СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P4 - 7000

И.Г.Бранков

О НАМАГНИЧЕННОСТИ И ВОСПРИИМЧИВОСТИ В МОДЕЛИ ИЗИНГА СО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ J/N

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Бранков И.Г. P4 - 7000

О намагниченности и восприимчивости в модели Изинга с взаимодействием J/N

Получены математически строгие оценки близости намагниченности и восприимчивости на одну частицу в N-частичной модели Изинга с взаимодействием J/N к соответствующим функциям в теории молекулярного поля.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1973

Brankov J.G. P4 - 7000

On the Magnetization and Magnetic Susceptibility of an Ising Model with the Interaction J/N

Mathematically rigorous estimates are found for the closeness of magnetization and magnetic susceptibility per spin in an N-body Ising model with the interaction J/N to the corresponding functions in the molecular-field theory.

P4 - 7000

И.Г. Бранков

О НАМАГНИЧЕННОСТИ И ВОСПРИИМЧИВОСТИ В МОДЕЛИ ИЗИНГА СО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ J/N

В традиционном подходе к системам многих частиц возникает естественный вопрос о том, насколько близко термодинамические характеристики систем с большим, но конечным числом частиц, отражают свойства предельных бесконечных систем, особенно вблизи точек фазового перехода в последних. Частично ответ на поставленный вопрос удается получить в случае простых моделей, допускающих точное в термодинамическом пределе решение.

В работе /I/ была получена оценка близости плотности свободной энергии $f_N(\theta,h)$ для N-частичной модели Изинга с постоянным взаимодействием вида J/N:

$$f_N(\theta,h) = -\frac{\theta}{N}\ln Sp\, e^{-\frac{\mathcal{H}}{\theta}}, \tag{I}$$

где

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_i^z\sigma_j^z - \mu h\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^z \tag{2}$$

(J - константа обменного взаимодействия, σ_i^z- матрицы Паули, μ- магнитный момент частиц, h - внешнее магнитное поле, θ - температура) к предельной функции $f_\infty(\theta,h)$:

$$\left| f_\infty(\theta,h) - f_N(\theta,h)\right| \leq 2\sqrt{\theta J}\cdot N^{-1/2}. \tag{3}$$

В рассматриваемом случае $f_\infty(\theta,h)$ совпадает с плотностью свободной энергии $f^0(\theta,h)$ в теории молекулярного поля:

$$f_\infty(\theta,h) \equiv f^0(\theta,h) = \\ = \frac{1}{2}J\bar{C}^2 - \theta\ln 2\,ch\,\frac{J\bar{C}+\mu h}{\theta}, \tag{4}$$

где $\bar{C} = \bar{C}(\theta, h)$ есть решение уравнения самосогласования:

$$C = th\,\frac{JC + \mu h}{\theta}\,, \qquad (5)$$

реализующее абсолютный минимум функции (4) (см. /2/):

$$f^{\circ}(\bar{C}) = \min_{\{C\}} f^{\circ}(C)\,. \qquad (6)$$

Пользуясь терминологией работы /2/, будем считать, что функция $f^{\circ}(\theta,h)$ описывает термодинамику "аппроксимирующей системы", которой ставится в соответствие "гамильтониан"

$$\mathcal{H}^{\circ} = -(J\bar{C} + \mu h)\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^z + \frac{1}{2}JN\bar{C}^2, \qquad (7)$$

зависящий от параметров самосогласования $\bar{C}(\theta,h)$.

В работе /1/ был развит метод, позволяющий с помощью неравенства (3) и с учетом свойств функций $f_N(\theta,h)$ оценивать близость производных от удельной свободной энергии $f_N(\theta,h)$ по термодинамическим параметрам (θ и h) к соответствующим производным от предельной функции $f^{\circ}(\theta,h)$. В этой работе были получены оценки близости энтропий и внутренних энергий на одну частицу, соответствующих системам (2) и (7).

