СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 6899

И.Г.Бранков, А.С.Шумовский

К АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНО РЕШАЕМОЙ МОДЕЛИ ФЕРРОМАГНЕТИКА

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 6899

И.Г.Бранков, А.С.Шумовский

К АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНО РЕШАЕМОЙ МОДЕЛИ ФЕРРОМАГНЕТИКА

Бранков И.Г., Шумовский А.С., P4 - 6899

К асимптотически точно решаемой модели ферромагнетика

Рассматривается модельная система ферромагнитного типа. На основе мажорационной процедуры, прменявшейся ранее к моделям типа БКШ (Н.Н.Боголюбов(мл.),ИТФ-67-1, Киев, 1967), строятся математически строгие методы вычисления асимптотически точных выражений для свободной энергии, намагниченности, временных корреляционных функций и функций Грина.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1973

Brankov J.G., Shumovsky A.S. P4 - 6899

On the Asymptotically Accurately Soluble Ferromagnetic Model

A model system of ferromagnetic type is considered. Mathematically rigorous methods for calculation of asymptotically accurate expressions for free energy, time correlation functions and Green functions are developed on the basis of majoration procedures applied previously to the BCS model (N.N.Bogolubov (jun.),ITF-67-1,Kiev,1967).

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1973

Хорошо известно, что для описания поведения системы многих тел весьма удобен модельный подход, в котором учитываются не все особенности реальной системы, так как это привело бы к невероятному усложнению задачи, но только наиболее важные из них. При этом часто оказывается удобным рассматривать исследование модельного гамильтониана системы с наложенными на него дополнительными условиями в качестве вполне определённой математической задачи, решать которую следует строго, без привлечения "физических предположений" типа суммирования "главных членов" рядов теории возмущений, что приводит к отходу от математической строгости и может породить противоречивые результаты. Нетривиальным примером такой системы является модель Н.Н. Боголюбова–Бардина в теории сверхпроводимости, для которой было построено математически точное в пределе большой системы решение /I/.

В теории магнетизма, однако, даже такие упрощённые модели ферромагнетика, как модель Гейзенберга или трехмерная модель Изинга, являются неразрешимыми в указанном смысле. Тем не менее высказывалось мнение о существовании модельной системы ферромагнитного типа, для которой теория молекулярного поля даёт точный результат /2/. Такую модель можно получить, исходя из того, что в приближении молекулярного поля Вейса взаимодействие магнитного атома с его соседями заменяется некоторой средней величиной, взятой по всему кристаллу. Поэтому следует ожидать, что возможно точное решение для модели кристалла, в котором каждый атом связан с любым другим атомом постоянным обменным взаимодействием (с бесконечно слабой интенсивностью J/N и бесконечно большим радиусом взаимодействия $R \sim V^{1/3}$, где $V \to \infty$, $N \to \infty$, $N/V = const$ /3,4/).

Указанная модельная система для случая спина $S = 1/2$ описывается гамильтонианом

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\frac{J}{N}\sum_{f,g}\vec{\sigma}_f\vec{\sigma}_g \quad , \tag{I}$$

где σ^α $(\alpha = x, y, z)$ – обычные матрицы Паули.

В настоящей работе приведём строгое доказательство асимтотической близости свободных энергий, намагниченностей и корреляционных функций, построенных на основе гамильтониана (I) и соответствующего аппроксимирующего гамильтониана в теории молекулярного поля. При этом воспользуемся аналогией между задачей (I) и квазиспиновой моделью Тирринга /5/ и будем существенно опираться на математические методы, развитые в работах /6,7/. Отметим, что для простоты рассмотрения мы выбрали метод доказательства, основанный на включении в гамильтониан членов с внешними полями, снимающими вырождение состояния статистического равновесия системы, хотя доказательство можно провести и не нарушая инвариантные свойства модельного гамильтониана, на основе нового метода определения квазисредних, предложенного в работе /8/.

