показано в [9,10], задача рассеяния двух частиц с массами m_1 и m_2 и, соответственно, 4-импульсами p_1 и p_2 сводится к описанию движения одной эффективной частицы с массой $m_{(12)}=\sqrt{m_1 m_2}$ и относительным импульсом $\vec{q}_{(12)}$ в квазипотенциальном поле. Для полной энергии $W\equiv\sqrt{s}=\sqrt{(p_1+p_2)^2}$ в системе центра масс $(\vec{p}_1=-\vec{p}_2\equiv\vec{p})$ имеем соотношение* :

$$W=\sqrt{s}=\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m_1^2}+\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m_2^2}=\frac{m_1+m_2}{\sqrt{m_1 m_2}}\sqrt{m_1 m_2+\vec{q}^{\,2}_{(12)}}. \qquad /1/$$

При рассмотрении задачи рассеяния удобно ввести следующую параметризацию:

$$|\vec{p}_1|=m_1\,sh\chi_1\,, \qquad p_{10}=m_1\,ch\chi_1\,,$$

$$|\vec{p}_2|=m_2\,sh\chi_2\,, \qquad p_{20}=m_2\,ch\chi_2\,, \qquad /2/$$

$$q_{(12)}\equiv|\vec{q}_{(12)}|=\sqrt{m_1 m_2}\,sh\chi_{(12)}\,, \quad q_{(12)0}=\sqrt{m_1 m_2}\,ch\chi_{(12)}.$$

Тогда /1/ принимает простой вид:

$$W=m_1\,ch\chi_1+m_2\,ch\chi_2=(m_1+m_2)\,ch\chi_{(12)};$$

$$m_1\,sh\chi_1=m_2\,sh\chi_2\,; \qquad /3/$$

$$q_{(12)}=2\mu\,sh\frac{\chi_1+\chi_2}{2}\,, \qquad \mu=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}.$$

Полная амплитуда рассеяния $f(W,\cos\theta)$/ θ - угол рассеяния/ на энергетической поверхности удовлетворяет следующему условию нормировки:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=C(m_1,m_2,W^2)\,|f(W,\cos\theta)|^2, \qquad /4/$$

где

* В данной работе всюду используется система единиц, в которой $\hbar=c=1$.

$$C(m_1,m_2,W^2)=\frac{4\mu}{(m_1+m_2)(1-(m_1-m_2)^2/W^2)}.$$

Она связана с квазипотенциалом V "нерелятивистским образом"

$$f(W,\cos\theta)=-\frac{\mu}{2\pi}\int\xi^*(\vec{q}_{(12)},\vec{r})\,V(\vec{r},\vec{r}\,',W)\times$$

$$\times\Psi^{(+)}_{\vec{q}_{(12)}}(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,d\vec{r}\,'. \qquad /5а/$$

Если потенциал локальный $(V(\vec{r},\vec{r}\,',W)=\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')V(\vec{r},W)$ и центрально симметричный $(V(\vec{r},W)=V(r,W),\ r=|\vec{r}|)$, то

$$f(W,\cos\theta)=-\frac{\mu}{2\pi}\int\xi^*(\vec{q}_{(12)},\vec{r})\,V(r,W)\,\Psi^{(+)}_{\vec{q}_{(12)}}(\vec{r})\,d\vec{r}. \qquad /5б/$$

В /5а/ и /5б/ $\xi(\vec{q}_{(12)},\vec{r})$ - известная функция Шапиро [14], которая служнт аналогом плоской волны $\left(\xi(\vec{q}_{(12)},\vec{r})=\left(\frac{q_{(12)_0}-\vec{q}_{(12)}\vec{n}}{\sqrt{m_1 m_2}}\right)^{-1+ir\sqrt{m_1m_2}},\ \vec{r}=r\vec{n},\ \vec{n}=1\right)$, $\Psi^{(+)}_{\vec{q}_{(12)}}(\vec{r})$ - волновая функция, удовлетворяющая, соответственно, интегральным уравнениям [8,9] :

$$\Psi^{(+)}_{\vec{q}_{(12)}}(\vec{r})=\xi(\vec{q}_{(12)},\vec{r})+\int G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}\,',W)\,V(\vec{r}\,',\vec{r}\,'',W)\times$$

$$\times\Psi^{(+)}_{\vec{q}_{(12)}}(\vec{r}\,'')\,d\vec{r}\,'\,d\vec{r}\,'', \qquad /6а/$$

$$\Psi^{(+)}_{\vec{q}_{(12)}}(\vec{r})=\xi(\vec{q}_{(12)},\vec{r})+\int G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}\,',W)\,V(\vec{r}\,',W)\times$$

$$\times\Psi^{(+)}_{q_{(12)}}(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,', \qquad /6б/$$

а функция Грина

$$G^{(+)}(\vec r,\vec r\,',W)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\frac{\xi(\vec K_{(12)},\vec r)\,\xi^*(\vec K_{(12)},\vec r\,')}{W-\frac{m_1+m_2}{\sqrt{m_1m_2}}\sqrt{m_1m_2+\vec K^2_{(12)}}+i\epsilon}\times\frac{d\vec K_{(12)}}{\sqrt{1+\vec K^2_{(12)}/m_1m_2}}. \qquad /7/$$

