

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



СЗУ1а  
Ф-855

4/11-

P4 - 6990

1998/2-73

С.Фрауендорф

ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В СОСТОЯНИЯХ  
С ВЫСОКИМ УГЛОВЫМ МОМЕНТОМ

**1973**

ЛАБОРАТОРИЯ  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 6990

С. Фраундорф

**ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В СОСТОЯНИЯХ  
С ВЫСОКИМ УГЛОВЫМ МОМЕНТОМ**

Доклад на XIII совещании по ядерной  
спектроскопии и структуре атомного ядра  
(Тбилиси, 1973 г.)

**Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА**

## Введение

В последнее время стало возможным наблюдать состояния с высоким угловым моментом основной вращательной полосы в четно-четных деформированных ядрах /1/. При этом отмечается интересное явление: момент инерции является многозначной функцией угловой частоты, т.е. кривая имеет S-образную форму (см. рис.: 1, II кривая). Угловая частота и момент инерции определяются, как в классической механике:

$$\frac{dE_l}{d\hat{l}} = \omega, \quad \hat{l}/\omega = \mathcal{J}, \quad (1)$$

где  $\hat{l} = \sqrt{l(l+1)}$ . Производная аппроксимируется конечными разностями между энергиями уровней полосы /1/

## 2. Вращательная энергия

В данной работе изучается поведение момента инерции как функции угловой частоты в модели принудительного вращения /2/. При этом учитывается влияние вра-

шения только на изменение энергетической щели, так называемое кориолис-антиспаривание (САР). Гамильтониан ядра в системе, вращающейся с частотой  $\omega$ , имеет вид /3/

$$H_{\omega} = H_{SP} + H_{pair} - \omega J_x, \quad (2)$$

$$H_{SP} = \sum_i (\epsilon_i - \lambda)(c_i^+ c_i + c_{\tilde{i}}^+ c_{\tilde{i}}), \quad (3)$$

$$H_{pair} = -GP^+P, \quad P^+ = \sum_i c_i^+ c_{\tilde{i}}^+. \quad (4)$$

Здесь  $i$  обозначает одночастичное состояние с энергией  $\epsilon_i$ ; состояние, сопряженное по времени относительно  $i$ , обозначим через  $\tilde{i}$ . Все суммы содержат только состояния с положительной проекцией углового момента на ось симметрии. Оператор  $J_x - x$  - компонента полного углового момента\*.

Для вычисления энергии в зависимости от энергетической щели  $\Delta$  определяется гамильтонианом парного поля

$$\tilde{H}_0(\Delta) = H_{SP} - \Delta(P^+ + P). \quad (5)$$

Волновая функция основного состояния  $|\psi_{\omega}(\Delta)\rangle$  получается, как собственная функция гамильтониана парного поля во внутренней системе:

\* Мы приводим все выражения только для одного типа нуклонов. Обобщение на случай с нейтронами и протонами очевидно.

$$\tilde{H}_{\omega}(\Delta) = \tilde{H}_0(\Delta) - \omega J_x, \quad (6)$$

где химический потенциал  $\lambda$  фиксируется с помощью условия (7) для среднего значения числа частиц.

$$\langle \psi_{\omega}(\Delta) | \hat{N} | \psi_{\omega}(\Delta) \rangle \approx \langle \psi_0(\Delta) | \hat{N} | \psi_0(\Delta) \rangle = N. \quad (7)$$

Как уже было отмечено, в этой работе изучается влияние вращения только на щель  $\Delta$ , поэтому при вычислении  $|\psi_{\omega}(\Delta)\rangle$  мы учитываем член  $\omega J_x$  лишь в первом порядке теории возмущения. Тогда среднее значение оператора  $J_x$  линейно по угловой частоте, что приводит к обычному выражению для момента инерции /3/:

$$\langle \psi_{\omega}(\Delta) | J_x | \psi_{\omega}(\Delta) \rangle = \omega \mathcal{J}(\Delta), \quad (8)$$

$$\mathcal{J}(\Delta) = \sum_{i < j} (u_i v_j - u_j v_i)^2 \frac{|j_{ij}^x|^2 + |j_{ij}^y|^2}{E_i + E_j},$$

где 
$$E_i = \sqrt{\Delta^2 + (\epsilon_i - \lambda)^2}, \quad u_i^2 = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{\epsilon_i - \lambda}{E_i} \right).$$

Энергия во внутренней системе есть среднее значение гамильтониана  $H_{\omega}$ . Чтобы получить ее, используем метод, предложенный в работе /3/.