Очевидно, вырождение состояния статистического равновесия изотропной системы (I) по отношению к группе вращения спинов можно снять, включив внешнее магнитное поле:

$$h^\alpha = h n^\alpha \quad , \quad \sum_{\alpha=1}^{3}(n^\alpha)^2 = 1 . \tag{2}$$

Будем рассматривать задачу с гамильтонианом

$$\Gamma = -\frac{1}{2}\frac{J}{N}\sum_{f,g}\vec{\sigma}_f\vec{\sigma}_g - \mu h\sum_f \vec{\sigma}_f\vec{n} . \tag{3}$$

Введём для удобства следующие операторы:

$$I_\alpha = \frac{1}{N}\sum_f \sigma_f^\alpha \quad , \quad \overset{+}{I}_\alpha = I_\alpha \tag{4}$$

и перепишем гамильтониан (3) в новых обозначениях:

$$\Gamma = -\frac{1}{2}JN\sum_{\alpha=1}^{3} I_\alpha^2 - \mu N\sum_{\alpha=1}^{3} h^\alpha I_\alpha \quad . \tag{5}$$

Далее, следуя общему методу /6/, представим гамильтониан (5) тождественным образом в виде суммы:

$$\Gamma = \Gamma_0 + \tilde{\mathcal{H}} \; , \tag{6}$$

где "аппроксимирующий" гамильтониан Γ_0 линеен по операторам I_α,

$$\Gamma_0 = -N\sum_{\alpha=1}^{3}(JC_\alpha + \mu h_\alpha)I_\alpha + \frac{1}{2}JN\sum_{\alpha=1}^{3}C_\alpha^2 , \tag{7}$$

и $\tilde{\mathcal{H}}$ есть:

$$\tilde{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2}JN\sum_{\alpha=1}^{3}(I_\alpha - C_\alpha)^2 . \tag{8}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу с гамильтонианом Γ_t, зависящим от вещественного параметра t:

$$\Gamma_t = \Gamma_0 + t\widetilde{\mathcal{H}} \quad , \quad 0 \le t \le 1 . \tag{9}$$

Введём свободную энергию для системы Γ_t в расчёте на одну "частицу",

$$f_{\Gamma_t} = -\frac{\theta}{N} \ln Sp\, e^{-\frac{\Gamma_t}{\theta}} , \tag{10}$$

и вычислим первую и вторую производные функции f_{Γ_t} по параметру t. Имеем:

$$\frac{\partial f_{\Gamma_t}}{\partial t} = \frac{1}{N} \langle \widetilde{\mathcal{H}} \rangle_{\Gamma_t} , \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 f_{\Gamma_t}}{\partial t^2} \le 0 . \tag{12}$$

В силу условия (12) справедливы неравенства

$$0 \le -\frac{1}{N} \langle \widetilde{\mathcal{H}} \rangle_{\Gamma_0} \le -\frac{\partial f_{\Gamma_t}}{\partial t} \le -\frac{1}{N} \langle \widetilde{\mathcal{H}} \rangle_{\Gamma} . \tag{13}$$

Проинтегрируем теперь (13) по параметру t в пределах от 0 до 1. Учитывая явное выражение для оператора $\widetilde{\mathcal{H}}$, находим:

$$0 \le f_{\Gamma_0}(C) - f_{\Gamma} \le \frac{1}{2} J \Big\langle \sum_{\alpha=1}^{3} (I_\alpha - C_\alpha)^2 \Big\rangle_{\Gamma} , \tag{14}$$

где f_Γ и $f_{\Gamma_0}(C)$ – свободные энергии, построенные на основе гамильтонианов (5) и (7) соответственно.

Из неравенств (14) видно, что наилучшую аппроксимацию для f_Γ можно получить, выбирая абсолютный минимум функции $f_{\Gamma_0}(C)$. В точке минимума имеем

$$\frac{\partial f_{\Gamma_0}(C)}{\partial C_\alpha} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f_{\Gamma_0}(C)}{\partial C_\alpha^2} \ge 0 . \tag{15}$$

Для простоты записи введём обозначение:

$$f_{\Gamma_0} = \min_{(C)} f_{\Gamma_0}(C) .$$

Нетрудно видеть, что условия (15) приводят к уравнениям молекулярного поля:

$$C_\alpha = \langle I_\alpha \rangle_{\Gamma_0} , \tag{16}$$

или в явном виде:

$$C_\alpha = \frac{JC_\alpha + \mu h n^\alpha}{E} \, th \frac{E}{\theta} , \tag{17}$$

где

$$E = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3} (JC_\alpha + \mu h n^\alpha)^2} . \tag{18}$$

Решения уравнений (17), очевидно, имеют вид

$$C_\alpha = C n_\alpha , \tag{19}$$

где C определяется из уравнения

$$C = th \frac{JC + \mu h}{\theta} . \tag{20}$$

Заметим теперь, что из определения (4) и выбора гамильтониана Γ в виде (5) следует выполнение условий

$$\| I_\alpha \| \le 1 \quad , \quad \| [I_\alpha , I_\beta]_- \| \le \frac{2}{N} ,$$

$$\| [\Gamma, I_\alpha]_- \| \le 2\mu \sum_{\alpha=1}^{3} |h^\alpha| , \tag{21}$$

где $\| \cdots \|$ означает оценку по норме.