Парциальные разложения функций $\xi(\vec q_{(12)},\vec r)$, $\Psi^{(+)}_{\vec q_{(12)}}(\vec r)$ и $G^{(+)}(\vec r,\vec r\,',W)$ задаются в виде:

$$\xi(\vec q_{(12)},\vec r)=\frac{1}{r\sqrt{m_1m_2}\,sh\,\chi_{(12)}}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)i^{\ell}s_\ell(r,\chi_{(12)})\times P_\ell\left(\frac{\vec q_{(12)}\vec r}{q_{(12)}r}\right), \qquad /8а/$$

$$\Psi^{(+)}_{\vec q_{(12)}}(\vec r)=\frac{1}{r\sqrt{m_1m_2}\,sh\,\chi_{(12)}}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)i^{\ell}\Psi_\ell(r,q_{(12)})\times P_\ell\left(\frac{\vec q_{(12)}\vec r}{q_{(12)}r}\right), \qquad /8б/$$

$$G^{(+)}(\vec r,\vec r\,',W)=\frac{1}{4\pi rr'}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)G^{(+)}_\ell(r,r',W)P_\ell\left(\frac{\vec r\cdot\vec r\,'}{rr'}\right). \qquad /8в/$$

Подставляя разложения /8а/, /8б/ и /8в/ в /7/ и /6/, получим интегральное уравнение на парциальную волновую функцию:

$$\Psi^{(+)}_\ell(r,q_{(12)})=s_\ell(r,\chi_{(12)})+\int G^{(+)}_\ell(r,r',W)V(r',W)\times\Psi^{(+)}_\ell(r',q_{(12)})\,dr', \qquad /9/$$

где парциальная функция Грина /см., например, [7,8,11] / имеет явный вид:

$$G^{(+)}_\ell(r,r',W)=-\frac{2\mu\nu_\ell(r')}{\sqrt{m_1m_2}\,sh\,\chi_{(12)}}\{\hat\theta(r-r')e^{(1)}_\ell(r,\chi_{(12)})\times s_\ell(r',\chi_{(12)})+ \qquad /10/$$

$$\hat\theta(r'-r)e^{(1)}_\ell(r',\chi_{(12)})s_\ell(r,\chi_{(12)})+\hat\theta(-r-r')[2is_\ell(r,\chi_{(12)})\times s_\ell(r',\chi_{(12)})-e^{(1)}_\ell(r,\chi_{(12)})s_\ell(r',\chi_{(12)})-$$

$$-e^{(1)}_\ell(r',\chi_{(12)})s_\ell(r,\chi_{(12)})]\},$$

$$s_\ell(r,\chi_{(12)})=\sqrt{\frac{\pi}{2}sh\chi_{(12)}}\,(-i)^{\ell+1}\frac{\Gamma(ir\sqrt{m_1m_2}+\ell+1)}{\Gamma(ir\sqrt{m_1m_2})}\times P^{-\ell-1/2}_{ir\sqrt{m_1m_2}-1/2}(ch\,\chi_{(12)}),$$

$$c_\ell(r,\chi_{(12)})=\sqrt{\frac{\pi}{2}sh\chi_{(12)}}\,(i)^{-\ell}\frac{\Gamma(ir\sqrt{m_1m_2}-\ell)}{\Gamma(ir\sqrt{m_1m_2})}\times P^{\ell+1/2}_{ir\sqrt{m_1m_2}-1/2}(ch\,\chi_{(12)}), \qquad /11/$$

$$e^{(1,2)}_\ell(r,\chi_{(1,2)})=c_\ell(r,\chi_{(12)})\pm is_\ell(r,\chi_{(12)}),$$

$$\nu_\ell(r)=(-1)^{\ell+1}\frac{\Gamma(-ir\sqrt{m_1m_2}+\ell+1)\Gamma(ir\sqrt{m_1m_2})}{\Gamma(-ir\sqrt{m_1m_2})\Gamma(ir\sqrt{m_1m_2}+\ell+1)},$$

и, наконе, $\hat{\theta}(r)$ - обобщенная ступенчатая функция [7,8,11]. Учитывая правило комплексного сопряжения

$$s_\ell^* = \nu_\ell s_\ell \quad , \quad c_\ell^* = \nu_\ell c_\ell \ , \quad e_\ell^{(1,2)*} = \nu_\ell e_\ell^{(2,1)},$$

из /10/ можно убедиться, что для функции Грина справедливо соотношение:

$$G_\ell^{(+)}(r, r', W) = \frac{\nu_\ell(r')}{\nu_\ell(r)} G_\ell^{(+)}(r', r, W). \qquad /12/$$

Заметим, что, если ввести новую функцию $\tilde{\Psi}_\ell^{(+)}(r, q_{(12)}) = \nu_\ell(r)\Psi_\ell^{(+)}(r, q_{(12)})$, то она в силу /12/ будет удовлетворять уравнению:

$$\tilde{\Psi}_\ell^{(+)}(r, q_{(12)}) = s_\ell^*(r, \chi_{(12)}) + \int G_\ell^{(+)}(r', r, W) V(r', W) \tilde{\Psi}_\ell(r', q_{(12)}) dr' \qquad /13/$$

Из /9/, /10/ и /11/ находим, что при $r \to \infty$ функция $\Psi_\ell^{(+)}(r, q_{(12)})$ имеет следующую асимптотику:

$$\Psi_\ell^{(+)}(r, q_{(12)}) \simeq \sin(r\sqrt{m_1 m_2}\chi_{(12)} - \frac{\pi\ell}{2}) + f_\ell(W) e^{i(r\sqrt{m_1 m_2}\chi_{(12)} - \frac{\pi\ell}{2})}, \qquad /14/$$

где

$$f_\ell(W) = -\frac{2\mu}{\sqrt{m_1 m_2}\, sh\chi_{(12)}} \int s_\ell^*(r, \chi_{(12)}) V(r, W) \Psi_\ell^{(+)}(r, q_{(12)}) dr \qquad /15/$$

- парциальная амплитуда рассеяния, а ее связь с фазой рассеяния $\delta_\ell(W)$ и диагональным по ℓ элементом S-матрицы $s_\ell(W)$ дается простыми соотношениями:

$$f_\ell(W) = \frac{s_\ell(W) - 1}{2i} = e^{i\delta_\ell(W)} \sin\delta_\ell(W). \qquad /16/$$

Тогда для полного сечения с учетом /4/, /15/ и /16/ имеем

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 4\pi C(m_1, m_2, W^2) \frac{1}{q_{(12)}^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) |f_\ell(W)|^2 \qquad /17/$$

$$= 4\pi C(m_1, m_2, W^2) \frac{1}{q_{(12)}^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2\delta_\ell(W).$$

2. Здесь покажем, что метод, развитый в [16], можно применить к решению уравнения /9/.

