ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р4 - 7001

В.А.Загребнов

МЕТОД ИНФРАКРАСНОЙ АСИМПТОТИКИ В МОДЕЛИ ИЗИНГА I.

Функциональное представление

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 7001

В.А.Загребнов

МЕТОД ИНФРАКРАСНОЙ АСИМПТОТИКИ В МОДЕЛИ ИЗИНГА I.

Функциональное представление

Направлено в Acta Physica Polonica

Загребнов В.А.

Р4 - 7001

Метод инфракрасной асимптотики в модели Изинга. 1
(функциональное представление)

Рассматривается поведение двухточечной корреляционной функции спинов в модели Изинга, когда расстояние между ними гораздо больше радиуса взаимодействия. Для исследования асимптотик в парамагнитной критической области использовано функциональное представление, близкое к методу вычисления инфракрасного ветвления в теории поля.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1973

Zagrebnov V.A.

P4 -7001

Infrared Asymptotic Form Method in the Ising Model. 1 (Functional Representation)

The behaviour of the two-point correlation function of spins in the Ising model is considered when the distance between the spins is much greater than the interaction radius. The functional representation, close to the method of calculation of infrared branching in field theory, was used to study the asymptotic forms in paramagnetic critical region.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1973

§1. Введение

Классическая теория Орнштейна-Цернике (RPA) [1] и ее обобщение [2] дают в модели Изинга для Фурье-преобразования двухточечной корреляционной функции $\langle\sigma_r\,\sigma_{r'}\rangle \equiv R(r-r',\beta)$

$$\tilde R(q,\beta)=\sum_r e^{-iq(r-r')}R(r-r',\beta)$$

при нулевом внешнем поле и температуре $\theta=\beta^{-1}$ выше критической $\theta\geq\theta_c$ выражение:

$$\tilde R^{(0)}(q,\beta)=\frac{M(\theta)}{1-\beta\tilde v(q)\,M(\theta)}\ . \qquad /1/$$

Фурье-преобразование взаимодействия $V(r-r')$ при малых q^2 имеет вид [1,2]:

$$\tilde v(q)=\tilde v(0)-s^2q^2+\omega^4q^4-\dots, \qquad /2/$$

где $\tilde v(0)=\sum_r V(r)$; $s^2=1/2\sum_r r^2V(r)$, $\omega^4=\frac{1}{4!}\sum_r r^4V(r)$

и т.д. Ниже будет рассматриваться взаимодействие ферромагнитного типа $\tilde v(0)>0$ с конечным радиусом $s^2/\tilde v(0)<\infty$.

При достаточно малых q^2: $q^2\leq\epsilon^2<<s^2/\omega^4$ и при $\left(\frac{\theta-\theta_c}{\theta_c}\right)^{\nu}\equiv\kappa<<1$,

т.е. в окрестности критической точки θ_c, которая определяется уравнением $1-\beta\,\tilde v(0)\,M(\theta)=0$, вкладом высших членов разложения /2/ в $\tilde R^{(0)}(q,\beta)$ можно пренебречь [3]. Тогда из /1/

получаем не зависящее от размерности модели Изинга d классическое выражение для $\tilde R_d^{(0)}(q,\beta)$ в критической области $\kappa^2 \ll 1$ $\lambda^2 q^2 \ll 1$ /1-6/ :

$$\tilde R^{(0)}(q,\beta)\Big|_{\substack{\kappa\ll 1\\ \lambda q\ll 1}} = \frac{1}{\lambda^2 q^2+\kappa^2}; \qquad /3/$$

$$\lambda^2 = \frac{s^2}{\theta_c};\quad \kappa^2 = \theta_c^{-1}\{\theta[M(\theta)]^{-1} - \tilde v(0)\}\,|\,\theta \geq \theta_c ,$$

