СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р4 - 6681

В.К.Игнатович

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УЛЬТРАХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ С ТЕПЛОВЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ОТРАЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

ЛАБОРАТОРИЯ НЕЙТРОННОЙ ФИЗИКИ

1972

P4 - 6681

В.К.Игнатович

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УЛЬТРАХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ С ТЕПЛОВЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ОТРАЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Согласно экспериментам [1], время хранения нейтрона в сосуде оказывается в некоторых случаях примерно на порядок меньше того, которое следует ожидать, исходя из известных величин сечений захвата и неупругого рассеяния на ядрах стенок. В связи с этим потребовался более подробный анализ процессов взаимодействия ультрахолодных нейтронов (УХН) с веществом.

Настоящая работа посвящена определению вероятности нагревания УХН при одном соударении со стенкой. Эта вероятность играет роль эффективного коэффициента поглощения, ибо нагревшийся нейтрон не задерживается стенками накопительного сосуда. Обычно процесс соударения УХН со стенкой описывается с помощью показателя преломления [2]

$$n = \sqrt{1 - 4\pi N_0 \, b/R^2} \, ,$$

где N_0 – число ядер в единице объема стенки, $b = b' - i b''$, b' – когерентная длина рассеяния, $b'' = \dfrac{k\sigma_{ex}}{4\pi}$, σ_{ex} – сечение экстинкции, которое включает в себя: σ_a – сечение захвата, $\sigma_у$ – сечение упругого рассеяния[x], $\sigma_{ну}$ – сечение неупругого рассеяния; k – волновой вектор нейтрона.

---

[x] $\sigma_у$ входит в b'' только в случае аморфной среды. Если среда монокристаллическая, то в b'' содержится только некогерентная слагающая $\sigma_у$. Более подробно см. [3].

Коэффициент преломления (1) определяет амплитуду отраженной волны

$$A = \frac{k - iK}{k + iK} = e^{-2i\phi}, \qquad (2)$$

где k – нормальная к отражающей поверхности компонента вектора $\vec{k}$, $K = \sqrt{4\pi N_0 b - k^2}$,

$$\phi = \arccos \frac{k}{\sqrt{4\pi N_0 b}} .$$

Поскольку b – комплексно, то фаза ϕ – содержит мнимую часть

$$\phi'' \approx -\frac{b''}{2b'} \frac{k}{K} .$$

Поэтому коэффициент отражения $R = |A|^2$ оказывается меньше единицы $R = 1 - \mu$, где

$$\mu \approx 2\frac{b''}{b'} \frac{k}{K} = 2k \frac{\sigma_a + \sigma_у + \sigma_{ну}}{4\pi b'} \frac{k}{K} .$$

Величина μ всюду в дальнейшем называется коэффициентом поглощения. Сечение упругого рассеяния[x/] не приводит к выбыванию УХН из накопительного сосуда, поскольку, как показано в [3], та часть нейтронов, которая не описывается коэффициентом R, отражается от стенки в незеркальных направлениях. Поэтому сечение упругого рассеяния следует из μ исключить. Если, кроме того, пренебречь сечением захвата, то коэффициент поглощения окажется зависящим только от сечения неупругого рассеяния

$$\mu = 2k \frac{\sigma_{ну}}{4\pi b'} \frac{k}{K} . \qquad (3)$$

[x/] См. прим. на стр 3.

Однако последнее экстраполируется из области тепловых энергий, т.е. в нем не учитывается факт полного отражения. Этот факт учитывается в настоящей работе.

В пункте 1 вводится потенциал взаимодействия УХН с колеблющимися ядрами, который определяется только с точностью до членов, линейных по смещению ядер из положения равновесия. Как следует из этого пункта, потенциал взаимодействия равен:

$$v(\vec{r},t) = v_0 \, [\, \theta(z)\,(1 - \nabla \vec{u}(\vec{r},\vec{t})) - \delta(z)\, u_z(\vec{r},t)] , \tag{4}$$

где $\theta(z)$ – ступенчатая функция, равная единице при $z > 0$ и нулю при $z < 0$; $\delta(z)$ – δ – функция Дирака; $\vec{u}(\vec{r},t)$ – вектор смещения ядра среды в точке r в момент времени t; $u_z(\vec{r},t)$ – z – компонента вектора $\vec{u}(\vec{r},t)$. Уравнение Шредингера с таким потенциалом далее решается по теории возмущений, когда за невозмущенный потенциал принимается величина $v_0\theta(z)$. Находятся решения невозмущенного уравнения и строится функция Грина. В пункте 2 выводятся общие формулы для коэффициента эффективного поглощения. Смещение $\vec{u}(\vec{r},t)$ раскладывается по полной совокупности возможных колебаний

$$\vec{u}(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi} \sum_J \sqrt{\frac{h}{2\rho_\mu\,\omega_J}} \, [\, a_J \vec{u}^{(J)}(z)\, e^{i\vec{q}\vec{\rho} - i\omega_J t} + a_J^{+} \vec{u}^{(J)*}(z)\, e^{-i\vec{q}\vec{\rho} + i\omega_J t}] , \tag{5}$$