На основе результатов работы [7] нетрудно показать, что для свободной энергии f_Γ системы (5) при выполнении условий (21) имеет место оценка

$$0 \leq f_{\Gamma_0} - f_\Gamma \leq \varepsilon_N \ , \tag{22}$$

где $\varepsilon_N \to 0$ при $N \to \infty$ равномерно по отношению к температуре θ и внешнему полю $\vec{h}$.

Остановимся вкратце на основных положениях доказательства и приведём явный вид для оценки в правой части неравенства (22).

Вернёмся к рассмотрению неравенства (14). Отметим, что оно справедливо для любых C_α, в частности и для $C_\alpha = \langle I_\alpha \rangle_\Gamma$:

$$0 \leq f_{\Gamma_0} - f_\Gamma \leq \frac{1}{2} J \langle \sum_{\alpha=1}^{3} (I_\alpha - \langle I_\alpha \rangle_\Gamma)^2 \rangle_\Gamma \ , \tag{23}$$

где f_{Γ_0} представляет собой наименьшее значение функции $f_{\Gamma_0}(C)$.

Корреляционное среднее в правой части неравенства (23) путём известных формальных преобразований [7] нетрудно оценить через вторые производные от свободной энергии f_Γ по внешнему полю h^α:

$$0 \leq f_{\Gamma_0} - f_\Gamma \leq \frac{1}{2} J \langle \sum_{\alpha=1}^{3} (I_\alpha - \langle I_\alpha \rangle_\Gamma)^2 \rangle_\Gamma \leq$$

$$\leq \frac{J\theta}{2\mu^2 N} \sum_{\alpha=1}^{3} \left(-\frac{\partial^2 f_\Gamma}{\partial h_\alpha^2}\right) + J\left(\frac{\sqrt{2}\sum_\beta |h^\beta|}{\mu N}\right)^{2/3} \left(-\frac{\partial^2 f_\Gamma}{\partial h_\alpha^2}\right) , \tag{24}$$

причём

$$-\frac{\partial^2 f_\Gamma}{\partial h_\alpha^2} \geq 0 \ . \tag{25}$$

Если бы мы располагали сведениями об ограниченности вторых производных $\partial^2 f_\Gamma / \partial h_\alpha^2$, имеющих смысл магнитной восприимчивости, наша задача была бы решена. Мы, однако, можем показать ограниченность только первой производной (намагниченности):

$$\left| \frac{\partial f_\Gamma}{\partial h_\alpha} \right| \leq \mu \left| \langle I_\alpha \rangle_\Gamma \right| \leq \mu \ . \tag{26}$$

Более того, в точке фазового перехода $\theta = \theta_c$ (в нашем случае $\theta_c = J$) производная $\left.\frac{\partial^2 f_\Gamma}{\partial h_\alpha^2}\right|_{h\to 0}$ заведомо не ограничена. Поэтому нам придётся воспользоваться следующим приёмом.

Введём обозначение:

$$\Delta(\vec{h}) = f_{\Gamma_0} - f_\Gamma \ . \tag{27}$$

С учётом оценки (26) имеем:

$$|\Delta(\vec{h})| \leq \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\max\left|\frac{\partial \Delta}{\partial h_\alpha}\right| |h_\alpha - \xi_\alpha|\right) + |\Delta(\vec{\xi})| \leq$$

$$\leq 12\mu\ell + |\Delta(\vec{\xi})| \ , \tag{28}$$

где

$$h_\alpha + \ell \leq \xi_\alpha \leq h_\alpha + 2\ell \tag{29}$$

и ℓ –произвольное. Для оценки величины $|\Delta(\vec{\xi})|$ применим теорему о среднем:

$$\Delta(\vec{\xi}) = \frac{1}{\ell^3} \iiint_{h_\alpha+\ell}^{h_\alpha+2\ell} \Delta(\vec{h})\, d\vec{h} \ . \tag{30}$$

Если теперь проинтегрировать неравенство (24) по $\vec{h}$ в пределах (29) с учётом того, что

$$\frac{1}{\ell^3} \iiint d\vec{h} \left(-\frac{\partial^2 f_\Gamma}{\partial h_\alpha^2}\right) \leq \frac{2\mu}{\ell} \ ,$$

$$\frac{1}{\ell^3} \iiint d\vec{h} \left(-\frac{\partial^2 f_\Gamma}{\partial h_\alpha^2}\right)^{2/3} \leq \left(\frac{2\mu}{\ell}\right)^{2/3} , \tag{31}$$