Если квазипотенциал - квадратично интегрируемая функция, то справедливо следующее разложение:

$$V(r, W)\Psi_\ell^{(+)}(r, q_{(12)}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(W)\Phi_n(r), \qquad /18/$$

где

$$A_n(W) = \int \Phi_n^*(r) V(r, W) \Psi_\ell^{(+)}(r, q_{(12)}) \qquad /19/$$

и $\Phi_n(r)$ - полный набор известных функций.

Подставляя разложение /18/ в уравнение /9/ и в определение парциальной амплитуды /15/, получим:

$$\Psi_\ell^{(+)}(r, q_{(12)}) = s_\ell(r, \chi_{(12)}) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(W)\Psi_{\ell n}(r, q_{(12)}),$$

$$f_\ell(W) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(W) f_{\ell n}(W), \qquad /20/$$

где

$$\Psi_{\ell n}(r, q_{(12)}) = \int G_\ell^{(+)}(r, r', W)\Phi_n(r') dr',$$

$$f_{\ell n}(W) = -\frac{2i\mu}{\sqrt{m_1 m_2}\, sh\chi_{(12)}} \int s_\ell^*(r, \chi_{(12)})\Phi_n(r) dr. \qquad /21/$$

Итак, мы представили решение уравнения /9/ и парциальную амплитуду рассеяния в форме /20/ через неизвестные коэффициенты разложения $A_n(W)$. Система алгебраических уравнений на эти коэффициенты получается путем подстановки /20/ в /19/, которую можно решать методом редукции [16]. Такой метод был применен для решения нерелятивистской задачи трех тел [17] и численные расчеты показали, что в разложениях типа /18/ можно ограничиться примерно семью - десятью членами. Это позволяет надеяться, что применение этого метода к решению релятивистской задачи рассеяния, а также для нахождения уровней энергии связанных состояний в системе двух тел может оказаться эффективным.

3. Теперь обратимся непосредственно к выводу дифференциального уравнения первого порядка на парциальную амплитуду рассеяния /15/ двух бесспиновых релятивистских частиц с неравными массами /вывод аналогичных уравнений для рассеяния частиц со спином не вносит принципиальных затруднений, если учесть результаты [6,15] /.

Пусть потенциал зависит от некоторого параметра λ. Тогда волновая функция и парциальная амплитуда тоже зависят от этого параметра. Дифференцируя по λ уравнение /9/ и соотношение /15/, будем иметь:

$$\dot{\Psi}_\ell^{(+)}(r, q_{(12)}, \lambda) = \int G_\ell^{(+)}(r, r', W)\dot{V}(r', W, \lambda)\Psi_\ell^{(+)}(r', q_{(12)}, \lambda)dr' + \int G_\ell^{(+)}(r, r', W)V(r', W, \lambda)\dot{\Psi}_\ell^{(+)}(r', q_{(12)}, \lambda)dr', \qquad /22/$$

$$\dot{f}_\ell(W, \lambda) = -\frac{2\mu}{\sqrt{m_1 m_2}\, sh\chi_{(12)}}\Big[\int s_\ell^*(r, \chi_{(12)})\dot{V}(r, W, \lambda)\times \Psi_\ell^{(+)}(r, q_{(12)}, \lambda)dr + \int s_\ell^*(r, \chi_{(12)})V(r, W, \lambda)\dot{\Psi}_\ell^{(+)}(r, q_{(12)}, \lambda)dr\Big], \qquad /23/$$

где $\dot{f}_\ell = \frac{d}{d\lambda} f_\ell$, $\dot{\Psi}_\ell^{(+)} = \frac{d}{d\lambda}\Psi_\ell^{(+)}$, $\dot{V} = \frac{d}{d\lambda} V$.

Умножим теперь уравнение /22/ на $\tilde{\Psi}_\ell^{(+)} V(r, W, \lambda)$ и проинтегрируем по r. Сопоставляя данному центральному потенциалу $V(r, W, \lambda)$ последовательность обрезанных на радиусах λ потенциалов

$$V(r, W, \lambda) = V(r, W)\theta(\lambda - r), \qquad /24/$$

где θ - обычная ступенчатая функция, и, учитывая /12/, /13/ и /23/, получим:

$$\dot{f}_\ell(W, \lambda) = -\frac{2\mu}{\sqrt{m_1 m_2}\, sh\chi_{(12)}} V(\lambda, W)\nu_\ell(\lambda)[\Psi_\ell^{(+)}(\lambda, \lambda)]^2. \qquad /25/$$

