СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 7097

В.А. Загребнов, И.Г. Бранков

О ВОСПРИИМЧИВОСТИ МОДЕЛИ ИЗИНГА В ВЕЙССОВСКОМ ПРЕДЕЛЕ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 7097

В.А. Загребнов, И.Г. Бранков

О ВОСПРИИМЧИВОСТИ МОДЕЛИ ИЗИНГА В ВЕЙССОВСКОМ ПРЕДЕЛЕ

SUMMARY

In the present paper we study the magnetic susceptibility for a N-body Ising system described by the Hamiltonian:

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2N}\sum_{i,j}\sigma_i^z\sigma_j^z - \mu h\sum_i \sigma_i^z . \qquad (1)$$

A rigorous proof has been given in ref.[2] for the thermodynamical equivalency (in the limit $N\to\infty$) of $\mathcal{H}$ and $\mathcal{H}_0$:

$$\mathcal{H}_0(\bar{C}) = -\sum_i(\bar{C}J+\mu h)\sigma_i^z + \frac{1}{2}NJ\bar{C}^2, \qquad (2)$$

where $\bar{C}=\bar{C}(\theta,h)$ satisfies the condition:

$$f_0(\theta,h,\bar{C}) = \min_{\{C\}} f_0(\theta,h,C)$$

Here $f_0(\theta,h,C)$ is the free energy per spin corresponding to $\mathcal{H}_0(C)$ and θ denotes the temperature.

In the case of finite N, upper bounds have been found on the difference of the free energies per spin for the systems (1) and (2) (ref.[2]) :

$$0\le f_0(\theta,h,\bar{C}) - f_N(\theta,h) \le 2\sqrt{\theta J}\cdot N^{-1/2} \qquad (3)$$

and on the closeness of the respective magnetic susceptibilities $\chi_0(\theta,h)$ and $\chi_N(\theta,h)$ outside the critical point $\theta=J$, $h=0$ (ref.[3]):

$$|\chi_0(\theta,h)-\chi_N(\theta,h)| \le 8\sqrt[4]{18}\,\frac{\mu}{\delta}\left(\frac{\theta}{\mu\delta}\right)\left(\frac{\theta}{J}\right)^{3/8} N^{-1/8} \qquad (4)$$

The bound (4) is valid for all $|h|\ge\delta>0$. From (4) it follows that $\lim_{N\to\infty}\chi_N(\theta,h\ne0)=\chi_0(\theta,h\ne0)$. Since the system (2) exhibits a second order phase transition and $\chi_0(J,h\to0)\to\infty$ using the fact that $\chi_N(\theta,0)\ge\chi_N(\theta,h)$ we can conclude that $\chi_N(J,0)\to\infty$ as $N\to\infty$.

In the present paper, on the basis of (3) and the previously developed technique, the following bound on the growth of $\chi_N(J,0)$ as $N\to\infty$ is obtained:

$$\chi_N(J,0)\le 16\cdot\frac{\mu^2}{J}\cdot N^{+3/4}$$

which leads to a bound on the pair correlation function $\langle\sigma_i^z\sigma_j^z\rangle|_{i\ne j}$:

$$\langle\sigma_1^z\sigma_2^z\rangle \le 16\,N^{-1/4} .$$

Ферромагнитная модель Изинга со спином I/2 в вейссовском пределе описывается гамильтонианом $\mathcal{H}$ с обменным взаимодействием V_{ij} бесконечного радиуса и бесконечно малой интенсивности *) $V_{ij} = J/N$, $J>0$:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\frac{J}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\sigma_i^z\sigma_j^z - \mu h\sum_{f=1}^{N}\sigma_f^z , \qquad (I)$$

где σ_i^z – матрицы Паули, N – число узлов в решетке со спинами σ_j^z , h – внешнее магнитное поле и μ – магнитный момент спина. В работах[I,2] показано, что плотность свободной энергии модельной системы (I): $f_N = -\frac{\theta}{N}\ln Sp\exp[-\beta\mathcal{H}]$ с асимптотической точностью равномерно по полю h и температуре θ на множестве $\mathcal{D}=\{h,\theta: 0\le\theta\le\theta_0, -\infty<h<+\infty\}$ совпадает с решением Кюри-Вейсса $f_0(\theta,h)$, которому сопоставляется гамильтониан:

$$\mathcal{H}_0(\bar{c}) = -\sum_j(\bar{c}J+\mu h)\sigma_j^z + \frac{1}{2}NJ\bar{c}^2, \qquad (2)$$

