СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р4 - 6590

Р.В.Джолос, В.Г.Картавенко

МЕТОД Н.Н.БОГОЛЮБОВА В ЗАДАЧЕ О ПАРНЫХ ВИБРАЦИЯХ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

Р4 - 6590

Р.В.Джолос, В.Г.Картавенко

МЕТОД Н.Н.БОГОЛЮБОВА В ЗАДАЧЕ О ПАРНЫХ ВИБРАЦИЯХ

При выделении в рамках микроскопических моделей самосогласованного поля ядра возникают серьезные трудности, связанные с тем, что используемые при этом методы (метод Хартри-Фока, u-v -преобразование Боголюбова) нарушают законы сохранения импульса, момента вращения, числа частиц. Происходит это потому, что динамические переменные, являющиеся параметрами группы симметрии гамильтониана, не выделяются из числа других динамических переменных. Поэтому после применения приближенных методов гамильтониан становится лишь приближенно инвариантным относительно преобразований, принадлежащих группе его симметрии.

В работе /I/ было показано, как, используя преобразование Н.Н.Боголюбова в теории сильной связи /2/ и метод конечных бозонных представлений фермионных операторов /3/ в случае системы фермионов, гамильтониан которой записан во вторично квантованном виде, можно выделить динамические переменные, связанные с группой симметрии гамильтониана.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением гамильтониана, в котором учтены только парные остаточные силы. В системе, описываемой таким гамильтонианом, могут возникнуть статические парные корреляции. Используемые обычно приближенные методы учитывали этот эффект так, что терялась инвариантность гамильтониана по отношению к вращению в фазовом пространстве, связанная с сохранением числа частиц. Поэтому из динамических переменных, описывающих ное представление:

$$b_s^+ \to f_s \,, \qquad b_s \to \frac{\partial}{\partial f_s} \,.$$

В этом представлении, например,

$$\hat{N} = 2 \sum_s f_s \frac{\partial}{\partial f_s} \,. \qquad (\text{I})$$

Покажем, что угол φ , канонически сопряженный оператору числа частиц, можно выделить при помощи преобразования:

$$f_s = e^{i\varphi} F_s \,.$$

Так как новых переменных на одну больше, чем старых, то необходимо наложить на F_s дополнительное условие:

$$\Psi(F_s) = const. \qquad (2)$$

Найдем выражение для $\frac{\partial}{\partial f_s}$ через новые переменные:

$$\frac{\partial}{\partial f_s} = \frac{\partial \varphi}{\partial f_s} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sum_\nu \frac{\partial F_\nu}{\partial f_s} \frac{\partial}{\partial F_\nu} \,.$$

Величину $\frac{\partial F_\nu}{\partial f_s}$ вычислим, используя соотношение $F_\nu = e^{-i\varphi} f_\nu$:

$$\frac{\partial F_\nu}{\partial f_s} = e^{-i\varphi} \delta_{\nu s} - i \frac{\partial \varphi}{\partial f_s} F_\nu \,.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial f_s} = e^{-i\varphi} \frac{\partial}{\partial F_s} + \frac{\partial \varphi}{\partial f_s} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - i \sum_\nu F_\nu \frac{\partial}{\partial F_\nu} \right).$$

ное представление:

$$b_s^+ \to f_s \quad , \qquad b_s \to \frac{\partial}{\partial f_s} \quad .$$

В этом представлении, например,

$$\hat{N} = 2 \sum_s f_s \frac{\partial}{\partial f_s} \quad . \tag{1}$$

Покажем, что угол φ, канонически сопряженный оператору числа частиц, можно выделить при помощи преобразования:

$$f_s = e^{i\varphi} F_s \quad .$$

Так как новых переменных на одну больше, чем старых, то необходимо наложить на F_s дополнительное условие:

$$\Psi(F_s) = const. \tag{2}$$

Найдем выражение для $\frac{\partial}{\partial f_s}$ через новые переменные:

$$\frac{\partial}{\partial f_s} = \frac{\partial \varphi}{\partial f_s} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sum_\nu \frac{\partial F_\nu}{\partial f_s} \frac{\partial}{\partial F_\nu} \quad .$$