получаем:

$$|\Delta(\vec{\xi})| \le \frac{3J\theta}{\mu}\frac{1}{\ell N} + 6J\left(\frac{\sum|h^\alpha|}{\ell N}\right)^{2/3}. \tag{32}$$

Так как в выражении (32) ℓ имеет произвольное положительное значение, выберем

$$\ell = \frac{J}{\mu N^{2/5}} \tag{33}$$

и, используя (27), (28),(32), окончательно найдём

$$0 \le f_{\Gamma_0} - f_\Gamma \le \varepsilon_N ,$$

где

$$\varepsilon_N = \frac{3\theta}{N^{3/5}} + \frac{12J + 6J^{1/3}\left(\mu\sum_{\alpha=1}^{3}|h^\alpha|\right)^{2/3}}{N^{2/5}} . \tag{34}$$

Таким образом, мы показали, что на замкнутом множестве:

$$|\vec{h}| \le h_0 , \quad 0 \le \theta \le \theta_0 , \tag{35}$$

свободная энергия системы (3) $f_\Gamma(\vec{h})$ равномерно по внешнему полю $\vec{h}$ и температуре θ сходится при $N \to \infty$ к свободной энергии $f_{\Gamma_0}(\vec{h})$:

$$f_{\Gamma_0}(\vec{h}) = \frac{1}{2}JC^2 - \theta \ln 2ch\frac{JC+\mu h}{\theta} , \tag{36}$$

где $C = C(h)$ – решение уравнения (20), реализующее абсолютный минимум функции (36).

Рассмотрим теперь вопрос о близости корреляционных функций и намагниченностей для модельного и аппроксимирующего гамильтониана. Для простейшей модели типа БКШ аналогичное рассмотрение проводилось

в работе[6]. Теперь мы обобщим метод этой работы на случай модельного гамильтониана типа (5).

Установим сначала "близость" средних значений $\langle I_\alpha\rangle_\Gamma$ к величинам $C_\alpha = \langle I_\alpha\rangle_{\Gamma_0}$ и покажем асимптотическую малость среднего

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\left\langle\left(I_\alpha - \langle I_\alpha\rangle_{\Gamma_0}\right)^2\right\rangle_\Gamma . \tag{37}$$

Для этого видоизменим гамильтониан (5), вводя для удобства параметр g $(0<g\le 1)$, характеризующий интенсивность взаимодействия, т.е. сделаем замену $J \to gJ$ (в окончательных выражениях мы положим $g=1$):

$$\Gamma = -\frac{1}{2}gJN\sum_{\alpha=1}^{3}I_\alpha^2 - \mu N\sum_{\alpha=1}^{3}h_\alpha I_\alpha . \tag{38}$$

Тогда

$$\Gamma_0 = -N\sum_{\alpha=1}^{3}(gJC_\alpha + \mu h_\alpha)I_\alpha + \frac{1}{2}gJN\sum_{\alpha=1}^{3}C_\alpha^2 . \tag{39}$$

Здесь по-прежнему

$$C_\alpha = C n^\alpha ,$$

и C теперь есть решение уравнения

$$C = th\frac{E}{\theta} , \tag{40}$$

где

$$E = gJC + \mu h . \tag{41}$$

Нетрудно получить следующие выражения:

$$\frac{\partial f_{\Gamma_0}}{\partial h_\alpha} = -\mu C_\alpha \quad , \quad \frac{\partial f_\Gamma}{\partial h_\alpha} = -\mu \langle I_\alpha \rangle_\Gamma \tag{42}$$

и

$$\frac{\partial f_{\Gamma_0}}{\partial g} = -\frac{1}{2} J \sum_{\alpha=1}^{3} C_\alpha^2 = -\frac{1}{2} J C^2,$$
$$\frac{\partial f_\Gamma}{\partial g} = -\frac{1}{2} J \sum_{\alpha=1}^{3} \langle I_\alpha^2 \rangle_\Gamma . \tag{43}$$

Тогда, очевидно,

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \langle (I_\alpha - C_\alpha)^2 \rangle_\Gamma = \frac{2}{J} \frac{\partial \Delta}{\partial g} - \frac{2}{\mu} \sum_{\alpha=1}^{3} C_\alpha \frac{\partial \Delta}{\partial h_\alpha} . \tag{44}$$