Из того, что  $|\psi_{\omega}(\Delta)\rangle$  является приближенной собственной функцией парного гамильтониана  $\tilde{H}_{\omega}(\Delta)$ , следует:

$$\langle \psi_{\omega}(\Delta) | \tilde{H}_{\omega}(\Delta) | \frac{\partial \psi_{\omega}(\Delta)}{\partial \Delta} \rangle = 0,$$

$$\langle \psi_{\omega}(\Delta) | \tilde{H}_{\omega}(\Delta) | \frac{\partial \psi_{\omega}(\Delta)}{\partial \omega} \rangle = 0. \quad (9)$$

Первые производные полной энергии

$$E_{\omega}(\Delta) = \langle \psi_{\omega}(\Delta) | H_{\omega} | \psi_{\omega}(\Delta) \rangle$$

по  $\Delta$  и  $\omega$  получаются с помощью уравнений (8) и (9) в следующем виде:

$$\frac{\partial E_{\omega}(\Delta)}{\partial \Delta} = 2 \langle \psi_{\omega}(\Delta) | H_0 - \tilde{H}_0(\Delta) | \frac{\partial \psi_{\omega}(\Delta)}{\partial \Delta} \rangle, \quad (10)$$

$$\frac{\partial E_{\omega}(\Delta)}{\partial \omega} = 2 \langle \psi_{\omega}(\Delta) | H_0 - \tilde{H}_0(\Delta) | \frac{\partial \psi_{\omega}(\Delta)}{\partial \omega} \rangle - \omega \mathcal{J}(\Delta). \quad (11)$$

Вторая производная  $\frac{\partial^2 E_{\omega}(\Delta)}{\partial \omega \partial \Delta}$  не зависит от порядка дифференцирования, поэтому

$$2 \langle \psi_{\omega}(\Delta) | \frac{\partial \tilde{H}_0(\Delta)}{\partial \Delta} | \frac{\partial \psi_{\omega}(\Delta)}{\partial \omega} \rangle + \omega \frac{\partial \mathcal{J}(\Delta)}{\partial \Delta} = 0. \quad (12)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\omega}(\Delta) | \frac{\partial \tilde{H}_0(\Delta)}{\partial \Delta} | \psi_{\omega}(\Delta) \rangle - \langle \psi_0(\Delta) | \frac{\partial \tilde{H}_0(\Delta)}{\partial \Delta} | \psi_0(\Delta) \rangle &= \\ = -\frac{\omega^2}{2} \frac{\partial \mathcal{J}(\Delta)}{\partial \Delta}. \end{aligned} \quad (13)$$

Интегрируем уравнение (11):

$$\begin{aligned} E_{\omega}(\Delta) &= E_0(\Delta) - \frac{\omega^2}{2} \mathcal{J}(\Delta) \\ &+ \langle \psi_{\omega}(\Delta) | H_0 - \tilde{H}_0(\Delta) | \psi_{\omega}(\Delta) \rangle - \langle \psi_0(\Delta) | H_0 - \tilde{H}_0(\Delta) | \psi_0(\Delta) \rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

Из обычной факторизации среднего значения парного гамильтониана

$$\langle \psi_{\omega}(\Delta) | H_{pair} | \psi_{\omega}(\Delta) \rangle = -G \langle \psi_{\omega}(\Delta) | P^+ | \psi_{\omega}(\Delta) \rangle^2 \quad (15)$$