где $\lambda^2 \simeq \overline{r^2} = [\tilde v(0)]^{-1}\sum_r r^2 V(r)$ - среднеквадратичный радиус взаимодействия, так как $\tilde v(0) \simeq \theta_c$ /1,2/. Асимптотика /1/ в критической области определяет поведение $R_d^{(0)}(r,\kappa) \equiv \langle\sigma_r \sigma_{r'}\rangle$ при $r \gg \lambda$:

$$R_d^{(0)}(r,\kappa) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\Omega_d} dq\, \tilde R^{(0)}(q,\kappa)\, e^{iqr} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} s_{d-1}\sqrt{\pi}\, 2^{d/2-1}\,\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\frac{1}{r^{d/2-1}}\int_0^L dq\, q^{d/2} J_{d/2-1}(rq)\times \qquad /4/$$

$$\times \tilde R^{(0)}(q,\kappa),$$

где $s_d = 2\pi^{d/2}[\Gamma(\frac{d}{2})]^{-1}$ - вклад от интегрирования по углам, $\Gamma(x)$ и $J_\nu(x)$ - гамма-функции и функция Бесселя, интегрирование ведется по первой зоне Бриллюэна. Ω_d, обрезающий импульс $L \simeq a_0^{-1}$, где a_0 - параметр решетки. Ведущий член асимптотики /4/ при $r \gg \lambda$ имеет вид:

$$R_d^{(0)}(r,\beta)\Big|_{\substack{r\gg\lambda\\ \kappa\ll 1}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{(2\pi)^{d/2} r^d}\int_0^{r\epsilon} dz\, z^{d/2} J_{d/2-1}(z)\,\tilde R^{(0)}\left(\frac{z}{r},\beta\right). \qquad /5/$$

Используя /3/, $\epsilon \ll \lambda^{-1}$ и производя интегрирование, получаем из /5/ выражение:

$$R_d^{(0)}(r,\kappa)\Big|_{\substack{r\gg\lambda\\ \kappa\ll 1}} \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{(2\pi)^{d/2}}\frac{1}{r^d}\left(\frac{r}{\lambda}\right)^2\left(\frac{r\kappa}{\lambda}\right)^{d/2-1} K_{d/2-1}\left(\frac{r\kappa}{\lambda}\right), \qquad /6/$$

где $K_\nu(x)$ - функция Макдональда. Из /6/ следует, что $R_d^{(0)}(r,\kappa)$ имеет разную асимптотику внутри критической области $r \gg \lambda$, $\kappa \ll 1$ / соответственно, $\lambda q \ll 1$, $\kappa \ll 1$ / в зависимости от соотношений между r, λ и κ. В макроскопической критической области: $r \gg \lambda$, $\kappa \ll 1$ и $\frac{r\kappa}{\lambda} \gg 1$ /4/, корреляция спинов спадает экспоненциально:

$$R_d^{(0)}(r,\kappa)\Big|_{r\kappa/\lambda\gg 1,\,\kappa\ll 1} \simeq \frac{\pi}{(2\pi)^{d/2}}\frac{\kappa^{\frac{d-3}{2}}}{\sqrt{2}\,\lambda^{\frac{d+1}{2}}\, r^{1/2(d-1)}}\, e^{-\frac{\kappa r}{\lambda}}. \qquad /7/$$

В другой, более широкой области: $r \gg \lambda$, $\kappa \ll 1$, $\frac{r\kappa}{\lambda} \sim 1$ корреляция спинов убывает по степенному закону:

$$R_d^{(0)}(r,\kappa)\Big|_{\substack{\frac{r\kappa}{\lambda}\sim 1\\ \kappa\ll 1}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{(2\pi)^{d/2}}\frac{K_{d/2-1}(1)}{\lambda^2 r^{d-2}}\, e^{-\frac{\kappa r}{\lambda}}. \qquad /8/$$