Величину $\frac{\partial F_\nu}{\partial f_s}$ вычислим, используя соотношение $F_\nu = e^{-i\varphi} f_\nu$:

$$\frac{\partial F_\nu}{\partial f_s} = e^{-i\varphi} \delta_{\nu s} - i \frac{\partial \varphi}{\partial f_s} F_\nu \, .$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial f_s} = e^{-i\varphi} \frac{\partial}{\partial F_s} + \frac{\partial \varphi}{\partial f_s} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - i \sum_\nu F_\nu \frac{\partial}{\partial F_\nu} \right).$$

Чтобы найти выражение для $\dfrac{\partial \varphi}{\partial f_s}$, необходимо использовать дополнительное условие (2):

$$0 = \frac{\partial \Psi}{\partial f_s} = \sum_\nu \frac{\partial F_\nu}{\partial f_s}\frac{\partial \Psi}{\partial F_\nu} = e^{-i\varphi}\frac{\partial \Psi}{\partial F_s} - i\frac{\partial \varphi}{\partial f_s}\sum_\nu F_\nu \frac{\partial \Psi}{\partial F_\nu} .$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial f_s} = -i\, e^{-i\varphi}\frac{1}{\sum\limits_\nu F_\nu \dfrac{\partial \Psi}{\partial F_\nu}}\frac{\partial \Psi}{\partial F_s} .$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial f_s} = e^{-i\varphi}\frac{\partial}{\partial F_s} + e^{-i\varphi}\frac{1}{2\sum\limits_\nu F_\nu \dfrac{\partial \Psi}{\partial F_\nu}}\frac{\partial \Psi}{\partial F_s}\left(-2i\frac{\partial}{\partial \varphi} - 2\sum_\nu F_\nu \frac{\partial}{\partial F_\nu}\right). \quad (3)$$

Легко проверить, что $[\hat{H}, \Psi]=0$, т.е. дополнительное условие совместно с гамильтонианом. Подставляя (3) в (I), получаем:

$$\hat{N} = -2i\frac{\partial}{\partial \varphi} .$$

Таким образом, в отличие от (I), где оператор $\hat{N}$ зависел от всех динамических переменных, сейчас он выражается только через угол φ. Введем обозначение:

$$2\sum_s F_s \frac{\partial}{\partial F_s} \equiv \hat{n} , \qquad 2\sum_s F_s \frac{\partial \Psi}{\partial F_s} = [\hat{n}, \Psi].$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial f_s} = e^{-i\varphi}\left\{\frac{\partial}{\partial F_s} + \frac{1}{[\hat{n}, \Psi]}\frac{\partial \Psi}{\partial F_s}\left(\hat{N} - \hat{n}\right)\right\}.$$

В новых переменных гамильтониан имеет вид (с точностью до несущественных членов):

$$\hat{H} = 2\sum_{s}(\varepsilon_s - \lambda)\, F_s\left\{\frac{\partial}{\partial F_s} + \frac{1}{[\hat{n},\Psi]}\,\frac{\partial\Psi}{\partial F_s}\,(\hat{N} - \hat{n})\right\} -$$

$$- G\sum_{s}\Omega_s^{1/2} F_s\left\{1 - \frac{F_s\left(\frac{\partial}{\partial F_s} + \frac{1}{[\hat{n},\Psi]}\frac{\partial\Psi}{\partial F_s}(\hat{N} - \hat{n})\right)}{\Omega_s}\right\}\times$$

$$\times \sum_{s'}\Omega_{s'}^{1/2}\left\{\frac{\partial}{\partial F_{s'}} + \frac{1}{[\hat{n},\Psi]}\,\frac{\partial\Psi}{\partial F_{s'}}\,(\hat{N} - \hat{n})\right\}.$$

Так как $\hat{H}$ не зависит от φ явным образом, то $[\hat{H},\hat{N}]$, и мы можем заменить оператор $\hat{N}$ его собственным значением N .