и соотношения (13) следует окончательное выражение для энергии:

$$\begin{aligned} E_{\omega}(\Delta) &= E_0(\Delta) - \frac{\omega^2}{2} \mathcal{J}(\Delta) \\ &+ \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial \mathcal{J}(\Delta)}{\partial \Delta} (\Delta - \langle \psi_0(\Delta) | P^+ | \psi_0(\Delta) \rangle) - \frac{\omega^4}{16} G \left( \frac{\partial \mathcal{J}(\Delta)}{\partial \Delta} \right)^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Из факторизации (15) сразу видно, что минимум энергии, который получается из уравнения (10), находится в точке самосогласования  $\Delta_{eq}$  /3/

$$\Delta_{eq} = G \langle \psi_{\omega}(\Delta_{eq}) | P^+ | \psi_{\omega}(\Delta_{eq}) \rangle \quad (17)$$

и что в этой точке удовлетворяется соотношение

$$\frac{\partial E_{\omega}(\Delta_{eq})}{\partial \omega} = -\omega \mathcal{J}(\Delta_{eq}). \quad (18)$$

### 3. Условия стабильности

Гамильтониан в лабораторной системе связан с гамильтонианом во внутренней системе следующим образом /3/:

$$H_I = H_{\omega} + \omega \hat{I}, \quad \omega = \hat{I} / \mathcal{J}. \quad (19)$$

С помощью уравнения (18) можно убедиться, что первая производная от энергии по  $\Delta$  обращается в нуль

в тех же самых точках  $\Delta_{e q}$  как в лабораторной системе, так и во внутренней системе, т.е. можно вычислить равновесное значение щели либо при заданном угловом моменте, либо при заданной частоте:

$$\left. \frac{\partial E_I(\Delta)}{\partial \Delta} \right|_{\Delta=\Delta_{e q}} = 0, \quad \left. \frac{\partial E_{\omega}(\Delta)}{\partial \Delta} \right|_{\Delta=\Delta_{e q}} = 0. \quad (20)$$

Определения угловой частоты (19) и момента инерции (18) совпадают с определениями, данными в уравнениях (1). Условия стабильности в лабораторной и во внутренней системе различаются:

$$\left. \frac{\partial^2 E_I(\Delta)}{\partial \Delta^2} \right|_{\Delta=\Delta_{e q}} > \left. \frac{\partial^2 E_{\omega}(\Delta)}{\partial \Delta^2} \right|_{\Delta=\Delta_{e q}} \quad (21)$$

Чтобы решить вопрос о том, имеет ли энергия как функция  $\Delta$  максимум или минимум, достаточно того факта, что функция  $E_{I;\omega}(\Delta)$  не имеет никаких полюсов и растет монотонно при больших значениях  $\Delta$ . В этом случае с уменьшением щели первая нулевая точка первой производной — это минимум, затем следует максимум, потом снова минимум и т.д.

Вопрос о стабильности очень важен, поэтому обсудим те два случая, которые показаны на рис. 1. Их

возникновение зависит от структуры одночастичного спектра. Этот вопрос рассмотрим позднее.

В первом случае (обозначенном на рис. 1 через 1) энергетическая щель и соответствующий момент инерции остаются однозначными функциями частоты  $\omega$  и области стабильности в лабораторной и внутренней системах совпадают. Во втором случае зависимость щели от частоты неоднозначная. Участок кривой  $AC$  между точкой перегиба  $A$  и точкой пересечения с осью  $\Delta = 0$  соответствует максимуму  $E_{\omega}(\Delta)$ , следовательно, решение во внутренней системе не является стабильным. В работе /4/ предполагается, что в точке перегиба происходит фазовый переход первого рода, т.е. энергетическая щель исчезает сразу и наблюдается скачок в моменте инерции, в результате чего некая область значений углового момента "запрещена". Нестабильность решения — следствие того, что точная энергия основного состояния при заданной частоте является однозначной функцией угловой частоты  $\omega$  /12/.