Такое же поведение корреляционной функции $R(r,\kappa)$ / за исключением $d=2$ / имеет место и для микроскопической критической области: $r \gg \lambda$, $\kappa \ll 1$ и $\frac{r\kappa}{\lambda} \ll 1$ /4/;

$$d>2:\ R_{d>2}^{(0)}(r,\kappa)\Big|_{\substack{\frac{r\kappa}{\lambda}\ll 1\\ r\gg\lambda}} \sim \frac{\Gamma(d)}{4\pi^{(d-1)/2}}\frac{1}{\lambda^2 r^{d-2}}\, e^{-\frac{r\kappa}{\lambda}}$$

$$/9/$$

$$d=2:\ R_{d=2}^{(0)}(r,\kappa)\Big|_{\substack{\frac{r\kappa}{\lambda}\ll 1\\ r\gg\lambda}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{(2\pi)^{d/2}}\lambda^{-2}\ln\left(\frac{2\lambda}{r\kappa}\right) e^{-\frac{r\kappa}{\lambda}}.$$

В формулах /7-9/ величина $\lambda/\kappa \equiv r_c(\kappa)$ есть радиус корреляции, которая при приближении к критической температуре θ_c растет как $r_c(\kappa) \sim \left(\frac{\theta-\theta_c}{\theta_c}\right)^{-\nu} \equiv \tau^{-\nu}$ /4-6/.

Экспериментальные данные по рассеянию /5,6/, численные расчеты /6,8/ и сравнение с точно решаемой моделью ($d=2$) указывают на "неклассическое" поведение $R_d(r,\kappa)$ в микроскопической критической области. Например, нефизическая асимптотика /9/ при $d=2$ существенно отличается от результата Онзагера-Кауфмана [5–7]:

$$R_{d=2}(r,\kappa)\big|_{\substack{r>>\lambda \\ r<<r_c(\kappa)}} \simeq \frac{A}{r^{1/4}}\, e^{-r/r_c(\kappa)}\,[1+o(r/r_c)] \qquad /10/$$

В то же время экспериментальные данные [5,6], численные оценки [3,4,6,8] поведения $R_d(r,\kappa)$ в макроскопической критической области, а также сравнение с результатом для $d=2$ [6,7]:

$$R_{d=2}(r,\kappa)\big|_{\substack{r>>r_c(\kappa) \\ \kappa<<1}} \sim \frac{B\,r^{-1/4}}{r^{1/2}}\, e^{-r/r_c(\kappa)}\,[1+o(r_c/r)], \quad \nu_{d=2}=1 \qquad /11/$$

указывают на почти полное совпадение его с классической асимптотикой /7/ в этой области. Отличается лишь температурная зависимость коэффициентов при асимптотиках: из выражения /7/ получаем

$\kappa^{\frac{d-3}{2}}$, а точное решение для $d=2$ /11/: $\kappa^{-1/4}$. Численный анализ для $d=3$ [4,8] дает вместо $\kappa^{\frac{d-3}{2}}\big|_{d=3}=1$, которое следует из /7/, κ^{η}, где η совпадает с критическим индексом, который характеризует отклонение асимптотики $R_{d=3}(r,\kappa)$ в микроскопической критической области от классического поведения /9/ в этой области [4–6,8]:

$$R_d(r,\kappa)\big|_{\substack{r<<r_c(\kappa) \\ r>>\lambda}} \simeq D\,\frac{e^{-r/r_c(\kappa)}}{r^{d-2+\eta}}; \quad \tilde{R}_d(q,\kappa)\big|_{\substack{qr_c(\kappa)>>1 \\ q\lambda<<1}} \simeq \frac{d(q^2,\kappa^2)}{(\lambda^2q^2+\kappa^2)^{1-\eta/2}}, \qquad /12/$$

где $d(q^2,\kappa^2)$ - медленно изменяющаяся гладкая функция. Из /10/ и /12/ для $d=2$ получаем $\eta_{d=2}=1/4$. Тогда, сравнивая /7/ и /11/, можно предположить, что в макроскопической критической области $R_d(r,\kappa)$ и $\tilde{R}_d(q,\kappa)$ имеют вид

$$R_d(r,\kappa)\big|_{\substack{r>>r_c(\kappa) \\ \kappa<<1}} \simeq C_1\,\frac{\kappa^{\frac{d-3}{2}+\eta}}{r^{1/2(d-1)}}\, e^{-r/r_c}; \quad \tilde{R}_d(q,\kappa)\big|_{\substack{q\lambda/\kappa<<1 \\ q\lambda<<1,\,\kappa<<1}} \simeq \frac{C_2\,\kappa^{\eta}}{\lambda^2q^2+\kappa^2}. \qquad /13/$$

Представление /13/ для $d=3$, как показано Ферером, Муром и Вортисом [8] из анализа высокотемпературных разложений, справедливо при $\frac{r\kappa}{\lambda} \gtrsim 0.1$, $\kappa<<1$, т.е. начиная уже с промежуточной критической области $r \sim r_c(\kappa)$, $\kappa<<1$ *.

