

СЗ46.45

"/XII-72

В-676

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P4 - 6644

4236/2-72



П.Э.Волковицкий, Г.Р.Гулканян

АМПЛИТУДЫ РЕАКЦИЙ  $\pi N \rightarrow \pi \pi N$   
ВБЛИЗИ ПОРОГА С УЧЕТОМ ЧЛЕНОВ  
ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА  
ПО ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ИМПУЛЬСАМ  
КОНЕЧНЫХ ЧАСТИЦ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

1972

P4 - 6644

П.Э.Волковицкий, Г.Р.Гулканян

АМПЛИТУДЫ РЕАКЦИЙ  $\pi N \rightarrow \pi\pi N$   
ВБЛИЗИ ПОРОГА С УЧЕТОМ ЧЛЕНОВ  
ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА  
ПО ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ИМПУЛЬСАМ  
КОНЕЧНЫХ ЧАСТИЦ

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

## Введение

Исследование реакций  $\pi N \rightarrow \pi \pi N$  вблизи порога представляет собой один из способов изучения взаимодействия  $\pi$ -мезонов. Как впервые было показано Грибовым /1/, а впоследствии подробно исследовано Анисовичем и Ансельмом /2/, амплитуда рождения трех частиц, являющаяся функцией квадратов относительных импульсов и полной кинематической энергии  $E$ , вблизи порога реакции представляется в виде разложения по степеням  $E^{1/2}$ . Этот ряд содержит аналитические по относительным импульсам члены, которые входят с некоторыми неопределенными коэффициентами, и сингулярные члены. Последние обязаны своим происхождением перерассеянию и зависят от длин рассеяния образовавшихся частиц. Выделение сингулярных членов в амплитуде рождения трех частиц в принципе позволяет при сравнении с экспериментом определить длины рассеяния.

В работе /3/ были получены формулы для матричных элементов реакций  $\pi N \rightarrow \pi \pi N$  с точностью до членов второго порядка по  $E^{1/2}$ , а в работе /4/ - кубические члены для каналов  $\pi^+ p \rightarrow \pi \pi N$ .

В настоящей работе вычисляются амплитуды диаграмм, определяющих члены третьего порядка в амплитуде реакций  $\pi N \rightarrow \pi \pi N$ , и приводятся соотношения, связывающие амплитуды пяти каналов:

$$\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- n \quad (I)$$

$$\pi^- p \rightarrow \pi^0 \pi^0 n \quad (II)$$

$$\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^0 p \quad (III)$$

$$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^+ n \quad (IV)$$

$$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^0 p \quad (V)$$

Вычислены также кубические члены в квадрате матричного элемента реакции  $\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- n$ .

#### Амплитуды диаграмм с тремя перерасеяниями

Как уже упоминалось выше, сингулярные члены в амплитуде рождения трех частиц связаны с перерасеянием частиц в конечном состоянии. Каждое перерасеяние дает лишнюю степень параметра в сингулярную часть амплитуды, поэтому учет членов до третьего порядка включительно сводится к вычислению диаграмм с одним, двумя и тремя перерасеяниями, изображенных на рис. 1. Способ вычисления диаграмм с одним, двумя перерасеяниями и действительных частей диаграмм с тремя перерасеяниями, основанный на использовании дисперсионных соотношений, описан в работе /2/.