где параметр $\bar{c}$ является ветвью решений уравнения:

$$c = th\left[\frac{Jc+\mu h}{\theta}\right], \qquad (3)$$

обеспечивающей $\min_c f_0(\theta,h,c) = f_0(\theta,h,\bar{c})$[2], т.е.

$$0 \le \Delta_N(\theta,h) \equiv f_0(\theta,h,\bar{c}) - f_N(\theta,h) \le 2\sqrt{\theta J}\,N^{-1/2} \qquad (4)$$

---

*) В пределе $N\to\infty$.

В работах [2,3] рассмотрен также вопрос о близости других термодинамических характеристик системы (I): намагниченности, энтропии, восприимчивости и т.д., т.е. производных $f_N(\theta,h)$ по h и θ, к соответствующим величинам в решении Кюри-Вейсса (2,3). В частности, из близости восприимчивостей модельной (I) и аппроксимирующей систем (2,3) $\chi_N(\theta,h)$, $\chi_0(\theta,h)$ при $|h|>0$ [3] и $\chi_0(\theta=\theta_c, |h|\to 0)\to\infty$ *) следует, что $\chi_N(\theta=J, h=0)$ неограниченно возрастает при $N\to\infty$.

Настоящая работа посвящена изучению восприимчивости модельной системы (I) $\chi_N(\theta,h) = -\frac{\partial^2}{\partial h^2} f_N(\theta,h)$ и получению для неё оценки сверху при произвольном фиксированном N в критической точке решения Кюри-Вейсса: $\theta = J$ и $h=0$.

Заметим, что при любом конечном N функция $\chi_N(\theta,h)$ вещественно аналитична, т.е. все ее производные по θ и h являются гладкими ограниченными функциями в любом замкнутом множестве $\mathfrak{M} = \{ h,\theta : \ 0\le \theta \le \theta_0 , \ |h| \le h_0 \}$. Термодинамические функции системы (2) везде, где они непрерывны, являются равномерными, либо поточечными пределами соответствующих функций конечной системы (I) в термодинамическом пределе $N\to\infty$ [2]. Например, $\chi_0(\theta,h)$ имеет особенность в точке $\theta=J$, $h=0$, а вне ее конечна и непрерывна, т.е. является пределом $\chi_N(\theta,h)$ в области вне этой точки.

---

*) Решение Кюри-Вейсса (2,3), как хорошо известно, описывает магнитный фазовый переход второго рода с особенностью у восприимчивости $\chi_0(\theta,h)=\mu\frac{\partial}{\partial h}\bar{C}$ и скачком теплоемкости в критической точке $\theta_c=J$, $h=0$ [I,2].

С помощью (I) $\chi_N = -\frac{\partial^2}{\partial h^2} f_N(\theta,h)$ можно представить в виде:

$$\chi_N(\theta,h) = \frac{\mu^2 N}{\theta}\left\langle \left(J^z - \langle J^z\rangle\right)^2\right\rangle \geq 0 , \quad J^z = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \sigma_i^z , \tag{5}$$

где $\langle\ldots\rangle$, как обычно, термодинамическое среднее с гамильтонианом $\mathcal{H}$ (I). Поскольку положительно определенная квадратичная форма $\langle (J^z - X)^2\rangle$ достигает своего минимума при $\tilde{X} = \langle J^z\rangle$, для $\chi_N(\theta,h)$ получаем оценку сверху:

$$\chi_N(\theta,h) \le \frac{\mu^2 N}{\theta}\left\langle (J^z - X)^2\right\rangle . \tag{6}$$

Выберем $X = \bar{C}$ (см. (3)), тогда правую часть неравенства (6) можно переписать в виде:

$$\frac{\mu^2 N}{\theta}\left\langle (J^z - \bar{C})^2\right\rangle = \frac{\mu^2 N}{\theta}\left(2\frac{\partial}{\partial J}\Delta_N - \frac{2\bar{C}}{\mu}\frac{\partial}{\partial h}\Delta_N\right) . \tag{7}$$