Таким образом, в отличие от макроскопической и промежуточной областей, где асимптотическое представление для $\tilde{R}_d(q,\kappa)$ на плоскости q^2 имеет только простой полюс $q^2=-r_c^2(\kappa)$ /13/

$$\tilde{R}_d(q,\kappa)\big|_{\substack{r_c^{-1}(\kappa)q\lesssim 1 \\ \kappa<<1}} \simeq \frac{d_0(q^2,\kappa^2)}{\lambda^2q^2+\kappa^2}, \qquad /14/$$

в микроскопической критической области $\tilde{R}_d(q,\kappa)$ /12/ имеет на плоскости q^2 разрез, начинающийся в точке ветвления $q^2=-r_c^{-2}(\kappa)$ [2,4].

В настоящей работе предлагается метод приближенного расчета критического индекса η_d в модели Изинга с конечным радиусом взаимодействия λ, который по своей идее близок к технике вычисления инфракрасного ветвления функций Грина /пропагаторов/ в квантовой теории поля [9,10]. Физический смысл этого метода состоит в как можно более точном учете дальних корреляций в окрестности критической точки $\kappa<<1$ [11], которые соответствуют в теории поля дальнодействующим силам, порождаемым квантами с нулевой массой покоя [9].

§2. Представление Монтролла-Берлина

Для модели Изинга, гамильтониан которой в нулевом внешнем поле запишем в виде:

$$H = -\frac{1}{2}\, I \sum_{rr'} V(r-r')\,\sigma_r\,\sigma_{r'}\,; \quad \sigma_r = \pm 1,$$

воспользуемся известным функциональным представлением Берлина и Монтролла [12,13]. Тогда для статсуммы получаем выражение:

$$Z_N = 2^N \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\ldots\int d\sigma_1 \ldots d\sigma_N\, \delta(1-\sigma_1^2)\ldots\delta(1-\sigma_N^2)\, \exp\{K\sum_{rr'} V(r-r')\times$$

* Для $d=2$ асимптотическое поведение /13/ справедливо также, начиная уже с промежуточной критической области [7], в которой классическая асимптотика имеет вид /8/.

$$\times\sigma_r\,\sigma_{r'}\} = \left(\frac{K}{\pi i}\right)^N \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\dots\int d\sigma_1 \dots d\sigma_N \int_C \dots \int_C dt_1 \dots dt_N \times$$

$$\times \exp\{K \sum_r t_r - K \sum_{r-r'} (T-V)_{rr'}\, \sigma_r\, \sigma_{r'}\},$$

где $K = \dfrac{1}{2\theta}$ и $T_{rr'} = t_r\,\delta_{rr'}$, причем для сходимости интегралов необходимо, чтобы контур интегрирования C проходил правее точки $\tilde{v}(0)$: $Re\, t_r > \tilde{v}(0)$. Соответственно, для корреляционной функции $<\sigma_r\,\sigma_{r'}>$ имеем:

$$<\sigma_r\,\sigma_{r'}> = Z_N^{-1}\left(\frac{K}{\pi i}\right)^N \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\dots\int d\sigma_1 \dots d\sigma_N \int_C \dots \int_C dt_1 \dots dt_N\, \sigma_r\, \sigma_{r'} \times$$

$$\times \exp\{K \sum_r t_r - K \sum_{rr'} (T-V)_{rr'}\, \sigma_r\, \sigma_{r'}\}.$$