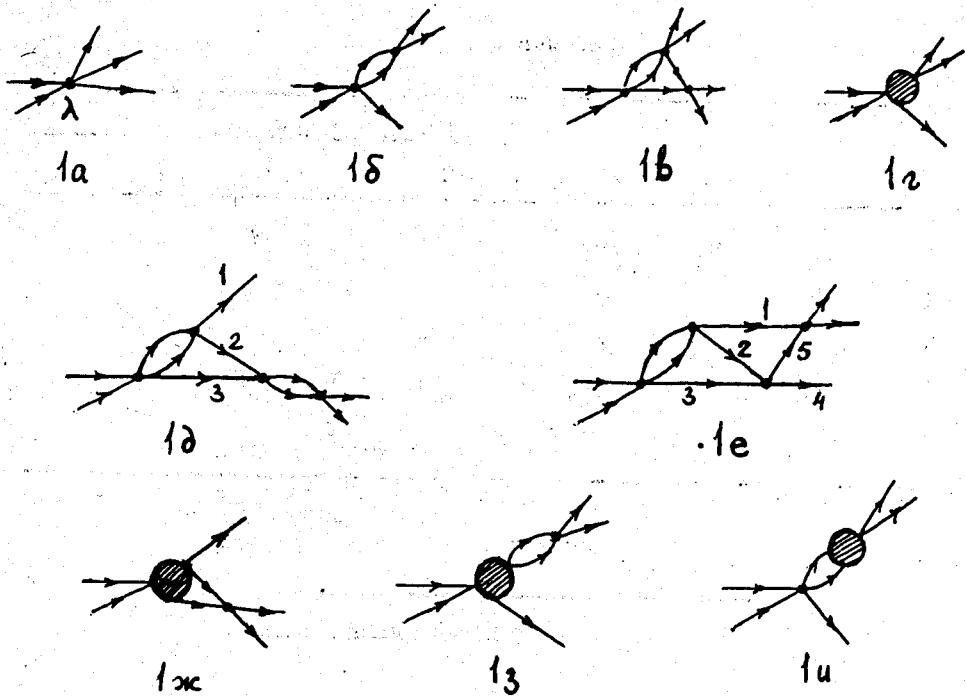


Рис. 1

Таблица 1

$a$	$\beta_a$	$\epsilon_a$	<u>Номера линий</u>		
			1	2	3
1	$\beta_\pi$	$\beta_\pi$	$N$	$\pi$	$\pi$
2	$\beta_\pi$	$\beta_N$	$\pi$	$\pi$	$N$
3	$\beta_N$	$\beta_N$	$\pi$	$N$	$\pi$

Таблица 2

$\alpha$	$\eta_\alpha$	$\zeta_\alpha$	$\epsilon_\alpha$	Номера линий				
				1	2	3	4	5
1	$\beta_\pi$	$\beta_\pi$	$\beta_\pi$	$\pi$	$\pi$	$N$	$N$	$\pi$
2	$\beta_N$	$\beta_\pi$	$\beta_\pi$	$\pi$	$N$	$\pi$	$N$	$\pi$
3	$\beta_\pi$	$\beta_\pi$	$\beta_N$	$N$	$\pi$	$\pi$	$\pi$	$\pi$
4	$\beta_\pi$	$\beta_N$	$\beta_N$	$\pi$	$\pi$	$N$	$\pi$	$N$
5	$\beta_N$	$\beta_N$	$\beta_N$	$\pi$	$N$	$\pi$	$\pi$	$N$

Таблица 3

$\alpha$	$\beta_\alpha$	$\epsilon_\alpha$	Номера линий		
			1	2	3
1	$\beta_\pi$	$(\beta_N/\beta_\pi)^2 N$	$\pi$	$\pi$	$\pi$
2	$\beta_\pi$	$\beta_N/\beta_\pi$	$\pi$	$\pi$	$N$
3	$\beta_N$	$(\beta_N/\beta_\pi)^3 \pi$	$\pi$	$N$	$\pi$

Диаграмма 1а представляет собой амплитуду рождения трех частиц на пороге. Она равна постоянной, которую мы обозначим  $\lambda$ . Для разных каналов  $\lambda$  разные; они связаны между собой изотопическими соотношениями /2/. Амплитуды остальных диаграмм являются функциями полной выделенной энергии  $E$  и безразмерных величин  $x_{ij} = k_{ij} / \sqrt{2\mu_{ij}E}$ , где  $k_{ij}$  — относительный импульс,  $\mu_{ij}$  — приведенная масса рассеивающихся частиц. Амплитуда диаграмм с одним перерассеянием равна:

$$i\lambda a \sqrt{\frac{2(M+1)}{M+2}} E \sqrt{\beta_a} x \quad (a = 1, 2, 3), \quad (1 \text{ б})$$

где  $M$  - масса нуклона (в единицах  $m_\pi = 1$ );  $\beta_a = \beta_\pi = 0.5 (M+2)/(M+1)$ , если перерассеиваются пионы и  $\beta_a = \beta_N = M(M+2)/(M+1)^2$ , если пион рассеивается в конечном состоянии на нуклоне;  $a$  - длина рассеяния.

Амплитуда диаграмм с двумя перерассеяниями 1в имеет как действительную, так и мнимую части:

$$J_a(x) = -\lambda a_1 a_2 2E \sqrt{M/(M+2)} \left\{ \frac{2x \arccos x}{\pi \sqrt{1-x^2}} \left[ \beta_a + x^2 \frac{1-4\beta_a}{3} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{E} \left[ \frac{1}{6} (1+2\beta_a) + x^2 \frac{1-4\beta_a}{3} \right] + i \left[ \frac{1}{6} (1+2\beta_a) + x^2 \frac{1-4\beta_a}{3} \right] \right\}, \quad (1 \text{ в}) \\ (a = 1, 2, 3),$$

где  $\beta_a$  по-прежнему принимает значения  $\beta_\pi$  и  $\beta_N$  в зависимости от двух перерассеяний:  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_\pi$ ,  $\beta_3 = \beta_N$ ;  $a_1$  и  $a_2$  - длины рассеяния.