В настоящей работе исследуем вопрос о близости первых двух производных от удельной свободной энергии $f_N(\theta,h)$ по магнитному полю, а именно:

$$M_N(\theta,h) = -\frac{\partial f_N(\theta,h)}{\partial h} \qquad (8)$$

и

$$\chi_N(\theta,h) = -\frac{\partial^2 f_N(\theta,h)}{\partial h^2}\,, \qquad (9)$$

где $M_N(\theta,h)$ - намагниченность, а $\chi_N(\theta,h)$ - восприимчивость системы (2) на один узел, соответственно к удельной намагниченности $M^{\circ}(\theta,h)$ и восприимчивости $\chi^{\circ}(\theta,h)$ в теории молекулярного поля:

$$M^{\circ}(\theta,h) = -\frac{\partial f^{\circ}(\theta,h)}{\partial h} = \mu\bar{C}(\theta,h), \qquad (10)$$

$$\chi^{\circ}(\theta,h) = -\frac{\partial^2 f^{\circ}(\theta,h)}{\partial h^2} = \frac{\mu^2}{\theta ch^2\frac{J\bar{C}+\mu h}{\theta} - J}\,. \qquad (11)$$

Отметим, прежде всего, некоторые важные свойства функции $f_N(\theta,h)$:

1. При любом конечном N функция $f_N(\theta,h)$ вещественно аналитична по θ и h во всей области определения $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D} = \begin{cases} 0 \le \theta < \infty \\ -\infty < h < \infty\,. \end{cases} \qquad (12)$$

В частности, все ее производные по h непрерывны в $\mathcal{D}$.

2. $f_N(\theta,h)$ - четная функция магнитного поля, т.е.:

$$f_N(\theta,h) = f_N(\theta,-h)\,. \qquad (13)$$

Для доказательства последнего утверждения достаточно представить $f_N(\theta,h)$ в виде:

$$f_N(\theta,h) = -\frac{\theta}{N}\ln\sum_{\sigma_1^z=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_N^z=\pm1} e^{-\frac{1}{\theta}\mathcal{H}(\sigma_1^z,\ldots,\sigma_N^z;h)}$$

и воспользоваться инвариантностью гамильтониана $\mathcal{H}$ (см.(2)) относительно преобразования $\sigma_i^z \to -\sigma_i^z,\ h \to -h$:

$$\mathcal{H}(\sigma_1^z,\ldots,\sigma_N^z;h) = \mathcal{H}(-\sigma_1^z,\ldots,-\sigma_N^z;-h)\,.$$

Следствие: Из непрерывности производных $\partial^n f_N(\theta,h)/\partial h^n$, $n=1,2,\ldots$, (см. I) и четности функции $f_N(\theta,h)$ по h следует обращение в ноль в точке $h=0$ всех нечетных производных по внешнему полю:

$$\left.\frac{\partial^{2k+1} f_N(\theta,h)}{\partial h^{2k+1}}\right|_{h=0} = 0, \qquad (k=0,1,2,\ldots) . \tag{I4}$$

В частности, в системе из конечного числа частиц отсутствует спонтанная намагниченность:

$$M_N(\theta,h=0) = -\left.\frac{\partial f_N(\theta,h)}{\partial h}\right|_{h=0} = 0. \tag{I5}$$

3. Удельная свободная энергия $f_N(\theta,h)$ есть выпуклая вверх функция магнитного поля h во всей области $\mathcal{D}$. Действительно, дифференцируя выражение (5) два раза по h, получим:

$$\frac{\partial}{\partial h} f_N(\theta,h) = -\mu \left\langle \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^z \right\rangle \tag{I6}$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2} f_N(\theta,h) = -\frac{\mu^2 N}{\theta}\left\langle \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^z - \left\langle \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^z \right\rangle\right)^2 \right\rangle \le 0. \tag{I7}$$

4. Намагниченность на одну частицу $M_N(\theta,h)$ есть выпуклая вверх функция внешнего поля в области $\mathcal{D}^+$:

$$\mathcal{D}^+ = \begin{cases} 0 \le \theta < \infty \\ 0 \le h < \infty \end{cases}$$

и выпуклая вниз в области $\mathcal{D}^-$:

$$\mathcal{D}^- = \begin{cases} 0 \le \theta < \infty \\ -\infty < h \le 0 \end{cases}.$$

Это утверждение следует из неравенства Гриффитса третьего порядка [3]:

$$\frac{\partial^2 M_N(\theta,h)}{\partial h^2} = \frac{\mu^3 N^2}{\theta}\left[\langle I_z^3\rangle - 3\langle I_z^2\rangle\langle I_z\rangle + 2\langle I_z\rangle^3\right] \begin{cases} \le 0, & h \ge 0 \\ \ge 0, & h \le 0 \end{cases}$$

где

$$I_z = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^z .$$

Заметим теперь, что по теореме Гриффитса о последовательности выпуклых функций [4], из сходимости последовательности удельных свободных энергий (см. (3)):

$$\lim_{N\to\infty} f_N(\theta,h) = f_\infty(\theta,h), \qquad \theta,h \in \mathcal{D} \tag{I8}$$