где знак суммирования имеет чисто символический характер и смысл его зависит от того, дискретна или непрерыва совокупность квантовых чисел J; $\vec{u}^{(J)}(z)$ – собственная функция колебаний с квантовыми числами J; ρ_μ – плотность отражающего вещества; ω_J – частота колебаний; a_J^+, a_J – операторы рождения и уничтожения квантов колебаний внутри среды; $\vec{q}$ – двумерный волновой вектор упругих колебаний; $\vec{\rho}$ – двумерный радиус-вектор $\vec{\rho} = (x,y)$. Коэффициент поглощения определяется формулой:

$$\mu = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{J}^{J_{max}} \left(e^{\frac{h\omega_J}{k_Б T}} - 1\right) \cdot \frac{4 v_0 k_0}{|k + k'|^2} \frac{h}{2\rho_\mu \omega_J} Re\left(k |A_k^{(J)}|^2 + k' |B_k^{(J)}|^2\right), \tag{6}$$

где k_0 – z – компонента волнового вектора падающего нейтрона k_0 ;
$k = \sqrt{k_0^2 + \frac{2m}{h}\omega_J - (\vec{\kappa}_0 + \vec{q})^2}$; k – постоянная Больцмана; $\vec{\kappa}_0 = (k_{0x}, k_{0y})$;
$k' = \sqrt{k^2 - v_0}$; $Re(x)$ – обозначает действительную часть x ;

$$A_k^{(J)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik'z - K_0 z} \delta v^{(J)}(z)\, dz \tag{7}$$

$$B_k^{(J)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{k' - k}{2k'} e^{ik'z} + \frac{k' + k}{2k'} e^{-ik'z}\right) e^{-K_0 z} \delta v^{(J)}(z)\, dz$$

$$K_0 = \sqrt{v_0 - k_0^2} \tag{8}$$

$$\delta v^{(J)}(z) = -\left[i\vec{q}\vec{u}^{(J)}(z) + \frac{d}{dz} u_z^{(J)}(z)\right] \theta(z) - u_z(z) \cdot \delta(z). \tag{9}$$

В этом же пункте показано, как находить максимальное J_{max} в формуле (6) из условия, аналогичного тому, которое принимается в модели Дебая, а именно, исходя из требования, чтобы число членов в символической сумме (6) равнялось числу степеней свободы $3N$, где N –полное число ядер в среде.

В пункте 3 делается оценка величины коэффициента поглощения μ применительно к тому случаю, когда упругие колебания внутри среды описываются фононами. Показано, что в модели Дебая основной вклад в нагревание нейтрона вносят объемные колебания, которые дают потенциал возмущения

$$\delta v_1 = - v_0\, \theta(z)\, \vec{\nabla}\, \vec{u}(\vec{r}, t) . \qquad (10)$$

Вероятность нагревания при однократном соударении оказывается примерно такой же, какая следует из формулы (3), в которой в качестве $\sigma_{ну}$ берется сечение когерентного однофононного рассеяния[x/] с поглощением фонона, экстраполированное из тепловой области. Их отношение может отличаться от единицы на величину $\approx \sqrt{v_0}/P_Д$ ($P_Д$ - дебаевское волновое число, $P_Д = \sqrt[3]{6\pi^2 N_0}$).

Потенциал возмущения

$$\delta v_2\,(r, t) = - v_0\, u_z(\vec{r}, t)\, \delta(z) , \qquad (11)$$

обусловленный движением поверхности, вносит в величину μ вклад меньший, чем δv_1 также на фактор $\sqrt{v_0}/P_Д$. Однако роль поверхности в неупругом рассеянии нейтронов не ограничивается только собственным дрожанием и видоизменением волновой функции нейтрона. Поверхность приводит также к модификации волновой функции фонона. Соответствующие поправки рассмотрены в пункте 4. Показано, что они малы и их относительная величина составляет $\approx \sqrt{v_0}/P_Д \approx 1\%$.