Диаграмма 1г представляет собой аналитический член второго порядка. Он входит в амплитуду с некоторым новым (вообще говоря, комплексным) коэффициентом  $C$ . Ее амплитуда равна:

$$\lambda C \cdot \frac{2(M+1)}{M+2} E \cdot \beta_a x^2, \quad (1 \text{ г})$$

где  $\beta_1 = \beta_\pi$ ,  $\beta_2 = \beta_3 = \beta_N$ ; коэффициенты  $C$  разные для разных каналов (как будет показано ниже, они, как и  $\lambda$ , связаны между собой) и зависят дополнительно от вида частиц, исходящих из одной точки.

Для простоты коэффициенты  $C$  здесь и в амплитудах других диаграмм, куда они входят, написаны без индексов.

Амплитуда диаграмм 1д равна:

$$T_a(x) = -\lambda a_1 a_2 a_3 \sqrt{2M(M+1)/(M+2)} \cdot E^{3/2} \sqrt{\epsilon_a} x \left\{ \frac{1}{6} (1+2\beta_a) + x^2 \frac{1-4\beta_a}{3} + \right. \\ \left. + i \left[ \frac{2x \arccos x}{\pi \sqrt{1-x^2}} \left( \beta_a + x^2 \frac{1-4\beta_a}{3} \right) - \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{E} \left( \frac{1}{6} (1+2\beta_a) + x^2 \frac{1-4\beta_a}{3} \right) \right] \right\}. \quad (1д)$$

Индекс  $a$  принимает три значения ( $a = 1, 2, 3$ ) в зависимости от того, какая частица ( $\pi$ -мезон или нуклон) соответствует пронумерованным на диаграмме 1д линиям (см. таблицу 1). В таблице 1 приведены значения величин  $\beta_a$  и  $\epsilon_a$ . Амплитуда диаграмм 1е равна:

$$W_a(x) = -\lambda a_1 a_2 a_3 \sqrt{2M(M+1)/(M+2)} E^{3/2} \sqrt{\epsilon_a} \left\{ \pi x (R_2 x^2 + R_0) - \right. \\ \left. - i \left[ \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} (P_4 x^4 + P_2 x^2 + P_0) + x (Q_2 x^2 + Q_0) + x \ln \frac{1}{E} (R_2 x^2 + R_0) \right] \right\}$$

( $a = 1, 2, 3, 4, 5$ ; см. таблицу 2).

Коэффициенты  $R_0, R_2, P_0, P_2, P_4, Q_0, Q_2$ , зависящие только от масс частиц, различны для разных  $a$ ; они имеют вид:

$$R_0 = \frac{1}{3\pi} \left( \frac{1}{2} + \eta_a + \zeta_a - 4\eta_a \zeta_a \right), \quad R_2 = \frac{1}{3\pi} (1 - 4\eta_a)(1 - 2\zeta_a),$$

$$P_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \zeta_a - \frac{2}{3} \eta_a \zeta_a \right) + \frac{1}{\pi} \left( \eta_a + \frac{1}{4} \right) \frac{\arccos \sqrt{\zeta_a}}{\sqrt{\zeta_a(1-\zeta_a)}},$$



$$P_2 = -\frac{2}{3\pi} (3\eta_\alpha + 2\zeta_\alpha - 8\eta_\alpha \zeta_\alpha), \quad P_4 = -2R_2,$$

$$Q_0 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \zeta_\alpha - \frac{2}{3} \eta_\alpha \zeta_\alpha \right) + \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{4} - 2\eta_\alpha \zeta_\alpha - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \zeta_\alpha^2 + \frac{8}{3} \eta_\alpha \zeta_\alpha^2 \right) \frac{\arccos \sqrt{\zeta_\alpha}}{\sqrt{\zeta_\alpha (1 - \zeta_\alpha)}},$$

$$Q_2 = \frac{2}{3\pi} (1 - 4\eta_\alpha) \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \zeta_\alpha + \left( \frac{1}{4} - 2\zeta_\alpha + 2\zeta_\alpha^2 \right) \frac{\arccos \sqrt{\zeta_\alpha}}{\sqrt{\zeta_\alpha (1 - \zeta_\alpha)}} \right],$$

Значения  $\eta_\alpha$ ,  $\zeta_\alpha$ ,  $\epsilon_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ ) приведены в таблице 2.