согласно свойству 3, следует сходимость последовательности производных $\frac{\partial}{\partial h} f_N(\theta,h)$ к производной от предельной функции $\frac{\partial}{\partial h} f_\infty(\theta,h)$:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\partial}{\partial h} f_N(\theta,h) = \frac{\partial}{\partial h} f_\infty(\theta,h)$$

в каждой точке, в которой $\frac{\partial}{\partial h} f_\infty(\theta,h)$ существует и непрерывна по h. Другими словами, поскольку $f_\infty(\theta,h) = f^\circ(\theta,h)$, сходимость намагниченности $M_N(\theta,h)$ модельной системы (см. (8)) к намагниченности $M^\circ(\theta,h)$, аппроксимирующей (см. (I0)):

$$\lim_{N\to\infty} M_N(\theta,h) = M^\circ(\theta,h) = \mu\,\overline{C}(\theta,h) , \tag{I9}$$

имеет место во всех точках непрерывности функции $\overline{C}(\theta,h)$ по h.

Решение $\overline{C}(\theta,h)$ уравнения молекулярного поля (5), реализующее абсолютный минимум плотности свободной энергии $f^\circ(\theta,h)$ по C (условие (6)), есть функция непрерывная и дифференцируемая по h везде, за исключением области $h=0,\ 0\le\theta<\theta_c\ (\theta_c=J)$. В этой области, как известно, уравнение (5) имеет два нетривиальных решения $C_{1,2}=\pm C(\theta,0)$ $(C(\theta,0)>0)$ и одно тривиальное $C_3=0$. Ввиду четности функции $f^\circ(\theta,h,\bar C(\theta,h))\big|_{h=0}$ по $\bar C$ *), условие минимума отбирает сразу оба нетривиальных решения $\pm C(\theta,0)$. Из-за необходимости устранить двузначность функции $C(\theta,h)$ в области $h=0,\ 0\le\theta<\theta_c$, вводится дополнительный принцип определения спонтанной намагниченности (см. метод квазисредних [5]):

$$M^\circ(\theta,0)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\mu C(\theta,h)>0.\quad (0\le\theta<\theta_c) \quad (20)$$

Так, определенная удельная намагниченность $M^\circ(\theta,h)$ имеет в ферромагнитной области $(0\le\theta<\theta_c)$ разрыв первого рода слева в точке $h=0$.

Поскольку при любом N справедливо неравенство (см. (I5) и (20)):

$$M^\circ(\theta,0)-M_N(\theta,0)=M^\circ(\theta,0)>0\quad(0\le\theta<\theta_c), \quad (2I)$$

то в области $h=0,\ 0\le\theta<\theta_c$ сходимость (I9) не имеет места.

*) Заменяя h на $-h$ в уравнении (5), убеждаемся, что $\bar C(\theta,-h)=-\bar C(\theta,h)$. Свободная энергия $f^\circ(\theta,h,\bar C(\theta,h))$ инвариантна относительно преобразования $h\to -h$: $f^\circ(\theta,h,\bar C(\theta,h))=f^\circ(\theta,-h,-\bar C(\theta,h))$, откуда следует, что $f^\circ(\theta,0,\bar C(\theta,0))=f^\circ(\theta,0,-\bar C(\theta,0))$.

Обратим внимание на характер разрыва плотности намагниченности предельной модельной системы: $M_\infty(\theta,h)=\lim_{N\to\infty}M_N(\theta,h)$. Из непрерывности $M^\circ(\theta,h)$ при $h\neq 0$ и равенства (I9) следует существование пределов:

$$M_\infty(\theta,0^+)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}M_\infty(\theta,h)=M^\circ(\theta,0)>0,\quad 0\le\theta<\theta_c$$

$$M_\infty(\theta,0^-)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}M_\infty(\theta,h)=-M^\circ(\theta,0)<0,$$

в то время как $M_\infty(\theta,0)=0$. Намагниченность в точке разрыва, следуя идее о квазисредних [5] и в соответствии с определением (20) спонтанной намагниченности аппроксимирующей системы, нужно переопределить, полагая:

$$\tilde M_\infty(\theta,0)=M_\infty(\theta,0^+)\equiv M^\circ(\theta,0)$$

и

$$\tilde M_\infty(\theta,h\neq 0)=M_\infty(\theta,h\neq 0)\equiv M^\circ(\theta,h\neq 0).$$

Тогда можно считать, что удельные намагниченности систем (2) и (7) в термодинамическом пределе совпадают.