В пункте 5 рассмотрено влияние усредненного теплового движения ядер на полное отражение. Показано, что в случае аморфной среды термодинамическое усреднение теплового движения ядер не уменьшает амплитуду полного отражения, а только меняет фазу отраженной волны.

1. Потенциал взаимодействия нейтронов с колебаниями среды. Невозмущенное уравнение Шредингера

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что стенка, на которую падает нейтрон, занимает полупространство $z > 0$; ядра, составляю-

---

[x/] Преполагается, что амплитуды рассеяния всех ядер одинаковы.

щие стенку, распределены равномерно, амплитуда рассеяния нейтрона одинакова для всех ядер, и сечение захвата равно нулю. Взаимодействие нейтрона с ядром будем описывать в приближении псевдопотенциала Ферми.

Волновая функция нейтрона определяется из уравнения Шредингера:

$$[i \frac{2m}{h} \frac{\partial}{\partial t} + \Delta - v(\vec{r}, t)] \Psi(\vec{r}, t) = 0 , \tag{12}$$

где

$$v(\vec{r}, t) = 4\pi b \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{u}(\vec{r}_i, t)) , \tag{13}$$

b – длина рассеяния, а $\vec{u}(\vec{r}_i, t)$ – смещение i –го ядра из своего положения равновесия $\vec{r}_i$.

Предполагая распределение ядер хаотичным и пренебрегая некогерентным рассеянием, возникающим вследствие этой хаотичности, запише $v(\vec{r}, t)$ с точностью до членов, линейных по $\vec{u}(\vec{r}_i, t)$,

$$v(\vec{r}, t) = 4\pi N_0 b \int_{-\infty}^{\infty} \theta(z') (1 + \vec{u}(\vec{r}', t) \nabla) \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' =$$

$$= v_0 \theta(z) - v_0 [\nabla \vec{u}(\vec{r}, t) \cdot \theta(z)] , \tag{14}$$

где $v = 4\pi N_0 b$. Раскрыв скобки в правой части (14), получим выр жение (4). Уравнение Шредингера с таким потенциалом можно решать по теории возмущений, полагая невозмущенным уравнение

$$[i \frac{2m}{h} \frac{\partial}{\partial t} + \Delta - v_0 \theta(z)] \Psi(\vec{r}, t) = 0 . \tag{15}$$

Решение этого уравнения, содержащее падающую плоскую волну $e^{i\vec{k}_0 \vec{r} - i\omega_0 t}$, имеет вид:

$$\Psi_0(\vec{r}, t) = e^{i\kappa_0 \vec{\rho} - i\omega_0 t} y_{k_0}(z) , \tag{16}$$

где $k_0 = \sqrt{\frac{2m}{h}\omega_0 - \kappa_0^2}$, а $y_k(z)$ удовлетворяет уравнению

$$[\frac{d^2}{dz^2} + k^2 - v_0\theta(z)]\, y_k(z) = 0\,, \tag{17}$$

$$y_k(z) = (e^{ikz} + \frac{k - iK}{k + iK} e^{-ikz})\,\theta(-z) + \frac{2k}{k + iK} e^{-Kz}\theta(z)\,, \tag{18}$$

причем $K = \sqrt{v_0 - k^2}$.

Уравнение (15) имеет еще одно решение, линейно не зависящее от (16):

$$h_k(z) = e^{-ikz}\theta(-z) + (\frac{K - ik}{2K} e^{Kz} + \frac{K + ik}{2K} e^{-Kz})\,\theta(z)\,. \tag{19}$$

С помощью этих двух решений можно построить причинную функцию Грина уравнения (15)

$$G(\vec r\, t, \vec r\,' t') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^2\kappa\, d\omega}{2ik} e^{i\vec\kappa(\vec\rho - \vec\rho\,') - i\omega(t - t')} [\theta(z - z')y_k(z)h_k(z') +$$
$$+ \theta(z' - z)\, y_k(z')h_k(z)]\,.$$

2. Взаимодействие нейтрона с упругими колебаниями среды

Оператор смещения $\vec u(\vec r, t)$ в точке $\vec r$ в момент t можно разложить по полной системе функций $\vec u^{(J)}(\vec r, t) = \frac{1}{2\pi} e^{i\vec q\vec\rho - i\omega_J t}\, \vec u^{(J)}(z)$, описывающих колебания внутри среды (5).