Рассмотрим теперь, как можно оценить выражение, стоящее в правой части (7). Для Δ_N, как функции θ, h, J, имеется равномерная оценка (4) на множестве $\mathfrak{N} = \{\theta, h, J : \ 0\le\theta\le\theta_0, -\infty < h < +\infty, J_1 \le J \le J_2\}$ при произвольных θ_0, J_1, J_2. Кроме этого, поскольку $\frac{\partial^2}{\partial J^2} f_N = -\frac{N}{4\theta}\langle (J^z - \langle J^z\rangle)^2\rangle \le 0$, то:

$$\frac{\partial^2 \Delta_N}{\partial J^2} = \frac{\partial^2 f_0}{\partial J^2} - \frac{\partial^2 f_N}{\partial J^2} \geq \frac{\partial^2 f_0}{\partial J^2} = -\frac{\bar{C}^2}{\mu^2}\chi_0 = -\frac{\bar{C}^2(1-\bar{C}^2)}{\theta - J(1-\bar{C}^2)} . \tag{8}$$

С помощью простых преобразований для $\chi_0(\theta,h)$ получаем оценку [2]:

$$\frac{\partial^2 \Delta_N}{\partial J^2} \geq -\frac{\bar{C}^2}{\mu^2}\chi_0 \tag{9}$$

$$0 \le \chi_0(h,\theta) \le 3\mu^2\theta^2\left\{2J\left[J\bar{C} + \mu h\right]^2\right\}^{-1} . \tag{IO}$$

Из (9,10) следует ограничение снизу для производной $\frac{\partial^2\Delta_N}{\partial J^2}$:

$$\frac{\partial^2\Delta_N}{\partial J^2} \geqslant -\frac{3\theta^2\bar C^2}{2J(J\bar C+\mu h)^2} \geqslant -\frac{3\theta^2}{2J_1^2}\ ;\ J_1>0 . \qquad (11)$$

Неравенства (4,11) и непрерывность $\frac{\partial}{\partial J}\Delta_N = -\frac{1}{2}\left(\langle \mathcal{J}^2\rangle^2 - \bar C^2\right)$ по θ, h, J в $\mathfrak{N}$ позволяют воспользоваться леммой, сформулированной в /2/, которая для $\frac{\partial}{\partial J}\Delta_N$ дает равномерную оценку, справедливую на $\mathfrak{N}$ при $J_1>0$:

$$\left|\frac{\partial\Delta_N}{\partial J}\right| \leqslant 2\sqrt{3}\,\theta^{5/4} \cdot J_1^{-3/2} \cdot J_2^{1/4} \cdot \mathcal{N}^{-1/4} \qquad (12)$$

при $\mathcal{N} > \max\left\{\left(J_1/_{J-J_1}\right)^4, \left(J_1/_{J_2-J_1}\right)^4\right\} \cdot \left(\frac{16}{3}\right)^3 \frac{J_1^2 J_2}{\theta^3}$.

Выбирая $J_1 = \frac{3}{4}J$ и $J_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 J$, (12) можно переписать в виде:

$$\left|\frac{\partial\Delta_N}{\partial J}\right| \leqslant 8\left(\frac{\theta}{J}\right)^{5/4}\mathcal{N}^{-1/4}, \text{ при } \mathcal{N} > 2304\left(\frac{J}{\theta}\right)^3 \qquad (13)$$

Обратимся теперь к оценке второго члена в правой части (7). Производная $\frac{\partial}{\partial h}\Delta_N = \mu(\bar C - \langle \mathcal{J}^2\rangle)$ есть разность намагниченностей, для которой имеет место оценка, равномерная для всех θ, h :

$$\left|\frac{\partial}{\partial h}\Delta_N\right| \leqslant 2\mu . \qquad (14)$$

Как установлено в /4/, $\frac{\partial}{\partial h}\chi_N(\theta,h) \gtrless 0$ при $h \lessgtr 0$, т.е. $\chi_N(\theta,h)$ возрастает при $h<0$ и убывает при $h>0$, достигая максимума при $h=0$ для любого фиксированного θ, таким образом получаем:

$$\chi_N(\theta,h) \leqslant \chi_N(\theta, h=0) \leqslant \qquad (15)$$

$$\leqslant \frac{\mu^2\mathcal{N}}{\theta}\left(2\frac{\partial}{\partial J}\Delta_N - \frac{2\bar C}{\mu}\frac{\partial}{\partial h}\Delta_N\right)\Big|_{h=0} .$$