Оценим величину производных в правой части соотношения (44). Прежде всего заметим, что из неравенств

$$\frac{\partial^2 f_\Gamma}{\partial g^2} \le 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f_\Gamma}{\partial h_\alpha^2} \le 0 \tag{45}$$

следует

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial g^2} \ge \frac{\partial^2 f_{\Gamma_0}}{\partial g^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 \Delta}{\partial h_\alpha^2} \ge \frac{\partial^2 f_{\Gamma_0}}{\partial h_\alpha^2} . \tag{46}$$

Производя дифференцирование правой части неравенства (46) с учётом уравнения (40), служащего определением C , получаем

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial g^2} \ge - D_g(\delta) ,$$
$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial h_\alpha^2} \ge - D_h(\delta) , \tag{47}$$

где

$$D_g(\delta) = \frac{J^2}{\mu\delta} \quad , \quad D_h(\delta) = \frac{\mu}{\delta}$$

для всех $h \ge \delta > 0$.

Теперь, применяя лемму работы [6], находим следующие оценки:

$$\left| \frac{\partial \Delta}{\partial g} \right| \le 2\sqrt{2\varepsilon_N D_g(\delta)} = 2\sqrt{\frac{2J^2\varepsilon_N}{\mu\delta}}$$

и

$$\left| \frac{\partial \Delta}{\partial h_\alpha} \right| \le 2\sqrt{2\varepsilon_N D_h(\delta)} = 2\sqrt{\frac{2\mu\varepsilon_N}{\delta}} . \tag{48}$$

Оценка (48) указывает на неравномерную по полю сходимость (при $N \to \infty$) в окрестности точки $|\vec{h}| = 0$ намагниченности модельной системы (3) $\vec{M}_N(\vec{h})$ к намагниченности в приближении молекулярного поля $\vec{M}_0(\vec{h})$.

Так, при любом $h \ge \delta > 0$ из (48) имеем:

$$\left| \vec{M}_N(\vec{h}) - \vec{M}_0(\vec{h}) \right| \sim \frac{const.}{N^{1/5}} .$$

Однако из симметрии гамильтониана (3) следует, что непрерывная по полю и температуре, при любом конечном N , функция $\vec{M}_N(\vec{h})$ обращается в нуль при $h \to 0$ для всех температур. Т.е. при $h = 0$ и $\theta < \theta_c$ получаем конечный скачок:

$$\left| \vec{M}_N(0) - \vec{M}_0(0) \right| = \left| \vec{M}_0(0) \right| > 0 ,$$

определяющий неравномерную сходимость $\vec{M}_N(\vec{h})$ к $\vec{M}_0(\vec{h})$ на $h \in [\delta, 0)$.

Возвращаясь к соотношению (44), мы получаем неравенство:

$$\left| \sum_{\alpha=1}^{3} \langle (I_\alpha - C_\alpha)^2 \rangle_\Gamma \right| \le 16 \sqrt{\frac{2\varepsilon_N}{\mu\delta}} \quad , \quad h \ge \delta > 0 . \tag{49}$$

Следует особо указать на то, что для оценок (48) и (49) существенно важным является порядок совершения предельных переходов. Согласно определению квазисредних /9/ сначала должен осуществляться обычный предельный переход статистической физики $N \to \infty$, а потом рассматривается предел при $\vec{h} \to 0$.

Как было недавно показано /I0/, произвольный выбор параметров, снимающих вырождение, может привести к отсутствию предела в определении квазисреднего. Для того, чтобы избежать подобного рода трудности, в /I0/ предлагался новый способ введения таких параметров, приводящий к ренормировке исходного гамильтониана. В нашем случае, так как $\vec{h} \parallel \vec{C}$ (I9), подобный выбор параметров происходит автоматически и вопрос об отсутствии предела при $h \to 0$ в определении квазисреднего не возникает.

Заметив далее, что оценка, аналогичная (49), имеет место и для операторов:

$$I^{\pm} = \frac{1}{2}(I^{x} \pm i I^{y}). \tag{50}$$

Действительно, вводя соответствующие константы

$$C^{\pm} = \frac{1}{2}(C^{x} \pm i C^{y}), \tag{5I}$$

с учётом (49) и (2I) находим:

$$\left|\langle (I^{\pm} - C^{\pm})(I^{\mp} - C^{\mp})\rangle_{\Gamma}\right| \le 8\sqrt{\frac{2\varepsilon_N}{\mu\delta}} + \frac{1}{2N}, \quad h \ge \delta > 0. \tag{52}$$

Воспользуемся независимостью оценок (34), (49) и (52) от выбора n_α $(\sum_\alpha n_\alpha^2 = 1)$ и для удобства проведём дальнейшее рассмотрение в системе координат, где

$$\vec{n} = \{0, 0, 1\},$$

т.е. выберем ось z по направлению внешнего магнитного поля. Очевидно, при таком выборе $C^{\pm} = 0$.