Амплитуда диаграмм 1ж равна:

$$C \cdot V_\alpha(x) = C \cdot i \lambda a E^{3/2} \sqrt{\epsilon_\alpha} x [(1 - 2\beta_\alpha)x^2 + \beta_\alpha] \quad (1ж)$$

( $\alpha = 1, 2, 3$ ); значения  $\beta_\alpha$  и  $\epsilon_\alpha$  приведены в таблице 3. Здесь, как и прежде, коэффициенты  $C$  написаны без индексов.

Амплитуда диаграмм 1з равна:

$$i \lambda C a [2(M+1)E \beta_\alpha / (M+2)]^{3/2} x^3, \quad (1з)$$

где  $\beta_1 = \beta_\pi$ ,  $\beta_2 = \beta_3 = \beta_N$ .

Такой же вид, как и амплитуда 1з, имеет амплитуда диаграммы 1и, содержащего в заштрихованном блоке перерассеивающихся частиц член, квадратичный по их импульсу. Обозначая через  $r$  эффективный радиус амплитуды перерассеяния двух частиц, получим для диаграммы

1и

$$-i\lambda \cdot \frac{1}{2} a^2 r [2(M+1)E\beta_\alpha / (M+2)]^{3/2} x^3, \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (1и)$$

где  $\beta_1 = \beta_\pi$ ,  $\beta_2 = \beta_3 = \beta_N$ .

Изотопические соотношения между различными  
каналами реакций

Приведенные графики составляют амплитуду с полным орбитальным моментом  $L = 0$ . В этом случае возможны только два начальных состояния системы  $\pi N$ :  $P_{11}$  и  $P_{31}$  (для  $\pi^+ p \rightarrow \pi\pi N$  — только  $P_{31}$  состояние) <sup>x/</sup>. Пусть  $A_{2T}^s$  — симметричная, а  $A_{2T}^a$  — антисимметричная по индексам пионов 1 и 2 амплитуда с изоспином  $T$ . Очевидно,  $A_{2T}^s$  соответствует четному суммарному изоспину, а  $A_{2T}^a$  — нечетному. Амплитуды каналов ( $I = V$ ), соответствующих столкновению заряженного пиона с протоном, равны:

$$A_{+-\pi} = \frac{1}{3\sqrt{5}} A_3^s - \frac{\sqrt{2}}{3} A_1^s + \frac{1}{3} A_3^a - \frac{1}{3} A_1^a$$

$$A_{00\pi} = \frac{2}{3\sqrt{5}} A_3^s + \frac{\sqrt{2}}{3} A_1^s$$

$$A_{-0p} = -\frac{1}{\sqrt{10}} A_3^s - \frac{1}{3\sqrt{2}} A_3^a - \frac{\sqrt{2}}{3} A_1^a \quad (2)$$

$$A_{++\pi} = \sqrt{\frac{4}{5}} A_3^s$$

$$A_{+0p} = -\sqrt{\frac{1}{10}} A_3^s + \sqrt{\frac{1}{2}} A_3^a$$

---

<sup>x/</sup> Используются общепринятые обозначения:  $L_{2T, 2J}$ .

На пороге антисимметричные части амплитуд  $A_1^a$  и  $A_3^a$  исчезают и амплитуды каналов ( $I$ )-( $V$ ) (обозначаемые нами  $\lambda_1, \lambda_2$  и т.д.) выражаются через две изотопические амплитуды  $A_1^s$  и  $A_3^s$ .

Структура аналитических частей  $A_{2T}^s$  и  $A_{2T}^a$  изотопических амплитуд  $A_{2T}^s$  и  $A_{2T}^a$  с точностью до квадратичных по относительным импульсам  $k_{12}, k_{13}, k_{23}$  пионов вблизи порога такова:

$$A_1^s = e^{i\delta_{11}^P} F_{11} [1 + u_1 k_{12}^2 + v_1 (k_{13}^2 + k_{23}^2)]$$

$$A_1^a = e^{i\delta_{11}^P} F_{11} w_1 (k_{13}^2 - k_{23}^2)$$

$$A_3^s = e^{i\delta_{31}^P} F_{31} [1 + u_3 k_{12}^2 + v_3 (k_{13}^2 + k_{23}^2)]$$

$$A_3^a = e^{i\delta_{31}^P} F_{31} w_3 (k_{13}^2 - k_{23}^2),$$

где  $\delta_{2T,1}^P$  - фаза  $P$ -волнового  $\pi N$ -рассеяния в состоянии с изоспином  $T$ , а  $F_{11}, F_{31}$  - модули амплитуд  $A_1^s$  и  $A_3^s$  при энергии, соответствующей порогу рождения пиона;  $u_1, v_1, w_1, u_3, v_3, w_3$  - определенные действительные константы, которые посредством соотношений (2) связаны с действительной и мнимой частями коэффициентов