В связи с тем, что сохраняющейся величиной является угловой момент, а не угловая частота, нужно изучать условие стабильности в лабораторной системе. При заданном угловом моменте получается, что область  $AC$  остается стабильной. В связи с этим при увеличении углового момента энергетическая щель  $\Delta_{e q}$  движется по кривой  $II$  до точки  $C$  и далее по оси  $\Delta = 0$ , и

получается типичная многозначная зависимость момента инерции от угловой частоты (кривая II на рис. 1). Область "запрещенного" углового момента в работе /4/ является отрезком кривой II между точкой перегиба A и точкой B на рис. 1. Мы здесь подчеркнем, что многозначность момента как функции угловой частоты следует из того, что мы требуем сохранения углового момента (точнее, сохранения только его среднего значения).

#### 4. Сохранение числа частиц

Если изучается область, где исчезает энергетическая щель  $\Delta$ , то нужно обратить внимание на тот факт, что собственная функция парного гамильтониана  $|\psi_\omega(\Delta)\rangle$  (функция типа БКШ /3/) не является собственной функцией оператора числа частиц. Поэтому вместо  $|\psi_\omega(\Delta)\rangle$  используется функция  $P_N |\psi_\omega(\Delta)\rangle$ , т.е. функция типа БКШ, спроектированная по числу частиц /5/. При этом сохраняется зависимость коэффициентов  $u_i, v_i$  от энергетической щели, определяемая уравнением (8). Кроме того, считается, что флуктуации числа частиц прежде всего влияют на нулевую энергию  $E_0(\Delta)$ . Расчеты показывают, что типичная разность нулевых энергий  $E(\Delta)$  в соседних ядрах имеет порядок 10 Мэв, а разность кинетических энергий вращения  $-\frac{\omega^2}{2} \mathcal{J}(\Delta)$

при  $(\hbar\omega)^2 = 0,15$  Мэв и  $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\Delta=0)$  оказывается порядка 1-2 Мэв. Поэтому проектирование на пространство с данным числом частиц проводится только в члене  $E_0(\Delta)$ , т.е.

$$E_\omega^N(\Delta) = E_0^N(\Delta) - \frac{\omega^2}{2} \mathcal{J}(\Delta) + \frac{\omega^2}{2} (\Delta - \langle \psi_0(\Delta) | P_N | \psi_0(\Delta) \rangle) \frac{\partial \mathcal{J}(\Delta)}{\partial \Delta} - \frac{\omega^4}{16} G \left( \frac{\partial \mathcal{J}(\Delta)}{\partial \Delta} \right)^2, \quad (22)$$

где

$$E_0^N(\Delta) = \frac{\langle \psi_0(\Delta) | H_0 P_N | \psi_0(\Delta) \rangle}{\langle \psi_0(\Delta) | P_N | \psi_0(\Delta) \rangle} \quad (23)$$

Расчет величины (23) проведен по методу приближенного проектирования, предложенному в работе /5/.

Соотношения (1), (18), (19), (20), которые точно удовлетворяются в БКШ-приближении, в этом случае также выполняются с хорошей точностью.

#### 5. Численные расчеты

В численных расчетах использовались одночастичные волновые функции в потенциале Вудса-Саксона /6/. Константы парного взаимодействия были выбраны так, чтобы получились правильные разности масс четно-четных и нечетных ядер, т.е. константы  $P_n$  и  $P_p$  из работы /7/. Когда учитывается проектирование по числу частиц при заданной парной константе  $G$ ,  $P_n$  и  $P_p$  увеличиваются

приблизительно на 5% относительно значения, полученного без проектирования, а энергетическая щель увеличивается примерно на 20%.