Подстановка оператора (5) в потенциал (14), из которого вычтен невозмущенный потенциал $v_0\theta(z)$, позволяет представить возмущение в виде:

$$\delta v(\vec r, t) = \frac{v_0}{2\pi} \sum_J \sqrt{\frac{h}{2\rho_\mu \omega_J}} \left[a_J \delta v^{(J)}(z)\, e^{i\vec q\vec\rho - i\omega_J t} + \right.$$

$$\left. + a_J^+ \delta v^{(J)*}(z)\, e^{-i\vec q\vec\rho + i\omega_J t} \right], \tag{20}$$

где $\delta v^{(J)}(z) = \delta v_1^{(J)}(z) + \delta v_2^{(J)}(z)$,

$$\tag{21}$$

а $\delta v_1^{(J)}(z)$ и $\delta v_2^{(J)}(z)$ определены во введении первым и вторым слагаемым формулы (9) соответственно. Поправка $\Psi_1(\vec r, t)$ к волновой функции $\Psi_0(\vec r, t)$ (16), обусловленная этим возмущением, дается выражение

$$\Psi_1(\vec r, t) = \int G(\vec r t, \vec r' t')\, \delta v(\vec r' t')\, \Psi_0(\vec r' t')\, d^3 r'\, dt'.$$

Подставляя сюда Ψ_0, δv и G, находим

$$\Psi_1(\vec r, t) = \sum_J \left[a_J \Psi_{1+}^{(J)}(z)\, e^{i(\vec\kappa_0 + \vec q)\vec\rho - i(\omega_0 + \omega_J)t} + a_J^+ \Psi_{1-}^{(J)}(z)\, e^{i(\vec\kappa_0 - \vec q)\vec\rho - i(\omega_0 - \omega_J)t} \right] =$$

где

$$\Psi_{1\pm}^{(J)}(z) = \frac{v_0}{2\pi} \sqrt{\frac{h}{2\rho_\mu \omega_J}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{2ik_\pm} \left[y_{k_\pm}(z) h_{k_\pm}(z')\, \theta(z - z') + \right.$$

$$\left. + y_{k_\pm}(z') h_{k_\pm}(z)\, \theta(z' - z) \right] y_{k_0}(z')\, \delta v^{(J)}(z')$$

$$k_\pm = \sqrt{\frac{2m}{h}(\omega_0 \pm \omega_J) - (\vec\kappa_0 \pm \vec q)^2}\,. \tag{22}$$

В асимптотической области $|z| \to \infty$ нейтрон, поглотивший упругий ква[нт,] описывается функцией $\Psi_{1\pm}(z)$, равной:

$$\Psi_{1+}^{(J)}(z) = \frac{v_0}{2\pi i} \sqrt{\frac{h}{2\rho_\mu \omega_J}}\; \frac{2k_0}{k_0 + iK_0}\; \frac{1}{k_+ + k'_+} \begin{cases} A_{k_+}^{(J)} e^{-ik_+ z}, & z \to -\infty \\ B_{k_+}^{(J)} e^{ik'_+ z}, & z \to \infty, \end{cases} \tag{23}$$

где

$$A^{(J)}_{k_+} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i k'_+ z' - K_0 z'} \, \delta v^{(J)}(z') dz' \tag{24}$$

характеризует амплитуду волны, отраженной от поверхности после поглощения упругого кванта, а

$$B^{(J)}_{k_+} = \int h_{k_+}(z') e^{-K_0 z'} \delta v^{(J)}(z') \, dz' \tag{25}$$

характеризует амплитуду волны, прошедшей внутрь среды после поглощения кванта.

Вероятность нейтрону поглотить упругий квант J при однократном соударении с поверхностью определяется выражением

$$\mu^{(J)} = \Big\{ -\frac{1}{2i} \Big[\Psi^{(J)*}_{1+}(z) \frac{\vec{d}}{dz} \Psi^{(J)}_{1+}(z) \Big]_{(z \to -\infty)} + \frac{1}{2i} \Big[\Psi^{(J)*}_{1+}(z) \frac{\vec{d}}{dz} \Psi_{1+}(z) \Big]_{(z \to +\infty)} \Big\} \frac{1}{k_0} \langle a^+_J a_J \rangle , \tag{26}$$

где угловые скобки означают термодинамическое усреднение

$$\langle a^+_J a_J \rangle = \left(e^{\frac{h\omega_J}{k_Б T}} - 1 \right)^{-1} . \tag{27}$$

Подстановка (22) и (27) в (26) приводит к выражению (6). Максимальное значение J_{max} в выражении (6) можно определить следующим образом.