$C$ , входящих в амплитуды диаграмм 1г, 1ж, 1з. В следующем разделе, где приводится квадрат матричного элемента канала  $\pi^- p \rightarrow \pi^+ \bar{p} n$ , коэффициенты  $C$  выражены через  $u_1, v_1, w_1, u_3, v_3, w_3$ . То же самое можно проделать для других каналов.

Таким образом, амплитуды всех каналов реакций  $\pi N \rightarrow \pi \pi N$  в состоянии с  $L = 0$  с точностью до членов третьего порядка выражаются через модули амплитуд  $F_{11}, F_{31}$ , фазы  $\delta_{11}^P, \delta_{31}^P$  (на самом деле в амплитуду войдет отношение  $F_{11}/F_{31}$  и разность  $\delta_{31}^P - \delta_{11}^P$ ; см. работу /2/) и шесть действительных параметров  $u_1, v_1, w_1, u_3, v_3, w_3$ . Кроме этих величин, в амплитуду, очевидно, войдут две длины

рассеяния пионов  $a_0$  и  $a_2$  и их эффективные радиусы  $r_0$  и  $r_2$  в состояниях с изоспином 0 и 2, а также длины  $\pi N$  рассеяния  $b_1$  и  $b_3$  и их эффективные радиусы  $r_{1/2}$  и  $r_{3/2}$  в состояниях с изоспином 1/2 и 3/2.

### Кубические члены в квадрате матричного элемента



Амплитуда реакции (I) получается суммированием всевозможных диаграмм 1б - 1и к диаграмме 1а; при этом учитываются диаграммы с перезарядкой конечных частиц.

Кубические члены в квадрате матричного элемента появляются вследствие интерференции диаграмм 1д - 1и с диаграммой 1а и интерференции диаграмм 1в - 1г с диаграммой 1б.

Используемые ниже обозначения длин  $\pi\pi$  и  $\pi N$  рассеяний  $a_s, a_e, a_s^0, b_s, b_e, b_s^0$ , а также обозначения реальной и мнимой частей отношений амплитуд реакций (I) - (III) на пороге  $\beta_{12}, \beta_{1'}$ ,  $a_{12}, a_{13}$  (которые есть функции отношения  $F_{11}/F_{31}$  и разности  $\delta_{31}^P - \delta_{11}^P$ ), нами взяты из работы /2/. Значок " ' " означает реальную часть амплитуды диаграммы, значок " " - мнимую часть. Для удобства мы из амплитуд  $J(x), T(x), W(x), V(x)$  выделили длины рассеяния и включили их в коэффициенты перед  $J(x)$  и т.д. Индексы аргументов  $x_{ij}$  этих функций выбраны следующим образом: индекс "1" относится к  $\pi^+$ -мезону, индекс "2" - к  $\pi^-$ -мезону, индекс "3" - к нейтрону. Интерференция диаграмм 1д с диаграммой 1а приводит к членам:

$$(d\sigma/d\Omega)_{a\partial} = 2[\gamma_6 T'_1(x_{12}) + \delta_6 T''_1(x_{12}) + \gamma_7 T'_2(x_{13}) + \delta_7 T''_2(x_{13}) + \gamma_8 T'_3(x_{13}) + \delta_8 T''_3(x_{13}) + \gamma_9 T'_2(x_{23}) + \delta_9 T''_2(x_{23}) + \gamma_{10} T'_3(x_{23}) + \delta_{10} T''_3(x_{23})],$$