Выберем в качестве функции Ψ какую-либо собственную функцию $\hat{n}$:

$$[\hat{n},\Psi] = n\,\Psi .$$

Это может быть любая функция вида:

$$\prod_{s} F_s^{\,n_s}\,, \quad 2\sum_{s} n_s = n .$$

Тогда можно показать, что

$$[\hat{H},\hat{n}] = 0,$$

и оператор $\hat{n}$ также можно заменить его собственным значением, которое удобно выбрать равным числу частиц N . Это существенно упрощает гамильтониан:

$$\hat{H} = \sum_{s} 2(\varepsilon_s - \lambda) F_s\frac{\partial}{\partial F_s} - G\sum_{s}\Omega_s^{1/2} F_s\left(1 - \frac{F_s\frac{\partial}{\partial F_s}}{\Omega_s}\right)\times\sum_{s'}\Omega_{s'}^{1/2}\frac{\partial}{\partial F_{s'}}\,,$$

но вносит еще одно дополнительное условие:

$$N = 2\sum_s F_s \frac{\partial}{\partial F_s} .$$

Следующий этап работы состоит в выделении самосогласованного поля ядра с помощью канонического преобразования:

$$F_s \to \Gamma_s + \beta_s^+ , \quad \frac{\partial}{\partial F_s} \longrightarrow \Lambda_s + \beta_s ,$$

где Γ_s, Λ_s – c – числа.

Операторы бозонов β_s^+, β_s описывают парные вибрации. Мы ограничимся рассмотрением парных вибраций в гармоническом приближении, сохранив в гамильтониане только линейные и квадратичные по бозонам β_s^+, β_s члены:

$$\begin{aligned}
\hat{H} \simeq\ & const + 2\sum_s(\varepsilon_s-\lambda)\Lambda_s\beta_s^+ + G\sum_{s'}\Omega_{s'}^{1/2}\Lambda_{s'}\times\sum_s\Omega_s^{-1/2}\Gamma_s^2\beta_s + \\
&+ 2\sum_s(\varepsilon_s-\lambda)\Gamma_s\beta_s - G\sum_{s'}\Omega_{s'}^{1/2}\Lambda_{s'}\times\sum_s\Omega_s^{1/2}\left(1-\frac{2\Gamma_s\Lambda_s}{\Omega_s}\right)\beta_s^+ - \\
&- G\sum_s\Omega_s^{1/2}\Gamma_s\left(1-\frac{\Gamma_s\Lambda_s}{\Omega_s}\right)\times\sum_{s'}\Omega_{s'}^{1/2}\beta_{s'} + 2\sum_s(\varepsilon_s-\lambda)\beta_s^+\beta_s + \\
&+ 2G\sum_{s'}\Omega_{s'}^{1/2}\Lambda_{s'}\times\sum_s\Omega_s^{-1/2}\Gamma_s\beta_s^+\beta_s + G\sum_{s'}\Omega_{s'}^{1/2}\Lambda_{s'}\times\sum_s\Omega_s^{-1/2}\Lambda_s\beta_s^+\beta_s^+ - \\
&- G\sum_s\Omega_s^{1/2}\left\{\left(1-\frac{2\Gamma_s\Lambda_s}{\Omega_s}\right)\beta_s^+ - \frac{\Gamma_s^2}{\Omega_s}\beta_s\right\}\times\sum_{s'}\Omega_{s'}^{1/2}\beta_{s'} .
\end{aligned} \tag{4}$$

В аналогичном приближении

$$\hat{n} \simeq 2\sum_s\Gamma_s\Lambda_s + 2\sum_s(\Gamma_s\beta_s + \Lambda_s\beta_s^+), \tag{5}$$

и дополнительные условия запишутся следующим образом:

$$N = 2\sum_s \Gamma_s \Lambda_s \, , \qquad \sum_s (\Gamma_s \beta_s + \Lambda_s \beta_s^+) = 0,$$

$$\Psi = const \, .$$

В гамильтониане (4) приравняем нулю коэффициенты при β_s^+ и β_s :

$$2(\varepsilon_s - \lambda) - \Delta\left(1 - \frac{2\Gamma_s \Lambda_s}{\Omega_s}\right)\Omega_s^{1/2} = 0,$$

$$2(\varepsilon_s - \lambda) - \bar{\Delta}\,\Omega_s^{1/2} + \Delta\,\Omega_s^{-1/2}\,\Gamma_s^2 = 0,$$