Вернемся, однако, к нашему исследованию возможности получения равномерной по полю оценки близости величин $M^\circ(\theta,h)$ и $M_N(\theta,h)$. Приведем формулировку леммы работы [I], позволяющей решить поставленную задачу.

<u>Лемма.</u> Пусть $\{a_N(x)\}$, $N=1,2,\dots$ последовательность непрерывно дифференцируемых на сегменте $a\le x\le b$ функциях, имеющих в каждой точке интервала (a,b) производные справа второго порядка $a''_N(x+0)$, причем:

1. $|a_N(x)| \le \varepsilon_N(a,b) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, $\forall x \in [a,b]$.

2. Последовательность вторых производных справа $\{a''_N(x+0)\}$ равностепенно ограничена на интервале (a,b) или сверху:

$$a''_N(x+0) \le L(a,b) \quad , \quad (0 < L(a,b) < \infty)$$

или снизу:

$$a''_N(x+0) \ge -L(a,b) .$$

Тогда справедливо неравенство:

$$|a'_N(x)| \le 2\sqrt{\varepsilon_N(a,b)\,L(a,b)}$$

для всех

$$a+\delta' \le x \le b-\delta' \quad , \quad \delta'>0$$

и всех $N>N'$, где N' и δ' удовлетворяют условию:

$$\varepsilon_{N'}(a,b) \le \frac{\delta'^2}{4} L(a,b).$$

Очевидно, равномерную по h оценку малости величины:

$$|M_N(\theta,h) - M^\circ(\theta,h)| \equiv \left| \frac{\partial \Delta_N(\theta,h)}{\partial h} \right| \quad , \tag{22}$$

где

$$\Delta_N(\theta,h) \equiv f^\circ(\theta,h) - f_N(\theta,h), \tag{23}$$

следует искать в области, где: 1) намагниченность $M^\circ(\theta,h)$ непрерывна, 2) восприимчивость $\chi^\circ(\theta,h) = \frac{\partial M^\circ(\theta,h)}{\partial h}$ равномерно ограничена по h , т.е. или при наличии "слабого" магнитного поля : $|h| \ge \delta > 0$ (при любой температуре), или в парамагнитной области $\theta > \theta_c$ (при любом поле h).

Рассмотрим сначала случай наличия внешнего поля:

$$|h| \ge \delta > 0 ,$$

когда разность плотностей свободных энергий $\Delta_N(\theta,h)$ удовлетворяет всем условиям леммы при любом θ. Заметим, что равномерная ограниченность снизу второй производной:

$$\frac{\partial^2 \Delta_N(\theta,h)}{\partial h^2} = \chi_N(\theta,h) - \chi^\circ(\theta,h) \ge$$
$$\ge -\chi^\circ(\theta,h) \ge -L_2(\delta) \ , \quad (|h| \ge \delta > 0)$$

следует непосредственно из выпуклости вверх свободной энергии $f_N(\theta,h)$ по полю (свойство 3):

$$\chi_N(\theta,h) \ge 0 ,$$

и ограниченности $\chi^\circ(\theta,h)$ вне δ-окрестности критической точки *):

$$0 \le \chi^\circ(\theta,h) = \frac{\mu^2}{\theta\, ch^2 \frac{J\zeta+\mu h}{\theta}} \le \frac{\mu}{\delta} \equiv L_2(\delta), \quad |h| \ge \delta > 0 . \tag{24}$$

Применяя теперь лемму к последовательности $\{\Delta_N(h)\}$ на интервалах $h \in (-\infty,-\delta]$ и $h \in [\delta,\infty)$, получим оценку близости удельных намагниченностей:

$$|M_N(\theta,h) - M^\circ(\theta,h)| \le 2\sqrt{\varepsilon_N(\theta)\,L_2(\delta)} = 2^{3/2}\mu \left(\frac{\sqrt{\theta J}}{\mu\delta}\right)^{1/2} N^{-1/4} , \tag{25}$$

---

*) Для получения оценки (24) мы использовали уравнение (5) и неравенство : $ch^2 x \ge \frac{x}{th\,x}$ (см. также /2/).