Представим себе, что среда описывается вектором состояния

$$\vec{\Phi}(\vec{r}, t) = \sum_J^{J_{max}} a^+_J \vec{u}^{(J)}(\vec{r}, t) \,|\, 0 \rangle ,$$

где $|\,0\rangle$ – означает состояние среды, в котором нет ни одного упругого кванта. Найдем среднее значение оператора $\hat{N} = \sum_J a^+_J a_J$ в состоянии $\vec{\Phi}(\vec{r}, t)$

$$n(\vec{r},t) = \vec{\Phi}^{+}(\vec{r},t)\hat{N}\vec{\Phi}(\vec{r},t).$$

Это среднее характеризует число упругих квантов в точке z в момент t в единице объема. Проинтегрируем $n(\vec{r},t)$ по всему пространству, тогда получим

$$\int n(\vec{r},t)\,d^3r = 3N = \sum_{J}^{J_{max}} \int_V \vec{u}^{(J)*}(\vec{r},t)\,\vec{u}^{(J)}(\vec{r},t)\,d^3r .$$

Поделив обе части равенства на объем V, получим

$$3N_0 = \sum_{J}^{J_{max}} \xi^{(J)}, \tag{28}$$

где

$$\xi^{(J)} = \frac{1}{V}\int_V \vec{u}^{(J)*}(\vec{r},t)\,\vec{u}^{(J)}(\vec{r},t)\,d^3r . \tag{29}$$

3. Нагревание УХН на фононах

Чтобы иметь возможность получить численное значение коэффициента эффективного поглощения μ (6), необходимо конкретизировать волновую функцию $\vec{u}^{(J)}(z)$. Предположим, что кванты колебания внутри среды есть фононы, т.е. $J=(\vec{p},m)$, $p = (\vec{q},p_z)$,

$$\vec{u}^{(J)}(z) = \frac{\vec{u}^{(m)}}{\sqrt{2\pi}}\, e^{i p_z z}, \tag{30}$$

а $\vec{u}^{(m)}$ -единичный вектор поляризации моды m. Нетрудно убедиться, что в $\delta v_1^{(\vec{p},m)}(z)$ дает вклад только продольный фонон: в то время как в $\delta v_2^{(\vec{p},m)}(z)$ дает вклад и один из поперечных фононов, а именно тот, вектор поляризации которого непараллелен плоскости $z = 0$. Доля нейтронов, которые после захвата фонона распространяются вне среды под углами, меньшими критического ($k_z > \sqrt{v_0}$), или проходят внутрь вещества, дается соответственно выражениями

$$\mu_1 = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{e^{\frac{h\omega}{k_Б T}}-1}\,\frac{4v_0 h}{2\rho_\mu \omega}\,\frac{k_0 k}{(k+k')^2}\,\frac{K_0^2+(k')^2+q^2}{K_0^2+(k'-p_z)^2}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{e^{\frac{h\omega}{k_Б T}}-1}\,\frac{4v_0 h}{2\rho_\mu \omega}\,\frac{k_0 k}{(k+k')^2}\left\{\frac{K_0^2+(k')^2+q^2}{K_0^2+(k'-p_z)^2}+\right. \tag{31}$$

$$\left.+\frac{p^2 v_0}{[K_0^2+(k'-p_z)^2][K_0^2+(k'+p_z)]}\right\},$$

где $k = \sqrt{k_0^2 + \frac{2m}{h}\omega - (\vec{\kappa}_0-\vec{q})^2}$, $k'=\sqrt{k^2-v_0}$, $\vec{\kappa}=(k_x,k_y)$, $\vec{q}=(p_x,p_y)$.

Доля же тех нейтронов, которые после захвата фонона распространяются под углами, большими критического, дается выражением

$$\mu_3 = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{e^{\frac{h\omega}{k_Б T}}-1}\,\frac{4k_0 k h}{2\rho_\mu \omega}\,\frac{(K_0+K)^2+q^2}{(K_0+K)^2+p_z^2}, \tag{32}$$

где $K = \sqrt{v_0 - k^2}$.

Основной вклад во все три интеграла дает область $p \approx p_Д$ ($p_Д$ – дебаевское волновое число). Выражения (31) имеют малость $v_0 k_0$. (Последний член в фигурных скобках второго выражения (31) имеет дополнительную малость порядка v_0, поэтому им можно пренебречь). Однако подинтегральные функции имеют острый максимум в точке $p_z =$ $= k'$. Высота этого максимума $\approx 1/K_0^2$, а ширина $\approx K_0$, поэтому в целом оба выражения имеют порядок $v_0/p_Д^2$. Если заменить в обоих выражениях (31) функцию $[K_0^2+(k'-p_z)^2]^{-1}$ на $(\pi/K_0)\delta(k-k_0-p_z)$ (вносимая при этом относительная ошибка имеет малость $\sqrt{v_0}/p_Д \approx 1\%$) и пренебречь различием k и k' (относительная ошибка $\approx v_0/p_Д^2$), то сумма μ_1 и μ_2 представится в виде (3), где

$$\sigma_{ну} = \frac{2}{k_0} b^2 \int \frac{hp^2}{2M\omega} d^3p \frac{\delta(\vec{k}-\vec{k}_0-\vec{p})}{e^{\frac{h\omega}{k_Б T}}-1}\,\delta\left(k^2-k_0^2-\frac{2m}{h}\omega\right) d^3k, \tag{33}$$

т.е. совпадает с полным сечением неупругого рассеяния, экстраполированным из области тепловых энергий.