Интегрирование по $\{\sigma_r\}$ можно выполнить, тогда получаем [12,13]:

$$Z_N = i^{-N}\left(\frac{K}{\pi}\right)^{N/2} \int_C \dots \int_C dt_1 \dots dt_N \,|T-V|^{-1/2} \exp\{K \sum_r t_r\} \qquad /15/$$

$$<\sigma_r\,\sigma_{r'}> = Z_N^{-1}\, \frac{1}{2Ki^N}\left(\frac{K}{\pi}\right)^{N/2} \int_C \dots \int_C dt_1 \dots dt_N\, \mathcal{G}_{rr'}(t) \times \qquad /16/$$

$$\times \exp\{K \sum_r t_r - 1/2\, \ln|T-V|\},$$

где матрица $\|\mathcal{G}_{rr'}(t)\|$ удовлетворяет уравнению:

$$(T-V)\,\mathcal{G} = I\ ; \qquad |T-V| \equiv \det\|T-V\|. \qquad /17/$$

Из соотношения $\dfrac{\partial}{\partial t_\ell} \ln|T-V| = \mathcal{G}_{\ell\ell}(t)$ находим, что:

$$\ln|T-V| = \ln|T_0 - V| + \sum_r \int_0 d\omega\ \phi_r\, \mathcal{G}_{rr}(t_0 + \omega\phi),$$

где $(T_0)_{rr'} = t_0 \delta_{rr'}$, t_0 - некоторая константа, соответствующая начальным условиям, а $\phi_r = t_r - t_0$. Поэтому /16/ можно записать в виде:

$$<\sigma_r\sigma_{r'}> = \frac{1}{2Ki^N Z_N}\left(\frac{K}{\pi}\right)^{N/2} |T_0 - V|^{-1/2} \times$$

$$\times \int d\{\phi\}\, \mathcal{G}_{rr'}(t_0+\phi) \exp\{K \sum_r (t_0+\phi_r) -$$

$$-1/2 \sum_r \int_0^1 d\omega\, \phi_r\, \mathcal{G}_{rr}(t_0 + \omega\phi)\} = \qquad /18/$$

$$= \frac{1}{2K}\, \frac{\int d\{\phi\}\, \mathcal{G}_{rr'}(t_0+\phi) \exp\{K\sum_r (t_0+\phi_r) - 1/2 \sum_r \int_0^1 d\omega\, \phi_r\, \mathcal{G}_{rr}(t_0+\omega\phi)\}}{|T_0 - V|^{1/2} \int d\{t\}\, |T-V|^{-1/2} \exp\{K \sum_r t_r\}}.$$

В теории поля, как известно, пропагатор записывается в виде [9]:

$$G(x-y) = \frac{\int \delta\phi\, S_0(\phi)\, G(x,y|\phi) \exp\{-i\int \phi \Delta_c^{-1} \phi\}}{\int \delta\phi\, S_0(\phi) \exp\{-i\int \phi\Delta_c^{-1}\phi\}}, \qquad /19/$$

где $G(x,y|\phi)$ - функция Грина во внешнем поле, аналогичная $\mathcal{G}_{rr'}(t_0+\phi)$ в /18/, а член поляризации вакуума

$$S_0(\phi) = \exp\{-1/2 \int_0^1 d\omega \int dx\, G(x,x|\omega\phi)\,\phi(x)\}$$

аналогичен соответствующему выражению в /18/. Таким образом, /18/ и /19/ совпадают с точностью до гауссовой экспоненты. В инфракрасной области в теории поля поляризационным членом $S_0(\phi)$ обычно пренебрегают [10]. В настоящей работе показано, что вклад от множителя

$$\exp\{-1/2 \sum_r \int_0^1 d\omega\, \phi_r\, \mathcal{G}_{rr}(t_0 + \omega\phi)\},$$

в показателе которого будут удержаны члены только до квадратичных по ϕ_r, существенен при анализе поведения $R_d(r,\kappa)$.

§3. Двухточечная корреляционная функция в критической области

Получим из /18/ асимптотическое представление для корреляционной функции $R_d(r,\kappa)$ или $\tilde{R}_d(q,\kappa)$ в критической области: $\tau \ll 1$, т.е. в окрестности критической точки θ_c.