Очень удобно искать нули первой производной энергии по  $\Delta_n$  и  $\Delta_p$  во внутренней системе, так как в этой системе возможно решать задачу для нейтронов и протонов отдельно (в лабораторной системе это не так). Таким образом, становится очевидным следующий эффект /11/: допустим, что имеется эффект перегиба в системе нейтронов, а в системе протонов щель изменяется обычным образом. С ростом углового момента после точки перегиба угловая частота уменьшается и, следовательно, протонная щель увеличивается до тех пор, пока опять не начинается рост угловой частоты и соответствующее уменьшение щели.

Расчеты были проведены для ядер редкоземельной области с параметрами деформации /6/

$$\beta_{20} = 0,28, \quad \beta_{40} = 0,02, \quad A = 165,$$

$$\beta_{20} = 0,30, \quad \beta_{40} = 0,02, \quad A = 173.$$

Эти расчеты показали, что возникает эффект перегиба в системе нейтронов при  $N = 90, 92, 94, 96$ ; при  $N \geq 98$  эффект исчезает. В системе протонов в области  $Z = 66-76$  щель остается однозначной функцией частоты. Этот результат совпадает с экспериментом: числа нейтронов во всех редкоземельных ядрах, в которых наблюдается эффект перегиба, имеют значения между

90 и 96 /1/. Особенно интересная ситуация имеет место в изотопах  $Yb$  и  $Hf$ , где для  $N = 96$  эффект существует, а для  $N = 98$  его уже нет.

В области  $N = 90-96$  уровни  $1/2^+$  и  $3/2^+$  из подоболочки  $i_{13/2}$  находятся вблизи поверхности Ферми. Поэтому кажется, что эффект перегиба связан с этими уровнями. Методические расчеты подтверждают это предположение: если уровень  $1/2^-$  или  $3/2^-$  из подоболочек  $h_{11/2}$ ,  $i_{13/2}$ ,  $j_{15/2}$  находится вблизи поверхности Ферми, то для такой системы нуклонов получается многозначная зависимость энергетической щели от угловой частоты и соответствующее поведение момента инерции.

Для предсказания чисел нуклонов, при которых можно ожидать аномальной зависимости момента инерции от угловой частоты, надо знать равновесную деформацию, потому что положение уровней  $1/2^-$  и  $3/2^-$  из подоболочек  $h_{11/2}$ ,  $i_{13/2}$ ,  $j_{15/2}$  сильно зависит от деформации. Используя результаты Струтинского /10/ об оболочках в деформированных ядрах (области с малой плотностью вблизи поверхности Ферми), можно предсказать области, где ядро имеет относительно стабильную равновесную деформацию и одновременно вышеуказанные уровни  $1/2^-$  и  $3/2^-$  находятся вблизи поверхности Ферми. В таблице приведены некоторые числа нуклонов, при которых можно ожидать аномального поведения момента инерции.



В качестве примера на рис. 2 приводится сравнение зависимости инерции от угловой частоты, полученной из наших расчетов и соответствующих экспериментальных данных. Результаты для других ядер аналогичны. Качественно воспроизводится экспериментальная кривая. Можно, однако, отметить некоторые недостатки нашей модели:

- Наклон кривой в точке  $\omega = 0$  пропорционален коэффициенту неадиабатичности  $B$  в разложении Бора-Моттельсона. Расчеты <sup>/8/</sup> показали, что при  $N \approx 90, 92$  большая часть этого коэффициента связана с влиянием вращения на равновесную деформацию, которое здесь не учитывалось.

- Существует разница между асимптотическим моментом инерции (т.е. значением при самом высоком спине, где момент приблизительно постоянен) в эксперименте и в наших расчетах. Нуклоны на указанных выше уровнях  $1/2$  и  $3/2$  дают большой вклад в асимптотический момент инерции. При изменении деформации с ростом углового момента положение этих уровней меняется и, следовательно, тоже меняется момент инерции. Второй эффект, предложенный в работах <sup>/9/</sup>, состоит в том, что пара нуклонов на этих уровнях разрывается, нуклоны переориентируются параллельно оси вращения и поэтому не дают вклада в момент инерции при большом угловом моменте.