справедливую для всех:

$$|h| \ge \delta + \delta' > 0 \quad , \; \delta' > 0 \tag{26}$$

и всех N, удовлетворяющих условию:

$$N > 64 \, \frac{\delta}{\delta'} \, \frac{\theta J}{(\mu \delta')^2} \, . \tag{27}$$

Для удобства сделаем замену $\delta = \delta' \to \frac{\delta}{2}$ и перепишем результаты (25) - (27) в виде:

$$|M_N(\theta,h) - M^\circ(\theta,h)| \le 4\mu \left(\frac{\sqrt{\theta J}}{\mu\delta}\right)^{1/2} \cdot N^{-1/4} , \tag{28}$$

при

$$|h| \ge \delta > 0 \tag{29}$$

и

$$N > 256 \, \frac{\theta J}{(\mu\delta)^2} \, . \tag{30}$$

Воспользуемся теперь оценкой (28) и покажем близость удельных магнитных восприимчивостей $\chi_N(\theta,h)$ и $\chi^\circ(\theta,h)$ при включенном внешнем поле.

Действительно, по отношению к последовательности $\{M_N(\theta,h) - M^\circ(\theta,h)\}$, рассматриваемой на интервалах $h \in (-\infty, -\delta]$ и $h \in [\delta, \infty)$, выполняется первое условие леммы. Справедливость второго условия (ограниченность вторых производных сверху или снизу) легко устанавливается с помощью свойства „4" выпуклости плотности намагниченности $M_N(\theta,h)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2}\left[M_N(\theta,h) - M^\circ(\theta,h)\right] \le - \frac{\partial^2 M^\circ(\theta,h)}{\partial h^2} \le L_3(\theta,\delta) \qquad (h \ge \delta > 0) \tag{31}$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2}\left[M_N(\theta,h) - M^\circ(\theta,h)\right] \ge - \frac{\partial^2 M^\circ(\theta,h)}{\partial h^2} \ge - L_3(\theta,\delta) \, , \qquad (h \le -\delta < 0) \tag{32}$$

где :

$$L_3(\theta,\delta) = \frac{3\theta\mu}{J\delta^2} \, . \tag{33}$$

Приведем вывод выражения (33) для $L_3(\theta,\delta)$. Дифференцируя дважды уравнение (5) по h и принимая во внимание нечетную зависимость намагниченности от поля, найдем:

$$- \frac{\partial^2 M^\circ(\theta,h)}{\partial h^2} = \operatorname{sign} h \cdot \frac{2\theta\mu|\bar{C}|}{[\theta - J(1-\bar{C}^2)]^2} \, \chi^\circ(\theta,h) \, . \tag{34}$$

С помощью полученных в работе /I/ оценок:

$$1 - \bar{C}^2 = ch^{-2} \frac{J\bar{C} + \mu h}{\theta} \le \frac{\theta \bar{C}}{J\bar{C} + \mu h}$$

и

$$\chi^\circ(\theta,h) \le \frac{3\mu^2\theta^2}{2J(J\bar{C} + \mu h)^2} \, ,$$

получаем:

$$\frac{2\theta\mu|\bar{C}|}{[\theta - J(1-\bar{C}^2)]^2} \, \chi_\circ(\theta,h) \le \frac{2\theta\mu}{\left(\frac{\mu h \theta}{J\bar{C} + \mu h}\right)^2} \, \chi^\circ(\theta,h) \le \frac{3\theta\mu}{J h^2} \, . \tag{35}$$

Подставляя (35) в (34), убеждаемся в справедливости (33).

Итак, с учетом (28) - (33), согласно лемме, получаем следующую оценку:

$$|\chi_N(\theta,h) - \chi^\circ(\theta,h)| \le 2\sqrt{2\sqrt{\varepsilon_N(\theta) L_2(\tfrac{\delta}{2})} \, L_3(\theta,\delta)} = 4\sqrt{3} \, \frac{\mu}{\delta} \left(\frac{\theta}{J}\right)^{3/8} \left(\frac{\theta}{\mu\delta}\right)^{1/4} \cdot N^{-1/8} \tag{36}$$

для всех

$$|h| \ge \delta + \delta' > 0 \quad \delta' > 0 \, , \tag{37}$$

и всех N, удовлетворяющих одновременно условию (30) и неравенству:

$$N > \left(\frac{16}{3}\right)^4 \left(\frac{\delta}{\delta'}\right)^8 \left(\frac{J}{\theta}\right)^3 \left(\frac{J}{\mu\delta}\right)^2 . \qquad (38)$$