Последнюю определим методом стацфазы для Z_N. Уравнение для точки перевала $\bar{t}_r \equiv t_s$, как следует из /15/, имеет вид:

$$K = 1/2\, \mathcal{G}_{rr}(t_s)\,; \qquad Im\, t_s = 0, \qquad t_s \geq \tilde{v}(0),$$

т.е. t_s является функцией температуры θ, а для Z_N получаем:

$$Z_N = i^{-N}\left(\frac{K}{\pi}\right)^{N/2} |T_s - V|^{-1/2} e^{NKt_s} \int d\{\psi_r\} \exp\{K \sum_r \psi_r\} \times$$
$$\times \exp\{-1/2 \sum_r \int_0^1 d\omega\, \psi_r\, \mathcal{G}_{rr}(t_s + \omega\psi)\}, \qquad /20/$$

где $\psi_r = t_r - t_s$ и $(T_s)_{rr'} = t_s \delta_{rr'}$, причем при температурах θ, для которых соответствующая $t_s(\theta) > \tilde{v}(0)$, термодинамические потенциалы не имеют особенностей, а при

$$K_c = 1/2\, \mathcal{G}_{rr}(\tilde{v}(0))\,; \quad K_c = \frac{1}{2\theta_c} \qquad /21/$$

условия сходимости интегралов в /15/, /20/ не выполняются строго, что соответствует появлению особенностей у производных $\ln Z_N$ по температуре [12,13]. Уравнение /21/ совпадает с уравнением для критической температуры в сферической модели, у которой θ_c^s ниже, чем $\theta_c^M = \tilde{v}(0)$, полученная

в приближении молекулярного поля или Орнштейна-Цернике, а $Z_N^s = \left(\frac{K}{\pi}\right)^{N/2} |T_s - V|^{-1/2} e^{NKt_s}$ в /20/ совпадает со статсуммой сферической модели [1].

Из уравнения /17/ для $\mathcal{G}_{rr}(t_0 + \omega\phi)$ в низшем приближении по отклонениям $\phi_r = t_r - t_0$ получаем:

$$\mathcal{G}_{rr}(t_0 + \omega\phi) = \mathcal{G}_{rr}(t_0) - \sum_{\ell} \mathcal{G}_{r\ell}(t_0)\,\omega\phi_\ell\, \mathcal{G}_{\ell r}(t_0) + \ldots$$

Подставляя это выражение в /18/ и /20/, видим, что t_0 удобно выбрать совпадающим с точкой перевала t_s, тогда для корреляционной функции $R_d(r-r', \beta)$ получаем:

$$R_d(r - r', \beta) = \frac{\int d\{\phi\} \mathcal{G}_{rr'}(\phi) \exp\{1/4 \sum_{\ell\ell'} \phi_\ell \mathcal{G}_{\ell\ell'}(0)\, \mathcal{G}_{\ell'\ell}(0)\, \phi_{\ell'}\}}{2K \int d\{\phi\} \exp\{1/4 \sum_{\ell\ell'} \phi_\ell \mathcal{G}_{\ell\ell'}(0)\, \mathcal{G}_{\ell'\ell}(0)\, \phi_{\ell'}\}}, \qquad /22/$$

где

$$\mathcal{G}_{\ell\ell'}(0) \equiv \mathcal{G}_{\ell\ell'}(t_s)\,; \; \mathcal{G}_{rr'}(\phi) \equiv \mathcal{G}_{rr'}(t_s + \phi).$$

Учитывая, что в критической области: $\tau \ll 1$ радиус корреляции гораздо больше постоянной решетки, можно перейти от уравнения /17/ к его непрерывному аналогу [13].

$$[t_s + \phi(r)]\,\mathcal{G}(r, r_0|\phi) - \int dr' V(r - r')\, \mathcal{G}(r', r_0|\phi) = \delta(r - r_0). \qquad /23/$$