где

$$\gamma_6 = \frac{2}{3} (a_0)^2 (b_3 + b_s - \beta_{12} b_s^0) + \frac{1}{3} (a_2)^2 (b_3 + b_s + 2\beta_{12} b_s^0 + 3\beta_{13} b_e)$$

$$\delta_6 = -\frac{2}{3} a_{12} b_s^0 [(a_0)^2 - (a_2)^2] + a_{12} b_e (a_2)^2$$

$$\gamma_7 = [(b_s)^2 + (b_e)^2] (a_s + \frac{1}{2} \beta_{12} a_e) + \beta_{13} b_e (b_1 + b_3),$$

$$\delta_7 = \frac{1}{2} a_{12} a_e [(b_s)^2 + (b_e)^2] + a_{13} a_2 b_e (b_1 + b_3)$$

$$\gamma_8 = b_3 [(b_s)^2 + (b_e)^2] + b_e (b_1 + b_3) (\beta_{12} b_e + \beta_{13} b_s)$$

$$\delta_8 = b_e (b_1 + b_3) (a_{12} b_e + a_{13} b_s)$$

$$\gamma_9 = (b_3)^2 (a_s + \frac{1}{2} \beta_{12} a_e), \quad \delta_9 = \frac{1}{2} a_{12} a_e (b_3)^2$$

$$\gamma_{10} = (b_3)^2 (b_s + \beta_{12} b_e), \quad \delta_{10} = a_{12} b_e (b_3)^2$$

Интерференция диаграмм 1e с диаграммой 1a приводит к членам:

$$(d\sigma/d\Gamma)_{ae} = 2[\gamma_{11} W'_1(x_{12}) + \delta_{11} W''_1(x_{12}) + \gamma_{12} W'_2(x_{12}) + \delta_{12} W''_2(x_{12}) +$$

$$+ \gamma_{13} W'_3(x_{13}) + \delta_{13} W''_3(x_{13}) + \gamma_{14} W'_4(x_{13}) + \delta_{14} W''_4(x_{13}) + \gamma_{15} W'_5(x_{13}) +$$

$$+ \delta_{15} W''_5(x_{13}) + \gamma_{16} W'_3(x_{23}) + \delta_{16} W''_3(x_{23}) + \gamma_{17} W'_4(x_{23}) + \delta_{17} W''_4(x_{23}) +$$

$$+ \gamma_{18} W'_5(x_{23}) + \delta_{18} W''_5(x_{23}),$$

где

$$\gamma_{11} = b_s^0 [2(a_s)^2 + (a_e)^2] + \beta_{12} b_e (a_2)^2 + \frac{2}{3} \beta_{12} b_s^0 [(a_2)^2 - (a_0)^2],$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{3} \alpha_{12} b_s^0 [(a_2)^2 - (a_0)^2] + \alpha_{13} b_e (a_2)^2,$$

$$\gamma_{12} = 2b_s b_3 a_s + (b_e)^2 a_e + \beta_{12} [a_e (b_s^0)^2 + a_s (b_e)^2] + 2\beta_{13} b_e b_s^0 a_2,$$

$$\delta_{12} = \alpha_{12} [a_e (b_s^0)^2 + a_s (b_e)^2] + 2\alpha_{13} b_e b_s^0 a_2,$$

$$\gamma_{13} = 2b_s b_s^0 a_s + (b_e)^2 a_2 + \beta_{12} [b_s^0 b_s a_e + (b_e)^2 a_2] + 2\beta_{13} b_e a_2 (b_s^0 + b_s),$$

$$\delta_{13} = \alpha_{12} [b_s b_s^0 a_e + (b_e)^2 a_2] + 2\alpha_{13} b_e a_2 (b_s^0 + b_s),$$

$$\gamma_{14} = b_3 b_s a_s + (b_e)^2 a_e + \frac{1}{2} \beta_{12} [a_s^0 (b_e)^2 + b_3 b_s a_e] + \beta_{13} b_s b_e a_2,$$

$$\delta_{14} = \frac{1}{2} \alpha_{12} [a_s^0 (b_e)^2 + b_3 b_s a_e] + \alpha_{13} b_s b_e a_2,$$

$$\gamma_{15} = b_3 (b_s)^2 + (b_e)^2 (b_s + \beta_{12} b_s^0) + \beta_{13} b_e [b_s^0 b_s + (b_e)^2 + b_3 b_s],$$

$$\delta_{15} = \alpha_{12} b_s^0 (b_e)^2 + \alpha_{13} b_e [b_s^0 b_s + (b_e)^2 + b_3 b_s],$$

$$\gamma_{16} = b_s^0 b_3 (2a_s + \beta_{12} a_e) + \beta_{13} b_e b_3 a_2,$$

$$\delta_{16} = \frac{1}{2} a_{12} b_s^0 b_3 a_e + a_{13} b_e b_3 a_2,$$

$$\gamma_{17} = b_s b_3 (a_s + \frac{1}{2} \beta_{12} a_e) + \beta_{13} b_e b_3 a_2,$$