В релятивистском случае, в отличии от нерелятивизма, асимптотика волновой функции наступает не в точке, где "обрезается" потенциал, а только при $r \to \infty$. В этом можно легко убедиться, если уравнение /9/ переписать в виде:

$$\Psi_\ell^{(+)}(r, q_{(12)}, \lambda) = s_\ell(r, \chi_{(12)}) + f_\ell(W, \lambda)e_\ell^{(1)}(r, \chi_{(12)}) + \int D_\ell^{(+)}(r, r', W)V(r', W, \lambda)\Psi_\ell^{(+)}(r', q_{(12)}, \lambda)dr', \qquad /26/$$

$$D_\ell^{(+)}(r, r', W) = -\frac{2\mu\nu_\ell(r')}{\sqrt{m_1 m_2}\, sh\chi_{(12)}}\{\hat{\theta}(r' - r)[e_\ell^{(1)}(r', \chi_{(12)})\times s_\ell(r, \chi_{(12)}) - e_\ell^{(1)}(r, \chi_{(12)})s_\ell(r', \chi_{(12)})] + \hat{\theta}(-r - r')[2i s_\ell(r, \chi_{(12)})s_\ell(r', \chi_{(12)}) - e_\ell^{(1)}(r, \chi_{(12)})s_\ell(r', \chi_{(12)}) - e_\ell^{(1)}(r', \chi_{(12)})s_\ell(r, \chi_{(12)})]\}. \qquad /27/$$

Чтобы $f_\ell(W,\lambda)$ была физической амплитудой в точке обрезания λ, необходимо ввести некие функции $\Phi_\ell^{(1,2)}(r,q_{(12)}\lambda)$ через уравнения, которые мы определим ниже. Тогда /26/ можно переписать так:

$$\Psi_\ell^{(+)}(r,q_{(12)},\lambda)=\Phi_\ell^{(1)}(r,q_{(12)},\lambda)+f_\ell(W,\lambda)\Phi_\ell^{(2)}(r,q_{(12)},\lambda). \qquad /28/$$

Подставляя /28/ в /25/ и заменяя λ на r, получим окончательно уравнение для парциальной амплитуды рассеяния:

$$\frac{d}{dr}f_\ell(W,r)=-\frac{2\mu}{\sqrt{m_1m_2}\,sh\chi_{(12)}}V(r,W)\nu_\ell(r)[\Phi_\ell^{(1)}(r,q_{(12)})+ \qquad /29/$$

$$f_\ell(W,r)\Phi_\ell^{(2)}(r,q_{(12)})]^2,$$

где неизвестные функции $\Phi_\ell^{(1,2)}(r,q_{(12)})$ находятся из следующих уравнений

$$\Phi_\ell^{(1)}(r,q_{(12)})=s_\ell(r,\chi_{(12)})+\int_0^r D_\ell^{(+)}(r,r',W)V(r',W)\times\Phi_\ell^{(1)}(r',q_{(12)})\,dr', \qquad /30/$$

$$\Phi_\ell^{(2)}(r,q_{(12)})=e_\ell^{(1)}(r,\chi_{(12)})+\int_0^r D_\ell^{(+)}(r,r',W)V(r',W)\times\Phi_\ell^{(2)}(r',q_{(12)})\,dr'. \qquad /31/$$

Так как функции $\Phi_\ell^{(1,2)}$ зависят от потенциала, то при численных расчетах уравнения /29-31/ необходимо интегрировать совместно, например, стандартным методом Рунге-Кутта.

Если же решения уравнений /30-31/ известны, то через них можно получить, подставляя /28/ в /15/, парциальную амплитуду рассеяния в виде:

$$f_\ell(W)=-\frac{\dfrac{2\mu}{\sqrt{m_1m_2}\,sh\chi_{(12)}}\int s_\ell^*(r,\chi_{(12)})V(r,W)\Phi_\ell^{(1)}(r,q_{(12)})dr}{1+\dfrac{2\mu}{\sqrt{m_1m_2}\,sh\chi_{(12)}}\int s_\ell^*(r,\chi_{(12)})V(r,W)\Phi_\ell^{(2)}(r,q_{(12)})dr}. \qquad /32/$$

Сами уравнения /30-31/ являются уравнениями Вольтерра второго рода, при решении которых ряд, полученный методом последовательных приближений, сходится всегда, независимо от величины потенциала взаимодействия.

Подставляя найденные таким образом решения в /29/ и /32/, будем иметь приближенные выражения для амплитуды рассеяния. В частности, в первом приближении уравнение /29/ имеет вид:

$$\frac{d}{dr}f_\ell(W,r)=-\frac{2\mu}{\sqrt{m_1m_2}\,sh\chi_{(12)}}V(r,W)\nu_\ell(r)[s_\ell(r,\chi_{(12)})+f_\ell(W,r)\times \qquad /29'/$$

$$\times e_\ell^{(1)}(r,\chi_{(12)})]^2.$$

Учитывая /16/ и /11/, можно получить из /29/ и /29'/ аналогичные уравнения для фазы рассеяния и диагонального по ℓ элемента S-матрицы.

В нерелятивистском пределе /29/ и /29'/ переходят в известное дифференциальное уравнение для парциальной амплитуды рассеяния [12,13].

Заметим, что так как уравнения /29/ и /29/ являются обыкновенными дифференциальными нелинейными уравнениями первого порядка, то к ним применимы методы теории возмущений и линеаризации, развитые для нерелятивистского случая в [12,13].

Если квазипотенциал не зависит от энергии и задан в виде прямоугольной ямы /V_0 - глубина потенциала, a - его ширина/, релятивистская задача двух тел решается точно [7].

Уравнение типа /29'/ для тангенса фазы рассеяния /в случае $m_1\equiv m_2\equiv m=1$ ГэВ и $\ell=0$/

$$\frac{d}{dr}\, tg\,\delta_0 (W,r) = -\frac{V_0}{sh\chi}\left[\sin r\chi + tg\,\delta_0 \cos r\chi\right]^2 ; \; W = 2E = 2\,ch\chi . \qquad /33/$$

решалось для различных параметров потенциала и энергий методом линеаризации и численным интегрированием на ЭВМ по методу Рунге-Кутта, и сравнивалось с точным решением. Результаты приведены на рис. 1 и 2, из которых видно, что уравнение /29'/ является достаточно хорошим приближением к точному уравнению /29/.