Если принять во внимание, что

$$\int dr' V(r - r')\, \mathcal{G}(r', r_0|\phi) = \int dr' V(r') e^{-ir'(\frac{1}{i}\nabla_r)} \mathcal{G}(r, r_0|\phi) =$$
$$= \tilde{v}(-i\nabla_r)\, \mathcal{G}(r, r_0|\phi),$$

и учесть медленное изменение $\tilde{v}(q)$ при малых q^2 /см. [2]/

$$\tilde{v}(q) = \tilde{v}(0) - \lambda^2 q^2 - \ldots$$

то уравнение /23/ можно записать в виде *:

$$[-\lambda^2 \nabla^2 + \kappa^2 + \phi(r)]\,\mathcal{G}(r, r_0|\phi) = \delta(r - r_0), \qquad /24/$$

где $\kappa^2 = t_s - \tilde{v}(0)$, причем $\kappa \sim \tau$ при $\tau \ll 1$, т.е. $\nu = 1$. [12,13]

Для решения этого уравнения воспользуемся хорошо известным методом [9,10]. Представим $\mathcal{G}(r, r_0|\phi)$ в виде:

$$\mathcal{G}(r, r_0|\phi) = i \int_0^\infty d\nu \exp\{i\nu[\lambda^2 \nabla^2 - \kappa^2 - \phi(r)]\}\, \delta(r - r_0) =$$
$$= \frac{i}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dp \int d\nu\, \Phi(\nu, r|\phi) \exp\{ip(r - r_0) - i\nu(\lambda^2 p^2 + \kappa^2)\}, \qquad /25/$$

где $\Phi(\nu, r|\phi)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\nu}\Phi = [\lambda^2 \nabla^2 + 2i\lambda^2 p \nabla - \phi(r)]\,\Phi\,; \quad \Phi(\nu = 0, r|\phi) = 1.$$

---

* Производным высших порядков в критической области $\lambda^2 q^2 \ll 1$, $\kappa^2 \ll 1$ можно пренебречь так же, как высшими членами разложения (2) [3].

Если искать решение в виде $\Phi = \exp Y$ и ограничиться в Y линейными по $\phi(r)$ членами, то для $Y(\nu, r|\phi)$ получается уравнение:

$$\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \nu} Y = [\lambda^2 \nabla^2 + 2i\lambda^2 p \nabla] Y - \phi(r); \quad Y(\nu = 0, r|\phi) = 0,$$

решение которого имеет вид:

$$Y(\nu, r, p|\phi) = \int \frac{\{\exp[-i(k^2 + 2pk)\lambda^2 \nu] - 1\}\tilde{\phi}(k)}{(2\pi)^{d/2}\lambda^2(k^2 + 2pk)} e^{ikr} dk. \qquad /26/$$

Функция $\mathcal{G}_{rr'}(0) \equiv \mathcal{G}_{rr'}(t_s)$ в /22/ удовлетворяет уравнению /24/ при $\phi(r) = 0$, т.е. ее Фурье-образ имеет вид:

$$\tilde{\mathcal{G}}_0(q, \kappa) = \frac{1}{\lambda^2 q^2 + \kappa^2}. \qquad /27/$$

С помощью /25/-/27/ получаем для Фурье-образа корреляционной функции /22/ в критической области выражение:

$$\tilde{R}_d(p, \kappa) = \frac{i}{2KC}\int_0^\infty d\nu \int d\{\phi\} \exp\{-i\nu(p^2\lambda^2 + \kappa^2) +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int D(\nu, r, p, k)\tilde{\phi}(k)\, dk\} \exp\{\frac{1}{4(2\pi)^d}\int \tilde{\phi}(k)\Pi_d(k, \kappa)\tilde{\phi}(-k) dk\}, \qquad /28/$$

где

$$C = \int d\{\phi\} \exp\{\frac{1}{4(2\pi)^d}\int \tilde{\phi}(k)\Pi_d(k, \kappa)\tilde{\phi}(-k)\, dk\}$$

$$\Pi_d(k, \kappa) = \int dq\, \tilde{\mathcal{G}}_0(q)\tilde{\mathcal{G}}_0(k + q) \qquad /29/$$

$$D(\nu, r, p, k) = \frac{\exp[-i(k^2 + 2pk)\lambda^2\nu] - 1}{\lambda^2(k^2 + 2pk)} e^{ikr}.$$