Подинтегральное выражение (32) вблизи $p_z = 0$ имеет порядок малости ≈ 1, однако фазовый объем, по которому происходит интегрирование, ограничен, во-первых, условием $\Delta p_z \approx (К + К_0)$ и, во-вторых, двумя условиями $К^2 = v_0 - k_0^2 - \frac{2m}{h}\omega + (\vec{\kappa}_0 + \vec{q})^2 > 0$ и $k^2 = k_0^2 + \frac{2m}{h}\omega - (\vec{\kappa}_0 + \vec{q})^2 > 0$, откуда при $\omega = cp$ следует ограничение на $\Delta q \approx v_0/\xi$, где $\xi \approx 2mc/h \approx p_Д$. Поэтому выражение (32) в целом имеет малость ($v_0^{3/2}/p_Д^3$), т.е. по сравнению с (31) им можно пренебречь. Величина μ_3 может сравниваться с μ_1 и μ_2 только при определенном виде дисперсионных соотношений вблизи $p_Д$, а именно, когда

$$\left(\frac{m}{h}\frac{d\omega}{dp}\right)_{p=p_1} - p_1 \approx \sqrt{v_0} ,$$

где p_1 -корень уравнения $К_2 = 0$, причем $p_1 < p_Д$. В этом случае область интегрирования по q оказывается порядка $\Delta q \approx \sqrt{v_0}$, т.е. μ_3 в целом оказывается имеющим такую же малость $v_0/p_Д^2$, как μ_1 и μ_2.

Интересно отдельно оценить долю нейтронов, неупруго рассеянных благодаря дрожанию поверхности стенки, описываемому потенциалом $\delta v_2(z)$:

$$\mu_4 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{e^{\frac{h\omega}{k_Б T}} - 1} \frac{4v_0 h}{2\rho_\mu \omega} \frac{k_0 \operatorname{Re}(k + k')}{|k + k'|^2} . \qquad (34)$$

Согласно приведенному выражению, эта доля имеет порядок $v_0 k_0/p_Д^3$, поэтому мала по сравнению с μ_1 и μ_2. Поскольку μ_1 и μ_2 включают в себя μ_4, то отсюда можно заключить, что основной вклад в нагревание нейтронов вносят объемные колебания среды.

4. Сурфоны

До сих пор наличие границы у отражающей среды учитывалось двояко: во-первых, оно принималось во внимание при конструировании невозмущенной волновой функции нейтрона и, во-вторых, рассматривался вклад в неупругое рассеяние, обусловленное тем, что фононы производят дрожание стенки. Строго говоря, граница должна учитываться и при построении волновой функции самих фононов. Соответствующая процедура приведена в /4/, где видоизмененные фононы получили название сурфонов.

Сурфоны удобно характеризовать следующими квантовыми числами: двумерным волновым вектором $\vec{q} = (q_x, q_y)$, кажущейся скоростью распространения вдоль поверхности $c = \omega/|q|$ и модой m. Волновая функция записывается в виде

$$\vec{u}^{(J)}(\vec{r},t) = \frac{1}{2\pi} e^{i\vec{q}\vec{\rho} - i\omega t}\, \vec{u}^{(c,m)}(z),$$

где $\vec{u}^{(c,m)}(z)$ содержит волны как падающие, так и отраженные от поверхности. Мода уже не означает чисто продольной или поперечной поляризации колебаний, а содержит их смесь. Символическое суммирование в (6) имеет смысл

$$\sum_m \int_0^{q_{max}} d^2q \int_0^{c_{max}} dc\,.$$

Если q_{max} положить равным $p_Д$, то, следуя рецепту (28) и (29) и используя вид функций /4/ $\vec{u}^{(c,m)}(z)$, получаем для c_{max} алгебраическое уравнение

$$2\sqrt{(c_{max}/c_t)^2 - 1} + \sqrt{(c_{max}/c_\ell)^2 - 1} = 3,$$

которое нетрудно решить (здесь c_t, c_ℓ -скорость распространения поперечных и продольных колебаний соответственно).