4. В случае нелокального потенциала $(V(r,r',W) = V(r',r,W))$ вышеприведенным способом можно получить следующую систему уравнений:

$$\frac{d}{dr} f_\ell (W,r) = -\frac{2\mu}{\sqrt{m_1 m_2}\, sh\chi_{(12)}}\, \nu_\ell (r) [\Phi_\ell^{(1)}(r,q_{(12)}) +$$

$$+ f_\ell (W,r)\, \Phi_\ell^{(2)}(r,q_{(12)})] \int V(r,r',W)\, [\Phi_\ell^{(1)}(r',r,q_{(12)}) +$$

$$+ f_\ell (W,r')\, \Phi_\ell^{(2)}(r',r,q_{(12)})]\, dr',$$

$$\Phi_\ell^{(1)}(r',r,q_{(12)}) = s_\ell (r',\chi_{(12)}) + \int_0^r D_\ell^{(+)}(r',r'',W)\, dr'' \times$$

$$\times \int V(r'',r''',W)\, \Phi_\ell^{(1)}(r'',r''',q_{(12)})\, dr''', \qquad /34/$$

$$\Phi_\ell^{(2)}(r',r,q_{(12)}) = e_\ell^{(1)}(r',\chi_{(12)}) + \int_0^r D_\ell^{(+)}(r,r'',W)\, dr'' \times$$

$$\times \int V(r'',r''',W)\, \Phi_\ell^{(2)}(r'',r''',q_{(12)})\, dr'''.$$

5. Если рассеяние происходит на двух потенциалах $(V = V_1 + V_2)$ и решение уравнения /9/ с одним из потенциалов, например, V_1 известно, то систему уравнений /29-31/ можно обобщить на этот случай.

Пусть $\phi_\ell^{(1)}(r,q_{(12)})$ и $\phi_\ell^{(2)}(r,q_{(12)})$ - два линейно независи-