Вычисляя функциональный интеграл в /28/, получаем:

$$\tilde{R}_d(p, \kappa)\Big|_{\substack{\kappa \ll 1 \\ \lambda p \ll 1}} \simeq \frac{1}{2K}\, i\int_0^\infty d\nu \exp\{-i(\lambda^2 p^2 + \kappa^2)\nu - f_d(\nu, p^2, \kappa^2)\}, \quad /30/$$

где

$$f_d(\nu, p^2, \kappa^2) = \int D(\nu, r, p, k)\Pi_d^{-1}(k, \kappa) D(\nu, r, p, -k) dk. \qquad /31/$$

§4. Заключение

Выражения /30/, /31/, полученные для $\tilde{R}_d(p, \kappa)$, позволяют проанализировать ее асимптотическое поведение, соответственно, поведение $R_d(r, \kappa)$ во всей критической области: $\kappa^2 \ll 1$, $\lambda^2 p^2 \ll 1$ или $r^2 \gg \lambda^2$ *.

Классическое выражение $\tilde{R}_d^{(0)}(p, \kappa)$ /3/ получается из /30/, если пренебречь зависимостью $\mathcal{G}(r, r'|\phi)$ от $\phi(r)$ в /25/, что соответствует нулевому приближению по $\phi(r)$ /27/, тогда $f_d(\nu, p^2, \kappa^2) \equiv 0$. Отклонение асимптотики $\tilde{R}_d(p, \kappa)$ от $\tilde{R}_d^{(0)}(p, \kappa)$ /9,10/ определяется поведением $f_d(\nu, p^2, \kappa^2)$ при $\nu \to \infty$:

$$\tilde{R}_d(p, \kappa)\Big|_{\substack{\kappa \ll 1 \\ \lambda p \ll 1}} \simeq \frac{1}{2K}(\lambda^2 p^2 + \kappa^2)^{-1} \operatorname{Re}\{i\int_0^\infty dz \exp[-iz -$$

$$- f_d(\frac{z}{\lambda^2 p^2 + \kappa^2}, p^2, \kappa^2)]\}. \qquad /32/$$

Литература

1. Р.Браут. Фазовые переходы. "Мир", 1967.
2. R.Brout. In Magnetism, vol. IIA, Academic Press, N.Y., 1965.
3. M.Fisher. Journ. Math.Phys., 5, 944 (1964).
4. C.Di Castro. Rivista del Nuovo Cimento., I, 199 (1971).
5. L.Kadanoff et al., Rev.Mod.Phys., 39, 395 (1967).
6. M.Fisher. Rep.Progr.Phys., 30, 731 (1967).
   М.Фишер. Природа критического состояния. "Мир", 1968.
7. L.Kadanoff. Nuovo Cimento., B44, 276 (1966).
8. M.Ferer, M.Moore, M.Wortis. Phys.Rev.Lett., 22, 1382 (1969).
   M.Fisher, R.Burford. Phys.Rev., 156, 583 (1967).
9. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантовых полей. Гостехиздат, 1957.

* Исследование двухточечной корреляционной функции $R_d(r, \kappa)$ ($\tilde{R}_d(p, \kappa)$) в парамагнитной критической области $0 < r \ll 1$, $r \gg \lambda$ ($\lambda p \ll 1$) с помощью представления /31/, /32/ проведено во второй части работы.

10. E.S.Fradkin. Nucl.Phys., 76, 588 (1966).

11. И.В.Волович, Е.А.Дынин, В.А.Загребнов, В.П.Фролов. ТМФ, 14, 272 /1973/.

12. E.Montroll, T.Berlin. Comm. Pure Appl.Math., 4, 23 (1951).

13. E.Helfand, R.Langer. Phys.Rev., 160, 437 (1967).

*Рукопись поступила в издательский отдел
19 марта 1973 года.*