$$\delta_{17} = \frac{1}{2} a_{12} b_s b_3 a_e + a_{13} b_e b_3 a_2,$$

$$\gamma_{18} = b_3 [b_3 b_s + \beta_{12} (b_e)^2 + \beta_{13} b_s b_e],$$

$$\delta_{18} = b_e b_3 (a_{12} b_e + a_{13} b_s)$$

Интерференция диаграмм 1ж с диаграммой 1а:

$$(d\sigma/d\Gamma)_{\text{аж}} = 2 \cdot [\nu_1 V''_1(x_{12}) + \nu_2 V''_2(x_{13}) + \nu_3 V''_3(x_{13}) + \nu_4 V''_2(x_{23}) + \nu_5 V''_3(x_{23})],$$

где:

$$\nu_1 = -\frac{1}{3} a_{12} [a_s (u_1 - u_3) - a_e (u_1 + 2u_3) + a_s (v_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} w_1 - v_3 + \frac{1}{\sqrt{5}} w_3)]$$

$$\nu_2 = -a_{12} [\frac{1}{3} b_s (u_1 - u_3) + \frac{1}{\sqrt{2}} b_e u_3]$$

$$\nu_3 = -a_{12} [\frac{1}{3} b_s (v_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} w_1 - v_3 + \frac{1}{\sqrt{5}} w_3) + \frac{1}{\sqrt{2}} b_e (v_3 + \frac{\sqrt{5}}{3} w_3 + \frac{\sqrt{2}}{3} w_1)]$$

$$\nu_4 = -\frac{1}{3} a_{12} b_3 (u_1 - u_3)$$

$$\nu_5 = -\frac{1}{3} a_{12} b_3 \left( v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} w_1 - v_3 - \frac{1}{\sqrt{5}} w_3 \right)$$

Интерференция диаграмм 1з с диаграммой 1а:

$$(d\sigma/d\Gamma)_{аз} = 2(\nu_6 k_{12}^3 + \nu_7 k_{13}^3 + \nu_8 k_{23}^3),$$

где:

$$\nu_6 = \frac{1}{3} a_{12} [-a_s (u_1 - u_3) + \frac{1}{3} a_e (u_1 + 2u_3)]$$

$$\nu_7 = -a_{12} \left[ \frac{1}{3} b_s \left( v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} w_1 - v_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} w_3 \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} b_e \left( v_3 - \frac{\sqrt{5}}{3} w_3 - \frac{\sqrt{2}}{3} w_1 \right) \right]$$

$$\nu_8 = -\frac{1}{3} a_{12} b_3 \left( v_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} w_1 - v_3 + \frac{1}{\sqrt{5}} w_3 \right)$$

Интерференция диаграмм 1и с диаграммой 1а:

$$(d\sigma/d\Gamma)_{аи} = 2(\nu_9 k_{12}^3 + \nu_{10} k_{13}^3),$$

где 
$$\nu_9 = \frac{1}{6} a_{12} [(a_0)^2 r_0^2 - (a_2)^2 r_2^2]$$

$$\nu_{10} = \frac{\sqrt{2}}{6} a_{13} [(b_1)^2 r_{1/2}^2 - (b_3)^2 r_{3/2}^2]$$



Интерференция диаграмм 1в с диаграммами 1б:

$$\begin{aligned}
 (d\sigma/d\Gamma)_{\text{БВ}} = & 2\left\{\left(\frac{1}{2}a_{12}a_e k_{12} + a_{13}b_e k_{13}\right)\left[\gamma_1 J_1'(x_{12}) + \delta_1 J_1''(x_{12}) + \right. \right. \\
 & + \gamma_2 J_1'(x_{13}) + \delta_2 J_1''(x_{13}) + \gamma_3 J_3'(x_{13}) + \delta_3 J_3''(x_{13}) + \gamma_4 J_1'(x_{23}) + \\
 & + \delta_4 J_1''(x_{23}) + \gamma_5 J_3'(x_{23}) + \delta_5 J_3''(x_{23})\left. \right\} + \left[ \left(a_s + \frac{1}{2}\beta_{12}a_e\right)k_{12} + \right. \\
 & + \left. \left(b_s + \beta_{13}b_e\right)k_{13} + b_3 k_{23} \right] \left[ \gamma_1 J_1''(x_{12}) - \delta_1 J_1'(x_{12}) + \gamma_2 J_1''(x_{13}) - \delta_2 J_1'(x_{13}) + \right. \\
 & + \gamma_3 J_3''(x_{13}) - \delta_3 J_3'(x_{13}) + \gamma_4 J_1''(x_{23}) - \delta_4 J_1'(x_{23}) + \gamma_5 J_3''(x_{23}) - \\
 & \left. - \delta_5 J_3'(x_{23}) \right] \},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= 2b_s^0 a_s + \beta_{13} b_e a_2 + \beta_{12} b_s^0 a_e, & \delta_1 &= a_{13} b_e a_2 + a_{12} b_s^0 a_e \\
 \gamma_2 &= b_s \left(a_s + \frac{1}{2}\beta_{12} a_e\right) + \beta_{13} b_e a_2, & \delta_2 &= \frac{1}{2} a_{12} a_e b_s + a_{13} b_e a_2 \\
 \gamma_3 &= b_s (b_3 + \beta_{13} b_e) + \beta_{12} (b_e)^2, & \delta_3 &= b_e (a_{13} b_s + a_{12} b_e) \\
 \gamma_4 &= b_3 \left(a_s + \frac{1}{2}\beta_{12} a_e\right), & \delta_4 &= \frac{1}{2} a_{12} b_3 a_e \\
 \gamma_5 &= b_3 (b_s + \beta_{13} b_e), & \delta_5 &= a_{13} b_3 b_e
 \end{aligned}$$

Интерференция диаграмм 1г с диаграммами 1б:

$$(d\sigma/d\Gamma)_{6\Gamma} = 2\left\{\frac{1}{2}a_{12}a_e k_{12} + a_{13}b_e k_{13}\right\}(\nu_{11}k_{12}^2 + \nu_{12}k_{13}^2 + \nu_{13}k_{23}^2) + \\ + \left\{(a_s + \frac{1}{2}\beta_{12}a_e)k_{12} + (b_s + \beta_{13}b_e)k_{13} + b_3 k_{23}\right\}(\nu_{14}k_{12}^2 + \nu_{15}k_{13}^2 + \nu_{16}k_{23}^2)\},$$

где  $\nu_{11} = \frac{1}{3}(2 - \beta_{12})u_1 + \frac{1}{3}(1 + \beta_{13})u_3$

$$\nu_{12} = \frac{1}{3}(2 - \beta_{12})(v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}w_1) + \frac{1}{3}(1 + \beta_{12})(v_3 + \frac{1}{\sqrt{5}}w_3)$$

$$\nu_{13} = \frac{1}{3}(2 - \beta_{12})(v_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}w_1) + \frac{1}{3}(1 + \beta_{12})(v_3 - \frac{1}{\sqrt{5}}w_3)$$

$$\nu_{14} = \frac{1}{3}a_{12}(u_1 - u_3), \quad \nu_{15} = \frac{1}{3}a_{12}(v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}w_1 - v_3 - \frac{1}{\sqrt{5}}w_3)$$

$$\nu_{16} = \frac{1}{3}a_{12}(v_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}w_1 - v_3 + \frac{1}{\sqrt{5}}w_3)$$

Отметим, что неопределенные коэффициенты  $C$ , содержащиеся в диаграммах типа 1г, 1ж, 1з, выражены в интерференционных членах  $(d\sigma/d\Gamma)_{6\Gamma}$ ,  $(d\sigma/d\Gamma)_{аж}$ ,  $(d\sigma/d\Gamma)_{аэ}$  через шесть изотопических коэффициентов  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$ ,  $u_3$ ,  $v_3$ ,  $w_3$ .

В квадрат матричного элемента реакции ( $\bar{I}$ ) входит сумма приведенных кубических интерференционных членов

$$(d\sigma/d\Gamma)_3 = (d\sigma/d\Gamma)_{ад} + (d\sigma/d\Gamma)_{ае} + (d\sigma/d\Gamma)_{аж} + (d\sigma/d\Gamma)_{аэ} + \\ + (d\sigma/d\Gamma)_{аи} + (d\sigma/d\Gamma)_{бв} + (d\sigma/d\Gamma)_{бг}$$

В заключение авторы выражают благодарность В.В. Анисовичу и С.А. Бунятову за полезные обсуждения.

#### Литература

1. V.N.Gribov. Nucl.Phys., 5, 653 (1958).
2. В.В. Анисович, А.А. Ансельм. УФН, 88, 287 (1966).
3. В.В. Анисович, А.А. Ансельм, В.Н. Грибов. ЖЭТФ 42, 224 (1962).
4. Ю. Нири. ЖЭТФ 46, 671 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел  
3 августа 1972 года.