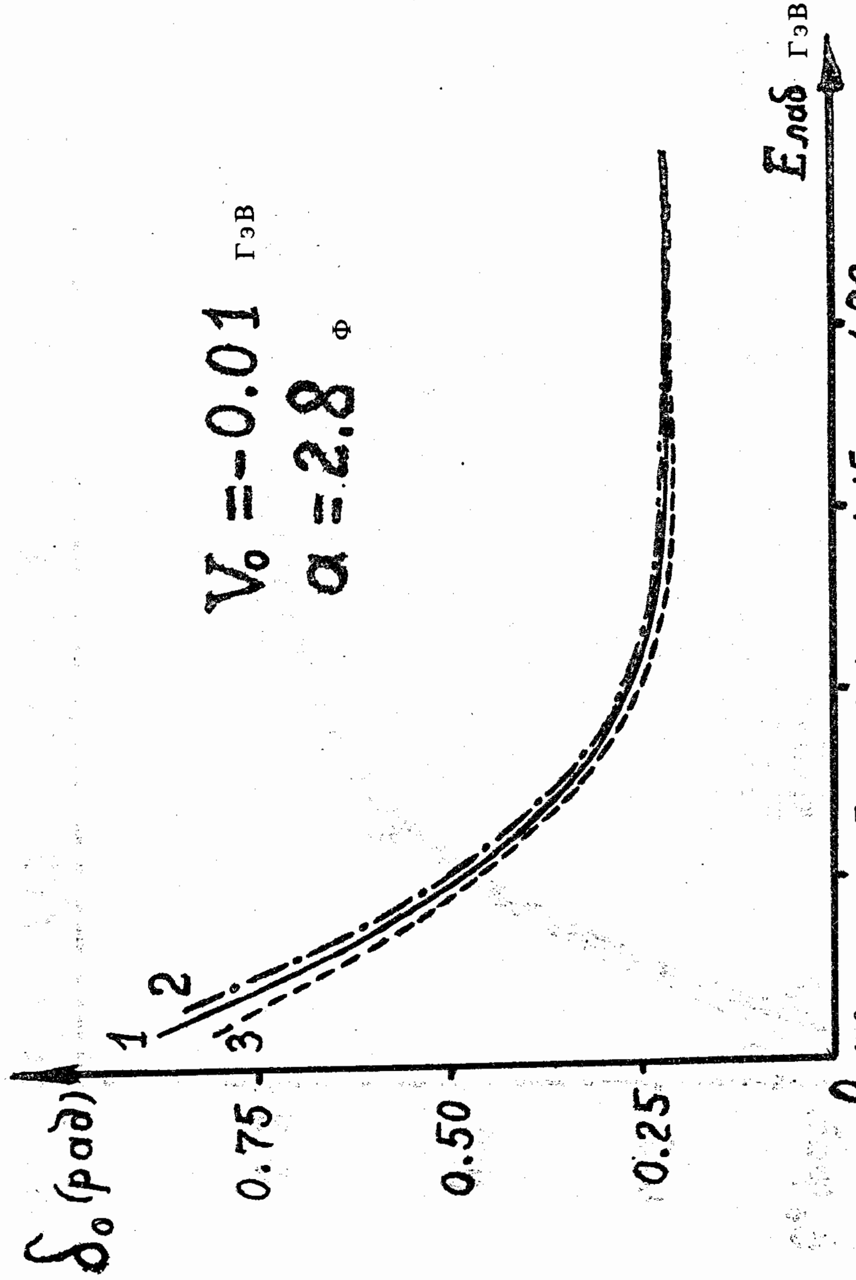

Рис. 1

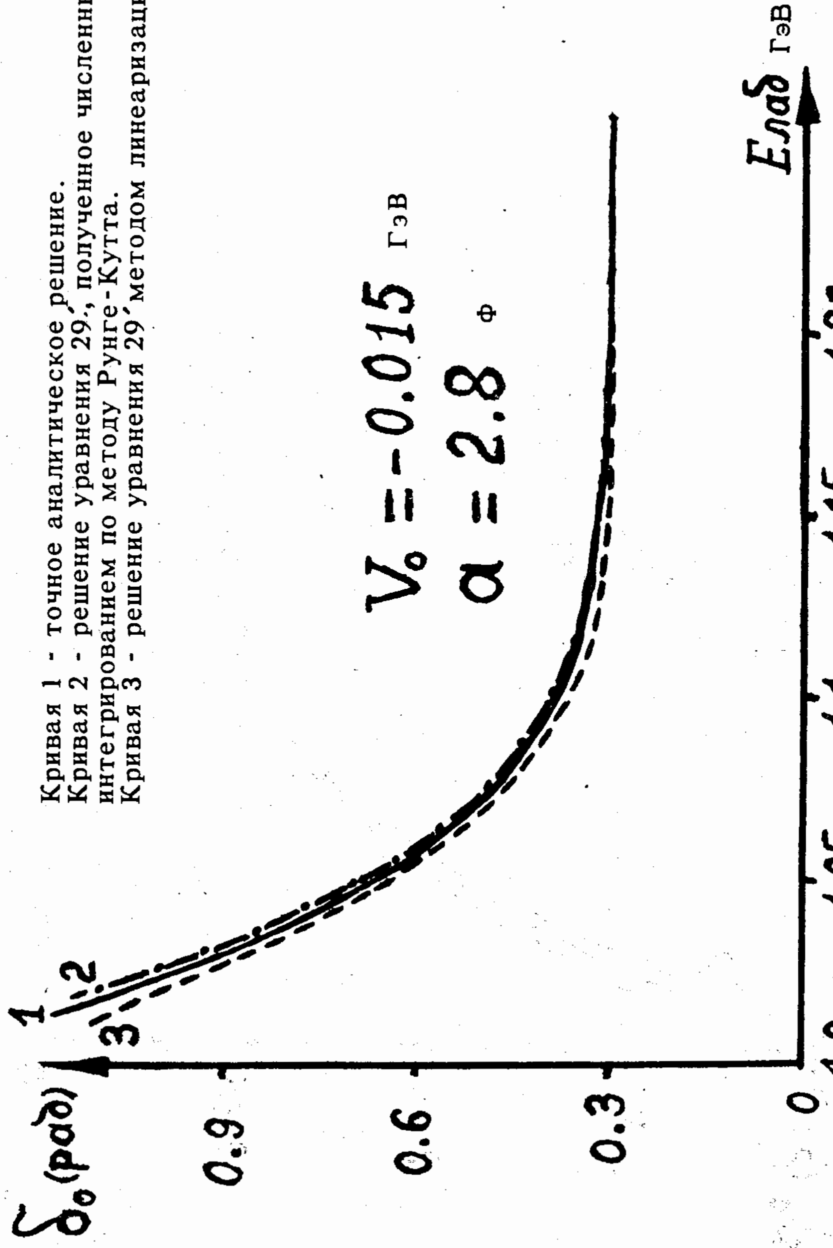

Рис. 2

Кривая 1 - точное аналитическое решение.
Кривая 2 - решение уравнения 29', полученное численным интегрированием по методу Рунге-Кутта.
Кривая 3 - решение уравнения 29' методом линеаризации.

мых решения уравнения /9/ с потенциалом V_1 и асимптотикой

$$\phi^{(1)}_{\ell}(r,q_{(12)}) \simeq \sin\left(r\sqrt{m_1 m_2}\,\chi_{(12)} - \frac{\pi\ell}{2} + \delta_{1\ell}(\chi_{(12)})\right),$$

$$\phi^{(2)}_{\ell}(r,q_{(12)}) \simeq e^{i\left(r\sqrt{m_1 m_2}\,\chi_{(12)} - \frac{\pi\ell}{2} + \delta_{1\ell}(\chi_{(12)})\right)}$$

где $\delta_{1\ell}(\chi_{(12)})$ - фаза рассеяния на потенциале V_1. Тогда вместо /29-31/ будем иметь систему уравнений вида:

$$\frac{d}{dr} f_{\ell}(W,r) = -\frac{2\mu}{\sqrt{m_1 m_2}\, sh\,\chi_{(12)}} V_2(r,W)\,\nu_{\ell}(r)\left[\Phi^{(1)}_{1\ell}(r,q_{(12)}) + f_{\ell}(W,r)\,\Phi^{(2)}_{1\ell}(r,q_{(12)})\right]^2, \qquad /35/$$

$$\Phi^{(1,2)}_{1\ell}(r,q_{(12)}) = \phi^{(1,2)}_{\ell}(r,q_{(12)}) + \int_0^r D^{(+)}_{1\ell}(r,r',W)\,V_2(r',W)\times \Phi^{(1,2)}_{1\ell}(r',q_{(12)})\,dr'.$$

Отличие $D^{(+)}_{1\ell}(r,r',W)$ от $D^{(+)}_{\ell}(r,r',W)$ /см. /27// состоит только в том, что функции $s_{\ell}(r,\chi_{(12)})$ и $e^{(1)}_{\ell}(r,\chi_{(12)})$ заменяются на $\phi^{(1,2)}_{\ell}(r,q_{(12)})$.

6. Представляет интерес получить фазовые уравнения для полной амплитуды рассеяния.