Введём операторы в гейзенберговском представлении $\sigma^{\pm}(t)$ и $\tilde{\sigma}^{\pm}(t)$, удовлетворяющие уравнениям движения по гамильтониану Γ и Γ_0 соответственно:

$$i\frac{d}{dt}\sigma_p^{\mp} \pm \varepsilon\sigma_p^{\mp} = R_p^{\mp}, \tag{53}$$

где
$$R_p^{-} = (R_p^{+})^{+} = R_p^{(1)} + R_p^{(2)},$$
$$R_p^{(1)} = J\left[\sigma_p^{z} I^{-} + I^{-}\sigma_p^{z}\right],$$
$$R_p^{(2)} = -J\left[\sigma_p^{-}(I_z - C) + (I_z - C)\sigma_p^{-}\right] \tag{54}$$

и

$$i\frac{d}{dt}\tilde{\sigma}_p^{\mp} \pm \varepsilon\tilde{\sigma}_p^{\mp} = 0, \tag{55}$$

причём
$$\varepsilon = 2(JC + \mu h).$$

Очевидно, разности этих операторов:

$$\Delta_p^{\pm} = \sigma_p^{\pm} - \tilde{\sigma}_p^{\pm}, \tag{56}$$

удовлетворяют уравнениям (53) с начальными условиями

$$\Delta_p^{\pm}(0) = 0. \tag{57}$$

Легко проверить, что решениями уравнений (53) с начальными условиями (57) будут операторные выражения

$$\Delta_p^{\pm}(t) = \pm i e^{\mp i\varepsilon t} \int_0^t e^{\pm i\varepsilon t'} R_p^{\pm}(t')dt' . \tag{58}$$

С учётом неравенства Н.Н. Боголюбова/9/

$$|\langle AB\rangle| \le \sqrt{|\langle AA^{+}\rangle||\langle B^{+}B\rangle|}$$

и оценок (49), (52) имеем:

$$|\langle \Delta_p^{-}(t)\Delta_p^{+}(t)\rangle_{\Gamma}| \le \int_0^t\int_0^t |\langle R_p^{-}(t_1)R_p^{+}(t_2)\rangle_{\Gamma}|\, dt_1 dt_2 \le$$

$$\le \int_0^t\int_0^t \sqrt{|\langle R_p^{-}(t_1)R_p^{+}(t_1)\rangle||\langle R_p^{-}(t_2)R_p^{+}(t_2)\rangle|}\, dt_1 dt_2 \le \delta_N(h)t^2 , \tag{59}$$

где

$$\delta_N(h) \underset{N\to\infty}{\to} 0 \quad , \; h > 0 .$$

С помощью оценки (59) легко доказать асимптотическую близость временных корреляционных функций, построенных на основе исходного (5) и аппроксимирующего (7) гамильтонианов. Продемонстрируем это на простом примере функций типа $\langle \sigma_p^{-}(t)\sigma_p^{+}(\tau)\rangle_{\Gamma}$ и покажем прежде всего близость $\langle \tilde\sigma_p^{-}(t)\tilde\sigma_p^{+}(0)\rangle_{\Gamma}$ к $\langle \sigma_p^{-}(t)\sigma^{+}(0)\rangle_{\Gamma}$ ..

Имеем:

$$|\langle \sigma_p^{-}(t)\sigma_p^{+}(0)\rangle_{\Gamma} - \langle \tilde\sigma_p^{-}(t)\tilde\sigma_p^{+}(0)\rangle_{\Gamma}| =$$

$$= |\langle \sigma_p^{-}(t)\sigma_p^{+}(0)\rangle_{\Gamma} - \langle (\sigma_p^{-}(t) - \Delta_p^{-}(t))\sigma_p^{+}(0)\rangle_{\Gamma}| \le$$

$$\le |\langle \Delta_p^{-}(t)\sigma_p^{+}(0)\rangle_{\Gamma}| \le \sqrt{|\langle \Delta_p^{-}(t)\Delta_p^{+}(t)\rangle||\langle \sigma_p^{-}(0)\sigma_p^{+}(0)\rangle|} \le$$

$$\le \sqrt{\delta_N(h)}\, |t| ,$$

$$\langle \tilde\sigma_p^{-}(t)\tilde\sigma_p^{+}(0)\rangle_{\Gamma} = e^{i\varepsilon t}\langle \sigma_p^{-}(0)\sigma_p^{+}(0)\rangle_{\Gamma} ,$$