Поскольку влияние поверхности на волновую функцию фонона сказывается только в областях, расположенных до глубины $\approx p_Д^{-1}$, то поправки, возникающие от модификации волновой функции фонона, имеют тот же порядок, что и поправки, обусловленные дрожанием поверхности. Рассмотрим, например, неупругое рассеяние на поверхностных релеевских волнах, которые естественным образом содержатся в формализме сурфонов.

Доля нейтронов, неупруго рассеянных от релеевских волн и распространяющихся как наружу в область углов, меньших критического ($k_z = k > \sqrt{v_0}$), так и внутрь среды, равна,

$$\mu_1^{(k)} = \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^2 q}{e^{\frac{h\omega}{k_Б T}} - 1} \frac{4 v_0 h}{2\rho_\mu \omega} \frac{k_0}{k + k'} \frac{q}{K(\sigma)} \left\{ \frac{q^2 (1-\gamma^2)^2}{(K_0 + q_\gamma)^2 + (k')^2} + \right.$$

$$+ \frac{2\gamma q (1-\gamma^2)(K_0 + q_\gamma)}{(K_0 + q_\gamma)^2 + (k')^2} \frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + 1} + \gamma^2 \left(\frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + 1}\right)^2 + \tag{35}$$

$$\left. + \frac{k'}{2(k + k')} \frac{q^2 (1-\gamma^2)^2 v_0}{[(K_0 + q_\gamma)^2 + (k')^2]^2} \right\}.$$

А нейтроны, неупруго отраженные от релеевских волн в область углов, больших критического, составляют долю

$$\mu_2^{(k)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^2 q}{e^{\frac{h\omega}{k_Б T}} - 1} \frac{4 k_0 k h}{2\rho \omega} \frac{q}{K(\sigma)} \left| \frac{q(1-\gamma^2)}{K_0 + K + q_\gamma} + \gamma \frac{\eta^2 - 1}{\eta^2 + 1} \right|^2, \tag{36}$$

где $q_\gamma = q \cdot \gamma$, $\gamma = \sqrt{1 - (c_R/c_\ell)^2}$, $c_R = \omega/q$, $\eta = \sqrt{1 - (c_R/c_t)^2}$, $K(\sigma) = (\gamma - \eta)(\gamma - \eta + 2\gamma\eta^2)/(2\gamma\eta^2)$. Из выражения (35) видно, что $\mu_1^{(R)}$ имеет малость порядка $v_0 k_0$, поэтому пренебрежимо по сравнению с (31). Величина же $\mu_2^{(R)}$, благодаря малости фазового объема, по которому производится интегрирование, имеет порядок v_0^2 и пренебрежима по сравнению с $\mu_1^{(R)}$. Таким образом, вклад релеевских волн в неупругое рассеяние нейтронов имеет такой же порядок малости, как и вклад, обусловленный дрожанием поверхности.

Интересно посмотреть, какой вид имеет угловое распределение нейтронов, отраженных от релеевских волн. Дифференциальную вероятность рассеяния в интервал $d\Omega$ около направления Ω, находящегося вне углов полного отражения, можно записать в виде

$$\frac{dw_1(\Omega)}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{4k_0 k^2}{e^{\frac{h\omega}{k_Б T}}-1} \frac{h}{2\rho_M c_R} \frac{v_0}{(k+k')^2} \frac{2qk\,d\Omega}{4k^2 q + \xi(\kappa_0^2-\kappa^2-q^2)} \cdot$$

$$\cdot\left[\frac{(1-\gamma^2)^2 q^2}{(K_0+q_\gamma)^2+(k')^2} + \frac{2\gamma q(1-\gamma^2)(K_0+q_\gamma)}{(K_0+q_\gamma)+(k')^2} \frac{\eta^2-1}{\eta^2+1} + \gamma^2\left(\frac{\eta^2-1}{\eta^2+1}\right)^2\right], \tag{37}$$

где $q = \sqrt{(\vec{\kappa}_0-\vec{\kappa})^2}$, $k = \sqrt{k^2-\kappa^2}$, $k^2 = k_0^2 + \xi\cdot q$, $\xi = \dfrac{2mc_R}{h}$.