Если квазипотенциал симметричен, то можно написать аналогично /6а/ уравнение, которое потребуется нам для вывода системы уравнений на полную амплитуду:

$$\tilde{\Psi}_{\vec{q}_{(12)}}(\vec{r}) = \xi^*(\vec{q}_{(12)},\vec{r}) + \int G^{(+)}(\vec{r},\vec{r}\,',W)\,V(\vec{r}\,',\vec{r}\,'',W)\,\tilde{\Psi}_{\vec{q}_{(12)}}(\vec{r}\,'')\,d\vec{r}\,'\,d\vec{r}\,''. \qquad /36/$$

Пусть квазипотенциал зависит от параметра λ.

Тогда, вводя единичные векторы $\vec{n}_q = \frac{\vec{q}_{(12)}}{q_{(12)}}$, $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$, $\vec{n}' = \frac{\vec{r}'}{r}$,

выбирая потенциал в виде:

$$V(r, r', W, \lambda, \vec{n}, \vec{n}') = V(r, r', W, \vec{n}, \vec{n}')\theta(\lambda - r)$$

и действуя тем же способом, что и в пункте 3, получим:

$$\frac{\partial}{\partial r} f(r, W, \vec{n}, \vec{n}_q) = -\frac{\mu r^2}{2\pi} \{ \int [\tilde{\Phi}^{(1)}(r, q_{(12)}, \vec{n}_1, \vec{n}_q) + \int \tilde{\Phi}^{(2)}(r, q_{(12)}, \vec{n}_1, \vec{n}_2) f(r, W, \vec{n}_2, \vec{n}_q) d\vec{n}_2] d\vec{n}_1 \times \int V(r, r', W, \vec{n}, \vec{n}')[\Phi^{(1)}(r, r', q_{(12)}, \vec{n}', \vec{n}) + \int \Phi^{(2)}(r, r', q_{(12)}, \vec{n}_3, \vec{n}') f(r, W, \vec{n}_3, \vec{n}) d\vec{n}_3] d\vec{r}' \}, \qquad /37/$$

где

$$\tilde{\Phi}^{(1)}(r, q_{(12)}, \vec{n}_1, \vec{n}_q) = \frac{4\pi}{r q_{(12)}} \sum_{\ell m} \tilde{\Phi}^{(1)}_{\ell m}(r, q_{(12)}) Y^*_{\ell m}(\vec{n}_1) Y_{\ell m}(\vec{n}_q)$$

$$\tilde{\Phi}^{(2)}(r, q_{(12)}, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{4\pi}{r} \sum_{\ell m} \tilde{\Phi}^{(2)}_{\ell m}(r, q_{(2)}) Y^*_{\ell m}(\vec{n}_1) Y_{\ell m}(\vec{n}_2)$$

$$\Phi^{(1)}(r, r', q_{(12)}, \vec{n}', \vec{n}) = \frac{4\pi}{r q_{(12)}} \sum_{\ell m} \Phi^{(1)}_{\ell m}(r, r', q_{(12)}) Y^*_{\ell m}(\vec{n}') Y_{\ell m}(\vec{n}),$$

$$\Phi^{(2)}(r, r', q_{(12)}, \vec{n}_3, \vec{n}') = \frac{4\pi}{r} \sum_{\ell m} \Phi^{(2)}_{\ell m}(r, r', q_{(12)}) Y^*_{\ell m}(\vec{n}_3) Y_{\ell m}(\vec{n}')$$

и $\tilde{\Phi}^{(1)}_{\ell m}$, $\tilde{\Phi}^{(2)}_{\ell m}$, $\Phi^{(1)}_{\ell m}$, $\Phi^{(2)}_{\ell m}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\tilde{\Phi}^{(1)}_{\ell m}(r, q_{(12)}) = s^*_\ell(r, \chi_{(12)}) + \int_0^r D^{(+)}_\ell(r, r', W) dr' \int V(r', r'', W) \times \tilde{\Phi}^{(1)}_{\ell m}(r'', q_{(12)}) dr'',$$

$$\tilde{\Phi}^{(2)}_{\ell m}(r, q_{(12)}) = e^{(1)}_\ell(r, \chi_{(12)}) + \int_0^r D^{(+)}_\ell(r, r', W) dr' \int V(r', r'', W) \times \tilde{\Phi}^{(2)}_{\ell m}(r'', q_{(12)}) dr'',$$

$$\Phi^{(1)}_{\ell m}(r, r', q_{(12)}) = S_\ell(r', \chi_{(12)}) + \int_0^r D^{(+)}_\ell(r', r'', W) dr'' \int V(r'', r''', W) \times \Phi^{(1)}_{\ell m}(r'', r''', q_{(12)}) dr''', \qquad /38/$$

$$\Phi^{(2)}_{\ell m}(r, r', q_{(12)}) = e^{(1)}_\ell(r', \chi_{(12)}) + \int_0^r D^{(+)}_\ell(r', r'', W) dr'' \int V(r'', r''', W) \times \Phi^{(2)}_{\ell m}(r'', r''', q_{(12)}) dr'''.$$

Уравнение /37/ может служить отправной точкой при получении приближенных выражений для полной амплитуды рассеяния.