откуда

$$|\langle \sigma_p^{-}(t)\sigma_p^{+}(0)\rangle_{\Gamma} - e^{i\varepsilon t}\langle \sigma_p^{-}(0)\sigma_p^{+}(0)\rangle_{\Gamma}| \le \sqrt{\delta_N(h)}\, |t| . \tag{60}$$

Аналогично доказывается неравенство

$$|\langle \sigma_p^{+}(t)\sigma_p^{-}(0)\rangle_{\Gamma} - e^{-i\varepsilon t}\langle \sigma_p^{+}(0)\sigma_p^{-}(0)\rangle_{\Gamma}| \le \sqrt{\delta_N(h)}\, |t| . \tag{61}$$

Рассмотрим теперь вопрос о близости корреляционных функций $\langle \sigma_p^{-}(t)\sigma_p^{+}(0)\rangle_{\Gamma}$ и $\langle \sigma_p^{-}(t)\sigma_p^{+}(0)\rangle_{\Gamma_0}$.

Введём спектральные представления:

$$\langle \sigma_p^{-}(t)\sigma_p^{+}(0)\rangle_{\Gamma} = \int_{-\infty}^{\infty} J(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega . \tag{62}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию/9/:

$$\varphi_\rho(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{1}{\rho}\,\Phi\left(\frac{\omega-\varepsilon}{\rho}\right)\right\} e^{-i\omega t}\, d\omega , \tag{63}$$

где

$$\Phi(z) = \begin{cases} (1-z^2)^2 , & |z| < 1 , \\ 0 , & |z| \ge 1 . \end{cases} \tag{64}$$

Соотношение, обратное (63), имеет вид:

$$\frac{1}{\rho}\,\Phi\left(\frac{\omega-\varepsilon}{\rho}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\rho(t)\, e^{i\omega t}\, dt . \tag{65}$$

Умножая теперь неравенство (60) и (6I) на $|\varphi_\rho(t)|$ и интегрируя по t в бесконечных пределах, найдём:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}(\omega)\,\Phi\left(\frac{\omega-\varepsilon}{\rho}\right)d\omega - \langle \sigma_p^-(0)\,\sigma_p^+(0)\rangle_\Gamma\right| \le$$

$$\le \rho\sqrt{\delta_N(h)}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_\rho(t)||t|\,dt\,, \qquad (66)$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}(\omega)\,e^{\frac{\omega}{\theta}}\,\Phi\left(\frac{\omega-\varepsilon}{\rho}\right)d\omega - \langle \sigma_p^+(0)\,\sigma_p^-(0)\rangle_\Gamma\right| \le$$

$$\le \rho\sqrt{\delta_N(h)}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi_\rho(t)||t|\,dt\,. \qquad (67)$$

Оценивая интеграл в правой части выражений (66), (67), находим:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}(\omega)\,\Phi\left(\frac{\omega-\varepsilon}{\rho}\right)d\omega - \langle \sigma_p^-(0)\sigma_p^+(0)\rangle_\Gamma\right| \le \frac{1}{\rho}\sqrt{\delta_N(h)}\,B_1\,,$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}(\omega)\,e^{\frac{\omega}{\theta}}\,\Phi\left(\frac{\omega-\varepsilon}{\rho}\right)d\omega - \langle \sigma_p^+(0)\sigma_p^-(0)\rangle_\Gamma\right| \le \frac{1}{\rho}\sqrt{\delta_N(h)}\,B_1\,, \qquad (68)$$

где

$$B_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dy\left|\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\Phi(x)\,e^{-iyx}\right|. \qquad (69)$$

Заметим, что функция $\Phi\left(\frac{\omega-\varepsilon}{\rho}\right)$ отлична от нуля только в области $\varepsilon-\rho<\omega<\varepsilon+\rho$, и применим теорему о среднем к интегралу неравенства (69):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}(\omega)\,e^{\frac{\omega}{\theta}}\,\Phi\left(\frac{\omega-\varepsilon}{\rho}\right)d\omega = e^{\frac{\varepsilon+\xi\rho}{\theta}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}(\omega)\,\Phi\left(\frac{\omega-\varepsilon}{\rho}\right)d\omega\,, \qquad (70)$$

здесь $|\xi|\le 1$.