В заключение можно сказать, что изучение эффекта

кориолис-антиспаривания позволяет понять качественно эффект перегиба: с ростом углового момента между  $I = 12$  и  $I = 18$  энергетическая щель так быстро уменьшается (и соответственно момент инерции увеличивается), что угловая частота в этой области уменьшается. Имея в виду сравнительно маленькое число частиц в ядре, можно называть это поведение фазовым переходом из сверхтекучего состояния в нормальное.

В тех случаях, когда энергетическая щель сравнительно плавно исчезает ( $N > 98$ ), не имеет смысла говорить о фазовом переходе. Наконец, надо отметить, что учет других эффектов, как, например, изменения равновесной деформации, может привести к слишком резкому изменению момента инерции <sup>/4/</sup>, которое тоже может вызывать аномальную зависимость момента инерции от угловой частоты. С другой стороны, смешивание между полосами с разными моментами инерции тоже может вызывать эффект перегиба <sup>/9/</sup>. Только подробные расчеты, в которых учитываются все выше-названные степени свободы, позволяют решить вопрос о том, какая из них дает самый важный вклад.

Автор выражает благодарность докторам Н.И.Пятову, Р.В.Джолосу и М.И.Чернею за полезное обсуждение результатов работы и ценные замечания и Д.Караджову за помощь в численных расчетах.

Литература

1. A.Johanson, Z.Szymanski. Nuclear Rotation at High Angular Momentum, preprint Stockholm, 1972.
2. D.R.Inglis. Phys. Rev., 103, 1786 (1956).
3. J.G.Valatin, K.Y.Chan. Nucl. Phys., 82, 222 (1960).
4. M.Sano, H.Wakai. Nucl. Phys., A190, 471 (1972).
5. I.N.Mikhailov. Acta Physica Polonica, XXIV, 419 (1963).
6. С.И.Габраков и др. Препринт ОИЯИ, Р4-5889, Дубна, 1971.
7. В.Г.Соловьев. Теория сложных ядер. Москва, 1971.
8. J.Krumlinde. Nucl. Phys., A121, 306(1968).
9. B.L.Birbrair. Phys. Lett., 39B, 489(1972), F.S.Stephens, R.Simon. Nucl. Phys., A183, 257 (1972).
10. V.M.Strutinsky. Nucl. Phys., A121, 1 (1968).
11. K.Kumar. Nuclear shapes, energy gaps and phase transitions, preprint, 1972.
12. R.A.Sorensen. Phys. Lett., 38B, 376(1972).

Рукопись поступила в издательский отдел  
12 марта 1973 года

Таблица 1

Числа нуклонов, при которых ожидается аномальная зависимость момента инерции от угловой частоты. Для системы нуклонов, в которой ожидается эффект, приведены квантовые числа подболочек, играющих основную роль

Число протонов	Число нейтронов	Экспериментальная информация
68	90-96 $i_{13/2}$	Существует ряд экспериментов /1/
58,60 $h_{11/2}$	72-76	Имеется один эксперимент /1/ $^{132}\text{Ce}$
90-94 $i_{13/2}$	148, 150 $i_{15/2}$	Нет экспериментов (трудности: спонтанное деление, $\alpha$ -распад)
66-72	116, 118 $i_{13/2} (\beta < 0)$	Нет экспериментов (нейтроноизбыточные ядра)
46, 48	58 $h_{11/2}$	Нет экспериментов