7. И, наконец, в этом пункте рассмотрим уравнения для парциальной амплитуды рассеяния вне энергетической поверхности.

$$f_\ell(p_{(12)}, q_{(12)}) = -\frac{2\mu}{\sqrt{m_1 m_2}\, sh\chi_{(12)}} \int s^*_\ell(r, \chi_{(12)}) V(r, W) \Psi^{(+)}_\ell(r, q_{(12)}, p_{(12)}) dr, \qquad /39/$$

где $\Psi^{(+)}_\ell(r, q_{(12)}, p_{(12)})$ удовлетворяет интегральному уравнению вне энергетической поверхности:

$$\Psi^{(+)}_\ell(r, q_{(12)}, p_{(12)}) = s_\ell(r, \chi) + \int G^{(+)}_\ell(r, r', W) V(r', W) \Psi^{(+)}_\ell(r, q_{(12)}, p_{(12)}) dr. \qquad /40/$$

Здесь $p_{(12)} = \sqrt{m_1 m_2}\, sh\chi$ и $q_{(12)} = \sqrt{m_1 m_2}\, sh\chi_{(12)}$. Тогда, следуя п. 3, получим следующее уравнение для амплитуды вне энергетической поверхности:

$$\frac{d}{dr} f_\ell(p_{(12)}, q_{(12)}, r) = -\frac{2\mu}{\sqrt{m_1 m_2}\, sh\chi_{(12)}} V(r,W)\nu_\ell(r) \times$$

$$\times [\Phi^{(1)}_\ell(r,q_{(12)}) + f_\ell(W,r)\Phi^{(2)}_\ell(r,q_{(12)})]^2 \times \qquad /41/$$

$$\times [\Phi^{(1)}_\ell(r\, m, q_{(12)}, p_{(12)}) + f_\ell(p_{(12)}, q_{(12)}, r)\Phi^{(2)}_\ell(r,q_{(12)})],$$

где

$$\Phi^{(1)}_\ell(r, q_{(12)}, p_{(12)}) = s_\ell(r,\chi) + \int_0^r D^{(+)}(r,r',W)\, V(r',W) \times$$

$$\times \Phi^{(1)}_\ell(r,q_{(12)}, p_{(12)})\, dr'$$

$$\Phi^{(2)}_\ell(r,q_{(12)}) = e^{(1)}_\ell(r,\chi_{(12)}) + \int_0^r D^{(+)}_\ell(r,r',W)\,V(r',W)\times \qquad /42/$$

$$\times \Phi^{(2)}_\ell(r,q_{(12)})\, dr'.$$

Уравнение /41/ относительно $f_\ell(p_{(12)}, q_{(12)}, r)$ решается в явном виде

$$f_\ell(p_{(12)}, q_{(12)}, r) = \int_0^r Q(q_{(12)}, q')\,\Phi^{(1)}(r', q_{(12)}, p_{(12)})\times$$

$$\times \left[\exp\int_{r'}^{r} Q(q_{(12)}, r'')\,\Phi^{(2)}_\ell(r'', q_{(12)})\right] dr', \qquad /43/$$

где

$$Q(q_{(12)}, r) = -\frac{2\mu}{\sqrt{m_1 m_2}\, sh\chi_{(12)}} V(r,W)\nu_\ell(r)\times[\Phi^{(1)}_\ell(r,q_{(12)}) + \qquad /44/$$

$$+ f_\ell(W,r)\Phi^{(2)}_\ell(r,q_{(12)})].$$

Уравнение /43/ задает способ выхода за поверхность энергии-импульса, причем надо знать $\Phi^{(1)}_\ell(r, q_{(12)}, p_{(12)})$ вне

энергетической поверхности, а $\Phi^{(2)}_\ell(r, q_{(12)})$ и $f_\ell(W,r)$ - на энергетической поверхности.

Авторы выражают искреннюю благодарность В.М.Виноградову, Р.М.Мир-Касимову и Н.Б.Скачкову за обсуждения и критические замечания.

Литература

1. *A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 380 (1963).*
2. *R.N.Faustov. Nucl. Phys., 75, 699 (1966).*
3. *В.Р.Гарсеванишвили, В.А.Матвеев, Л.А.Слепченко. ЭЧАЯ, т. I, вып. 1, Атомиздат, Москва, 1971.*
4. *V.G.Kadyshevsky. Preprint No. 7, ITF, Kiev (1967). V.G.Kadyshevsky. Nucl.Phys., B6, 125 (1968).*
5. *V.G.Kadyshevsky, R.M.Mir-Kasimov and N.B.Skachkov. Nuovo Cimento., 55A, 233 (1968).*
6. *V.G.Kadyshevsky and M.D.Mateev. Nuovo Cim., 55A, 275 (1968).*
7. *М.Д.Матеев, Р.М.Мир-Касимов, М.Фриман. Препринт ОИЯИ, Р2-4107, Дубна*
8. *В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов, Н.Б.Скачков. ЭЧАЯ, т. 2, вып. 3, Атомиздат, Москва, 1971.*
9. *В.Г.Кадышевский, М.Д.Матеев, Р.М.Мир-Касимов. ЯФ, 11, 692, 1970.*
10. *В.М.Виноградов. ТМФ, 7, 289, 1971.*
11. *В.В.Бабиков, Г.В.Груша, Р.М.Мир-Касимов, Н.Б.Шульгина. Препринт ОИЯИ Р2-6828; Р2-6829, Дубна, 1972.*
12. *В.В.Бабиков. "Метод фазовых функций в квантовой механике". "Наука", Москва, 1968.*
13. *Ф.Калоджеро. "Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния". "Мир", Москва, 1972.*
14. *И.С.Шапиро. ДАН СССР, 106, 647, 1956.*
15. *М.Д.Матеев, Р.М.Мир-Касимов, Н.Б.Скачков. Препринт ОИЯИ, Р2-5605, Дубна, 1971.*
16. *И.В.Амирханов, В.С.Гурьянов. Препринт ОИЯИ Р4-3741, Дубна, 1968. И.В.Амирханов, М.А.Касымжанов. Препринт ОИЯИ Р4-4336, Дубна, 1968.*
17. *И.В.Амирханов, З.К.Смадарчина, Е.Х.Христова. ТМФ, т. 3, 392, 1970.*
18. *И.В.Амирханов, В.Е.Гречко, Р.К.Дементьев. Вестник МГУ, №5, 1973. Acta Physica Polonica, vol. B4 (1973), No. 3, 109.*

Рукопись поступила в издательский отдел 18 мая 1973 года.