С учётом соотношения (70) неравенства (68), (69) могут быть представлены следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}(\omega)\,\Phi\left(\frac{\omega-\varepsilon}{\rho}\right)d\omega = \langle \sigma_p^-(0)\,\sigma_p^+(0)\rangle_\Gamma + \frac{\eta_1}{\rho}\,,$$

$$e^{\frac{\varepsilon+\xi\rho}{\theta}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{J}(\omega)\,\Phi\left(\frac{\omega-\varepsilon}{\rho}\right)d\omega = \langle \sigma_p^+(0)\,\sigma_p^-(0)\rangle_\Gamma + \frac{\eta_2}{\rho}\,, \qquad (7I)$$

где

$$|\eta_{1,2}| \le \sqrt{\delta_N(h)}\,B_1\,.$$

Отсюда имеем:

$$\langle \sigma_p^\mp(0)\sigma_p^\pm(0)\rangle_\Gamma = \frac{1}{1+e^{\pm\frac{\varepsilon+\xi\rho}{\theta}}} \pm \frac{1}{\rho}\,\frac{\eta_2-\eta_1 e^{\frac{\varepsilon+\xi\rho}{\theta}}}{1+e^{\frac{\varepsilon+\xi\rho}{\theta}}}\,. \qquad (72)$$

В силу произвольности ρ положим $\rho=\sqrt[4]{\delta_N(h)}$ и учтём, что $\rho\to 0$ и $\eta_{1,2}/\rho\to 0$ при $N\to\infty$, $h>0$. Поэтому (72) можно переписать в виде

$$\langle \sigma_p^\mp(0)\,\sigma_p^\pm(0)\rangle_\Gamma = \frac{1}{1+e^{\pm\frac{\varepsilon}{\theta}}} \pm \gamma\left(\frac{1}{N},h\right), \qquad (73)$$

причём функция

$$\gamma\left(\frac{1}{N},h\right)\underset{N\to\infty}{\to} 0\,, \quad h>0\,.$$

С другой стороны, путём непосредственных вычислений легко получить:

$$\langle \sigma_p^\mp(0)\,\sigma_p^\pm(0)\rangle_{\Gamma_0} = \frac{1}{1+e^{\pm\frac{\varepsilon}{\theta}}}\,. \qquad (74)$$

Теперь из выражений (73), (74), (60), (6I) получаем окончательную оценку:

$$\left|\langle \sigma_p^\mp(t)\,\sigma_p^\pm(\tau)\rangle_\Gamma - \langle \sigma_p^\mp(t)\sigma_p^\pm(\tau)\rangle_{\Gamma_0}\right| \le \sqrt{\delta_N(h)}\,|t-\tau| + \gamma\left(\frac{1}{N},h\right). \qquad (75)$$

Таким образом, мы показали, что в пределе большой системы $(N \to \infty)$ простейшие двухвременные корреляционные функции для гамильтониана (5) совпадают с корреляционными функциями, вычисленными по приближенному гамильтониану (7). Следует заметить, что проведённое здесь доказательство может быть обобщено на случай произвольных $\langle A(t)B(\tau)\rangle$, где A, B - произведения конечного числа операторов Паули σ_p^-, σ_p^+. Более того, аналогичное рассмотрение может быть проведено в общем случае S -временных корреляционных функций

$$\langle A_1(t_1)A_2(t_2)\ldots A_s(t_s)\rangle .$$

Запишем далее, что из неравенств (75) легко могут быть построены оценки для соответствующих функций Грина.

Авторы считают приятным долгом поблагодарить Н.Н. Боголюбова (мл.) за внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. Н.Н. Боголюбов. ОИЯИ, Р-511, Дубна, 1960.
2. F.Bitter. Introduction to Ferromagnetism, New York, 1937.
3. R.Brout. Statistical Mechanics of Ferromagnetism in Magnetism II A, New York, 1965.
4. G.Scharf. Phys.Letters, 38A, 123, 1972.
5. W.Thirring. Comm.Math.Phys., 7, 181, 1968.
6. Н.Н. Боголюбов (мл.). ИТФ-67-1, Киев, 1967.
7. А.С. Шумовский. ИТФ-71-56Р, Киев, 1971.
8. Н.Н. Боголюбов (мл.). ИТФ-71-126Р, Киев, 1971.
9. Н.Н. Боголюбов. ОИЯИ, Р-1451, Дубна, 1963.
10. Н.Н. Боголюбов (мл.). ТМФ, 5, 136, 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 января 1973 г.