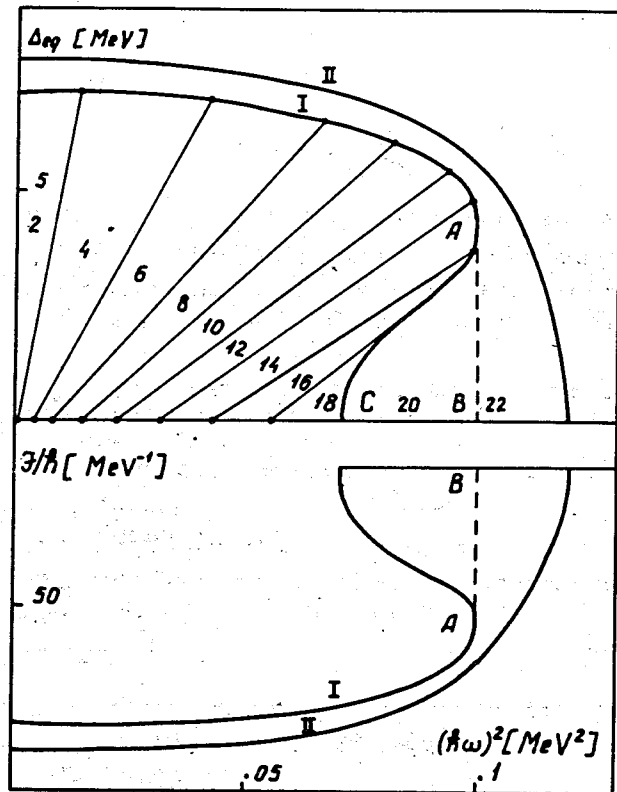


Рис. 1. Схематическая зависимость равновесной щели  $\Delta_{eq}$  и соответствующего момента инерции  $\mathcal{J}$  от угловой частоты  $\omega$ . Масштаб по оси абсцисс на обеих частях рисунка одинаков. Тонкие линии на верхнем рисунке связывают точки с одним и тем же угловым моментом на кривой II и на оси  $\Delta = 0$ . Случаи I и II обсуждаются в тексте.

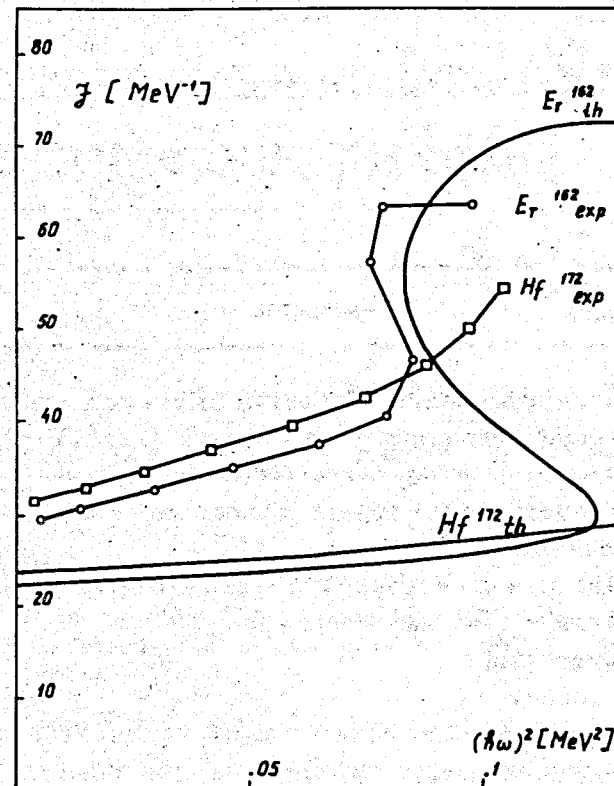


Рис. 2. Экспериментальная и вычисленная зависимость момента инерции  $\mathcal{J}$  от угловой частоты для  $^{162}\text{Er}$  и  $^{172}\text{Hf}$ . Экспериментальные данные из работы /1/. Параметры в расчете: потенциал Вудса-Саксона  $\beta_{20} = 0,3$ ,  $\beta_{40} = 0,02$ ,  $A = 173$ ; разности масс  $P(^{162}\text{Er}) = 1,0$  Мэв,  $P_p(^{162}\text{Er}) = 1,0$  Мэв,  $P_p(^{172}\text{Hf}) = 1,1$  Мэв,  $P_n(^{172}\text{Hf}) = 0,8$  Мэв. Константы  $P_p$  и  $P_n$  определяются с помощью формулы (4.50) в работе /7/.