Проводя в (36), (38) замену $\delta = \delta' \to \frac{\delta}{2}$, найдем окончательно:

$$|\chi_N(\theta,h) - \chi^0(\theta,h)| \le 8\sqrt[4]{18}\, \frac{\mu}{\delta} \left(\frac{\theta}{J}\right)^{3/8} \left(\frac{\theta}{\mu\delta}\right)^{1/4} \cdot N^{-1/8} \qquad (39)$$

для всех

$$|h| \ge \delta > 0 \qquad (40)$$

и всех N, удовлетворяющих условию:

$$N > \begin{cases} 256\, \dfrac{\theta J}{(\mu\delta)^2} , & \dfrac{\theta}{J} \ge \dfrac{4\sqrt{2}}{3} \\ 256 \left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)^4 \left(\dfrac{J}{\theta}\right)^3 \left(\dfrac{J}{\mu\delta}\right)^2 , & \dfrac{\theta}{J} \le \dfrac{4\sqrt{2}}{3} \end{cases} . \qquad (41)$$

Рассмотрим теперь парамагнитную область:

$$\theta > J = \theta_c .$$

В этой области восприимчивость молекулярного поля $\chi^0(\theta,h)$ равномерно ограничена по h на всей оси $-\infty < h < \infty$:

$$0 \le \chi^0(\theta,h) \le \tilde{L}_2(\theta-\theta_c) = \frac{\mu}{\theta - J} \qquad (\theta > J) \qquad (42)$$

и оценка близости намагниченностей на одну частицу для модельной и аппроксимирующей систем принимает вид:

$$|M_N(\theta,h) - M^0(\theta,h)| \le 2^{3/2}\mu \left(\frac{J}{\theta}\right)^{1/4} \left(1 - \frac{J}{\theta}\right)^{-1/2} \cdot N^{-1/4} , \qquad (43)$$

справедливый при любых h и N.

Заметим, однако, что смена знака выпуклости намагниченности $M_N(\theta,h)$ в точке $h=0$ не позволяет провести и в парамагнитной области равномерную на всей оси $-\infty<h<\infty$ оценку близости удельных восприимчивостей $\chi_N(\theta,h)$ и $\chi^0(\theta,h)$. Так, при $\theta > J$, исходя из (34) и (42), получим:

$$\left| \frac{\partial^2 M^0(\theta,h)}{\partial h^2} \right| = \frac{2\theta\mu|\bar{C}|}{[\theta - J(1-\bar{C}^2)]^2}\, \chi^0(\theta,h) \le$$

$$\le \frac{2\theta\mu^3}{(\theta - J)^3} \equiv \tilde{L}_3(\theta-\theta_c) , \qquad (\theta > J = \theta_c)$$

откуда, с учетом свойства (4), при $h \ge 0$ следует:

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2}\left[M_N(\theta,h) - M^0(\theta,h) \right] \le \tilde{L}_3(\theta-\theta_c) , \qquad (44)$$

а при $h \le 0$:

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2}\left[M_N(\theta,h) - M^0(\theta,h) \right] \ge -\tilde{L}_3(\theta-\theta_c) . \qquad (45)$$

Применяя при $\theta > J$ лемму к последовательности $\{M_N(\theta,h) - M^0(\theta,h)\}$ на интервалах $h \in (-\infty, 0]$ и $h \in [0,\infty)$ по отдельности, находим:

$$|\chi_N(\theta,h) - \chi^0(\theta,h)| \le 4\sqrt[4]{2}\, \frac{\mu^2}{\theta} \left(\frac{J}{\theta}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{J}{\theta}\right)^{-7/4} \cdot N^{-1/8} \qquad (46)$$

при

$$|h| \ge \delta > 0 , \quad \theta > J , \qquad (47)$$

и

$$N > 512 \left(\frac{\theta}{\mu\delta}\right)^8 \left(\frac{J}{\theta}\right) \left(1 - \frac{J}{\theta}\right)^{10} . \qquad (48)$$

Автор благодарит профессора Н.Н.Боголюбова (мл.) за внимание к работе и ценные замечания, а также В.А.Загребнова за полезные обсуждения.

Литература:

1. И.Г.Бранков. ОИЯИ, Р4-6996, Дубна, 1973.
2. И.Г.Бранков, А.С.Шумовский. ОИЯИ, Р4-6899, Дубна, 1973.
3. R.B.Griffiths, C.A.Hurst, S.Sherman. J.Math.Phys. 11, 790, 1970.
4. R.B.Griffiths. J.Math.Phys., 5, 1215, 1964.
5. Н.Н.Боголюбов. ОИЯИ, Р-1451, Дубна, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 марта 1973 года.