Аналогичным же образом записывается вероятность рассеяния в направлениях, лежащих внутри углов полного отражения.

$$\frac{dw_2(\Omega)}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{4k_0 k^2}{e^{\frac{h\omega}{k_Б T}}-1} \frac{h}{2\rho_M c_R} \frac{2qk}{4k^2 q + \xi(\vec{\kappa}_0^2-\vec{\kappa}^2-\vec{q}^2)} \cdot \tag{38}$$

$$\cdot\left|\frac{q(1-\gamma^2)}{K_0+K+q_\gamma} + \gamma\frac{\eta^2-1}{\eta^2+1}\right|^2.$$

Порядок малости выражений (37) и (38) равен $v_0^{3/2}/p_Д^3$ и совпадает с порядком малости фона некогерентно и неупруго рассеянных нейтронов, однако оно селективно по энергии и имеет место только для $E = E_0 + h\,\omega_R$, где ω_R –частота релеевской волны ($\omega_R = c_R\sqrt{(\kappa_0-\kappa)^2}$).

5. Влияние усредненного теплового движения ядер на полное отражение нейтронов

Как известно, тепловое движение ядер приводит к уменьшению амплитуды упругого рассеяния нейтронов, проявляющемуся в виде фактора Дебая-Валлера, который равен единице для упругого рассеяния вперед и монотонно убывает с ростом переданного импульса. Интуитивно ясно, что уменьшение когерентной амплитуды понижает потенциальный барьер стенки, но не меняет коэффициент отражения, если нормальная компонента скорости падающего на стенку нейтрона остается ниже граничной. Однако чтобы сделать окончательный вывод о влиянии усредненного теплового движения ядер на коэффициент отражения, необходимо интуитивные соображения подкрепить математическими расчетами. В настоящем пункте показано, что термодинамическое усреднение теплового движения ядер эквивалентно термодинамическому усреднению дрожания поверхности стенки. Последнее же на языке потенциала означает, что потенциал приобретает вид ступеньки с размытым краем. Амплитуда же полного отражения по сравнению с отражением от ступеньки с резким краем отличается только фазой, но не абсолютной величиной.

Рассмотрим снова потенциал (13). Его можно при равномерном распределении ядер в среде представить в виде:

$$v(\vec{r},t) = v_0 \int \theta(z') \exp[-i\vec{u}(\vec{r},t)\,\vec{\nabla}\,]\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,d^3r'.$$

Усредним этот потенциал по тепловым колебаниям среды /2/, тогда получим

$$\langle v(\vec{r},t)\rangle = v(\vec{r}) = v_0\, e^{w\cdot\frac{d^2}{dz^2}}\,\theta(z) = v_0 f(z),$$

где

$$w = \frac{1}{2}\int \frac{h}{2\rho_\mu\omega}\,\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,\mathrm{cth}\left(\frac{h\omega}{2k_Б T}\right).$$

Если $\theta(z)$ записать в интегральном представлении, то нетрудно получить

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{z/2\sqrt{w}} e^{-x^2} dx .$$

Отсюда видно, что результирующий потенциал представляет собой ступеньку высотой v_0 с размытым краем шириной $2\sqrt{w} \approx \sqrt{<u^2>}$. Естественно, что отражение от такой потенциальной ступеньки происходит столь же полно, как и от резкой $v_0\,\theta(z)$. Однако фаза отраженной волны все же меняется. В первом порядке по w изменение фазы $\delta\phi$ равно $-2k_0 K_0 w$.

Заключение

Как следует из данной работы, в дебаевской модели коэффициент поглощения УХН при однократном соударении со стенкой, обусловленный нагреванием на тепловых колебаниях среды, может описываться выражением (3), в котором $\sigma_{\text{ну}}$ экстраполируется из области тепловых энергий. Это означает, что тепловые колебания решетки, если только фононный спектр не содержит каких-либо аномалий в низкочастотной области (вопрос требует тщательного исследования), не могут объяснить аномальную утечку УХН из сосудов.

Автор выражает благодарность Ф.Л. Шапиро, который сформулировал решенные здесь задачи и постоянно обсуждал результаты. Автор также пользуется случаем выразить свою благодарность А.Юматову за помощь в преодолении некоторых математических трудностей, а также В.И.Лущикову, Ю.Н.Покотиловскому и А.В.Стрелкову за многочисленные полезные дискуссии.

Литература

1. Л.В. Грошев и др. Препринт ОИЯИ, Р3-5392, Дубна, 1970.
2. И.И. Гуревич, А.В. Тарасов. Физика нейтронов низких энергий. Изд-во "Наука", Москва, 1965.
3. В.К. Игнатович. Препринт ОИЯИ, Р4-6553, Дубна, 1972.
4. H.Ezawa. Annals of Phys. 67, 438 (1970).

Рукопись поступила в издательский отдел
21 августа 1972 года.