где

$$\Delta \equiv G \sum_s \Omega_s^{1/2} \Lambda_s \, ,$$

$$\bar{\Delta} \equiv G \sum_s \Omega_s^{1/2} \Gamma_s \left(1 - \frac{\Gamma_s \Lambda_s}{\Omega_s}\right).$$

Это позволит нам найти Γ_s и Λ_s :

$$\Gamma_s = \Omega_s^{1/2} \frac{E_s - (\varepsilon_s - \lambda)}{\bar{\Delta}} \equiv \Omega_s^{1/2} \frac{v_s}{u_s} \, ,$$

$$\Lambda_s = \Omega_s^{1/2} \frac{\bar{\Delta}}{2E_s} \equiv \Omega_s^{1/2} u_s v_s \, , \qquad E_s \equiv \sqrt{(\varepsilon_s - \lambda)^2 + \Delta\bar{\Delta}} \, ,$$

$$u_s^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon_s - \lambda}{E_s}\right), \qquad v_s^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon_s - \lambda}{E_s}\right),$$

$$1 = \frac{G}{2} \sum_s \frac{\Omega_s}{E_s} \, , \qquad N = 2\sum_s \Omega_s v_s^2 \, .$$

Из полученных выше уравнений можно определить лишь произведение $\Delta \times \bar{\Delta}$. Удобно полагать $\Delta = \bar{\Delta}$, хотя никакие физические результаты не зависят от отношения $\frac{\bar{\Delta}}{\Delta}$.

Мы получили обычные результаты сверхтекучей модели ядра. Квадратичная по бозонам часть гамильтониана (4) и еще не использованные дополнительные условия имеют вид:

$$H_{11} = 2\sum_s E_s \beta_s^+ \beta_s + \Delta \sum_s \Omega_s^{-1/2} \Lambda_s \beta_s^+ \beta_s -$$

$$- G \sum_s \Omega_s^{1/2} \left\{ \left(1 - \frac{2\Gamma_s \Lambda_s}{\Omega_s}\right) \beta_s^+ - \frac{\Gamma_s^2}{\Omega_s} \beta_s \right\} \times \sum_{s'} \Omega_{s'}^{1/2} \beta_{s'}, \quad (6)$$

$$\sum_s (\Gamma_s \beta_s + \Lambda_s \beta_s^+) = 0, \qquad \Psi = const.$$

Поскольку этот гамильтониан неэрмитов, мы диагонализуем его с помощью линейного канонического, но не унитарного преобразования [4]:

$$\beta_s^+ = \sum_k (\tilde{\psi}_s^k \beta_k^+ + \varphi_s^k \beta_k),$$

$$\beta_s = \sum_k (\psi_s^k \beta_k + \tilde{\varphi}_s^k \beta_k^+), \qquad (7)$$

$$\sum_s (\tilde{\psi}_s^k \psi_s^{k'} - \tilde{\varphi}_s^k \varphi_s^{k'}) = \delta_{kk'}.$$

В результате мы приведем гамильтониан к виду:

$$H_{11} = \sum_k \omega_k \beta_k^+ \beta_k,$$

или в представлении операторов P_k, Q_k:

$$P_k = \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} (\beta_k^+ + \beta_k), \quad Q_k = \frac{-i}{\sqrt{2\omega_k}} (\beta_k^+ - \beta_k),$$

$$H_{11} = \frac{1}{2} \sum_k (P_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2). \quad [P_k, Q_{k'}] = -i\,\delta_{kk'}.$$

Выражения для коэффициентов $\Psi_s^K, \tilde{\Psi}_s^K, \varphi_s^K, \tilde{\varphi}_s^K$ получаются следующими:

$$\tilde{\Psi}_s^K(\omega_K) = -\varphi_s^K(-\omega_K), \quad \tilde{\varphi}_s^K(\omega_K) = -\Psi_s^K(-\omega_K),$$

$$\varphi_s^K(\omega_K) = -\frac{C_1^K(\omega_K) + C_2^K(\omega_K)\Gamma_s^2}{2E_s + \omega_K},$$