Учитывая, что $\bar C(\theta, h=0)$ непрерывна по температуре, причем $\bar C(\theta,h=0)\big|_{\theta\to\theta_c} = 0$ (3), из неравенств (13) - (15) получаем оценку сверху на рост восприимчивости $\chi_{\mathcal{N}\to\infty}(\theta,h)$ модельной системы (1) в критической точке $\theta_c = J$, $h=0$:

$$\chi_N(J, h=0) \leqslant 16\mu^2\theta_c^{1/4}J^{-5/4}\mathcal{N}^{3/4} . \qquad (16)$$

Наконец, для изучения поведения $\chi_N(\theta,h)$ вне критической точки $\theta_c = J$, $h=0$ воспользуемся оценками, полученными в /3/, тогда:

$$|\chi_N(\theta,h) - \chi_0(\theta,h)| < 8(18)^{1/4}\frac{\mu^{3/4}\theta^{5/8}}{\delta^{5/4}J^{3/8}}\mathcal{N}^{-1/8} \qquad (17)$$

при $\mathcal{N} > 256\frac{\theta J}{(\mu\delta)^2}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$, $|h| \geqslant \delta > 0$, и:

$$|\chi_N(\theta,h) - \chi_0(\theta,h)| < 4\sqrt[4]{2}\,\frac{\mu^2 J^{1/8}}{\theta^{9/8}}\left(1-\frac{J}{\theta}\right)^{-7/4}\mathcal{N}^{-1/8} \qquad (18)$$

при $\mathcal{N} > 512\frac{J\theta^7}{(\mu\delta)^8}\left(1-\frac{J}{\theta}\right)^{10}$, $|h| \geqslant \delta > 0$, $\theta > J$.

Из (17), (18) , в частности, следует поточечная сходимость $\chi_N(\theta,h)$ к $\chi_0(\theta,h)$ на множестве $\mathfrak{S} = \{\theta, h : 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0,\ |h|>0\}$ при произвольном конечном θ_0 . Так как $\chi_0(\theta,h)$ конечна всюду вне критической точки $\theta_c = J$, $h=0$ (см. (3)), из (16)-(18) приходим к следующим выводам относительно поведения $\chi_N(\theta,h)$ при $\mathcal{N}\to\infty$:

а) в точке $\theta = J$, $h=0$ восприимчивость модельной системы (1) растет не быстрее $\mathcal{N}^{3/4}$,

б) оставаясь всюду вне этой точки на $\mathfrak{S}$, ограниченной при фиксированных θ, h , последовательность χ_N сходится к конечной $\chi_0(\theta,h)$. На множестве $\mathfrak{G} = \{\theta, h : 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0, |h| \geqslant \delta > 0\} \subset \mathfrak{S}$ эта сходимость становится равномерной.

Таким образом, с помощью (5) и (I6), учитывая, что $\langle J_z \rangle \Big|_{\theta, h=0} = 0$ получаем:

$$\frac{\mu^2}{\theta} + \frac{\mu^2}{\theta}\frac{1}{N}\sum_{i\neq j}\langle \sigma_i^z \sigma_j^z \rangle \Big|_{\theta=\theta_c,\, h=0} \leqslant 16\,\frac{\mu^2}{J}\,N^{3/4} . \qquad (I9)$$

Из (I9) следует, что двухточечная корреляционная функция $\langle \sigma_i^z \sigma_j^z \rangle$ модельной системы (I) для $h=0$, $\theta=\theta_c$ при $N \to \infty$ убывает не медленее, чем $N^{-1/4}$:

$$\langle \sigma_1^z \sigma_2^z \rangle \leqslant 16\, N^{-1/4}$$

Литература:

I. И.Г.Бранков, А.С.Шумовский. ОИЯИ Р4-6899, Дубна, 1973.

2. И.Г.Бранков. ОИЯИ Р4-6998, Дубна, 1973.

3. И.Г.Бранков. ОИЯИ Р4-7000, Дубна, 1973.

4. R.Griffiths, C.Hurst, S.Shermann. Journ.Math.Phys., 1, 790, (1970).

Рукопись поступила в издательский отдел
23 апреля 1973 года.