$$\Psi_s^K(\omega_K) = \frac{C_2^K(\omega_K)(1-2\Gamma_s\Lambda_s)}{2E_s - \omega_K} + 2\Delta\Lambda_s\frac{C_1^K(\omega_K) + C_2^K(\omega_K)\Gamma_s^2}{4E_s^2 - \omega_K^2},$$

$$C_1^K(\omega_K) = C_2^K(\omega_K)\left(1 - \frac{\omega_K^2}{2\Delta^2} - \frac{\omega_K x}{\Delta^2}\right),$$

$$x = \frac{\sum\limits_s \frac{\varepsilon_s - \lambda}{E_s(4E_s^2 - \omega_K^2)}}{\sum\limits_s \frac{1}{E_s(4E_s^2-\omega_K^2)}},$$

$$1 = \omega_K C_2^K(\omega_K)C_2^K(-\omega_K) \times \sum_s\left(\frac{8E_s(1-2\Gamma_s\Lambda_s)\left(1-\frac{\omega_K^2}{2\Delta^2}+\Gamma_s^2\right)}{(4E_s^2-\omega_K^2)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\frac{x}{\Delta^2}(1-2\Gamma_s\Lambda_s)(4E_s^2+\omega_K^2) + 4\Delta\Lambda_s\left[\left(1-\frac{\omega_K^2}{2\Delta^2}+\Gamma_s^2\right)^2 - \frac{x^2\omega_K^2}{\Delta^4}\right]}{(4E_s^2-\omega_K^2)^2}\right),$$

где ω_K являются корнями секулярного уравнения:

$$\frac{1}{4}\omega_K^2(\omega_K^2 - 4\Delta^2)\left(\sum_s \frac{1}{E_s(4E_s^2-\omega_K^2)}\right)^2 = \omega_K^2\left(\sum_s \frac{\varepsilon_s - \lambda}{E_s(4E_s^2-\omega_K^2)}\right)^2. \qquad (8)$$

Видно, что у уравнения (8) имеется решение $\omega_0 = 0$, поэтому результирующий гамильтониан удобно записать следующим образом:

$$H_{11} = \frac{P_0^2}{2} + \sum_{K=1}^{\Omega}\omega_K\beta_K^+\beta_K, \quad \omega_K \neq 0, \ K \geq 1.$$

Оператор P_o описывает так называемую "духовую" ветвь возбуждения /5/ и имеет следующую структуру:

$$P_o = \Delta^{-1}\left(\lim_{\omega\to 0}\sqrt{2\omega}\; C_2^{\,o}(\omega)\right) \times \sum_S (\Lambda_s \beta_s^+ + \Gamma_s \beta_s). \qquad (9)$$

Сравнивая этот результат с (6), видим, что $P_o = 0$. Таким образом, дополнительные условия запрещают появление "духовой" ветви возбуждений.

Так как $[\hat{n}, \Psi] = n\Psi$, а в гармоническом приближении (как следует из (5) и (9)):

$$\hat{n} \simeq 2\sum_s \Gamma_s \Lambda_s + const \times P_o ,$$

то $\Psi = e^{i n \frac{Q_o}{const}}$, так как $[P_o, Q_o] = -i$. Из требования $\Psi = const$ (2) следует, что $Q_o = const$. Не снижая общности, можно полагать $Q_o = 0$. После этого, используя (7), мы получим выражения для фермионных операторов N_s, A_s, A^+_s только через $e^{i\varphi}$, $\hat{N}$, β^+_K, β_K с $K \neq 0$, поскольку мы должны всюду полагать $P_o = 0$, $Q_o = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р.В.Джолос, В.К.Картавенко. Сообщение ОИЯИ Р4 - 6543 (1972).
2. Н.Н.Боголюбов. Украинский математический журнал, 2, 3 (1950). Избранные труды, т. 2, стр. 499, Киев, 1970.
3. D.Janssen, F.Dönau, S.Frauendorf and R.V.Jolos, Nucl.Phys. A172, 145 (1971).
4. V.G.Kartavenko, R.V.Jolos, F.Dönau, D.Janssen, Preprint JINR E4-6127 (1971).
5. Р.В.Джолос, В.Рыбарска. Сообщение ОИЯИ, Р4-6258 (1972).

Рукопись поступила в издательский отдел
11 июля 1972 г.