СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р4 - 6543

Р.В.Джолос, В.Г.Картавенко

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

К ОБОСНОВАНИЮ КРЕНКИНГ-МОДЕЛИ

1972

P4 - 6543

Р.В.Джолос, В.Г.Картавенко

К ОБОСНОВАНИЮ КРЕНКИНГ-МОДЕЛИ

Для описания вращательных возбуждений ядер предложены различные методы /1/. Благодаря их применению удалось получить ряд интересных результатов. Но несмотря на отдельные успехи, общим недостатком этих методов следует признать их недостаточную обоснованность. Так как эти методы с физической точки зрения по-разному объясняют обнаруженные в последнее время аномалии в поведении ротационных полос, то вопросы их обоснования имеют принципиальное значение.

Что касается методов, основывающихся на феноменологических моделях, то имея надежную микроскопическую теорию, всегда можно ответить на вопрос - насколько эти методы обоснованы.

При описании вращательных состояний в рамках микроскопических моделей обычно используют гамильтониан ядра, записанный во "внутренней" системе координат /т.е. в системе координат, вращающейся вместе со средним полем ядра/, но не выводят его. Поэтому нельзя сказать, все ли связи вращательного движения с внутренним учтены, или часть их не принята во внимание. Так как все особенности в поведении ротационных полос объясняются связью вращательного движения с внутренним, то этот вопрос принципиально важен. Таким образом, для обоснования микроскопических моделей крайне важно научиться переходить от гамильтониана, записанного в лабораторной системе, к гамильтониану во "внутренней" системе координат.

Вопрос преобразования к "внутренней" координатной системе тесно связан с темн трудностями, которые возникают при выделении в рамках микроскопических моделей самосогласованного поля ядра. Дело в том, что используемые при этом методы /метод Хартри-Фока, $u-v$ преобразование Боголюбова/ нарушают законы сохранения импульса, момента вращения, числа частиц. Происходит это потому, что динамические переменные, являющиеся параметрами группы симметрии гамильтониана, не выделяются из числа прочих динамических переменных. Поэтому после применения приближенных методов гамильтониан лишь приблизительно правильно зависит от этих переменных, и в результате теряет инвариантность по отношению к преобразованиям, принадлежащим группе его симметрии. Если бы удалось выделить переменные, являющиеся параметрами группы симметрии гамильтониана, и лишь после этого применить приближенные методы к гамильтониану, зависящему от оставшихся переменных, то нарушения законов сохранения не произошло бы. Выделение же переменных, являющихся параметрами группы симметрии, и есть, по-существу, переход к "внутренней" координатной системе.

Задача выделения динамических переменных, связанных с группой симметрии гамильтониана, была принципиально решена в работе Н.Н.Боголюбова /2/. Метод Н.Н.Боголюбова заключается в каноническом преобразовании переменных, в результате которого среди новых переменных появляются параметры группы симметрии гамильтониана. В силу инвариантности исходного гамильтониана в новом гамильтониане эти переменные оказываются циклическими. Вопрос о преобразовании оставшихся переменных уже не связан с трансформационными свойствами гамильтониана. Этот метод применялся к решению различных задач теории твердого тела и теории поля /3/. К сожалению, метод Н.Н.Боголюбова нельзя применить непосредственно в случае системы фермионов, гамильтониан которой записан во вторично-квантованном виде. /Задача выделения параметров группы симметрии в случае гамильтониана, записанного в терминах координат и импульсов отдельных нуклонов, рассматривалась в работах /4/./

Однако задачу можно решить, если использовать конечные бозонные представления фермионных операторов. Эти представления были предложены и подробно рассмотрены в работе /5/, где было показано, что для бинарных фермионных операторов справедливо следующее бозонное представление, удовлетворяющее точно всем коммутационным соотношениям:

$$a^+_{sm_s} a_{s'm_{s'}} \to \sum_{\nu m_\nu} b^+_{sm_s,\nu m_\nu} b_{s'm_{s'},\nu m_\nu},$$

$$a^+_{sm_s} a^+_{s'm_{s'}} \to b^+_{sm_s,s'm_{s'}} - \sum_{\substack{\nu' m_{\nu'}\\ \nu'' m_{\nu''}}} b^+_{sm_s,\nu m_\nu} b^+_{s'm_{s'},\nu' m_{\nu'}} b_{\nu m_\nu,\nu' m_{\nu'}},$$

$a_{s'm_{s'}},\ a_{sm_s} \to b_{sm_s,\ s'm_{s'}}$, где

$a^{+}_{sm_s}\ (a_{sm_s})$ - операторы рождения /уничтожения/ фермионов;

$b^{+}_{sm_s,\nu m_\nu}(b_{sm_s,\nu m_\nu})$- операторы рождения /уничтожения/ бозонов:

$$[b_{sm_s,\nu m_\nu},\ b_{s'm_{s'},\nu' m_{\nu'}}] = \delta_{sm_s,s'm_{s'}}\delta_{\nu m_\nu,\nu' m_{\nu'}} -$$

$$-\ \delta_{sm_s,\nu' m_{\nu'}}\delta_{s'm_{s'},\nu m_\nu} \qquad b_{sm_s,\nu m_\nu} = -b_{\nu m_\nu,sm_s}$$

$s \equiv nlj$- набор квантовых чисел, характеризующих одночастичное состояние; m_s - проекция одночастичного момента на ось z лабораторной системы координат.

Удобно перейти к бозе-операторам, имеющим определенными момент и его проекцию:

$$b_{sm_s,\nu m_\nu} = \sqrt{2}\sum_{\lambda\mu} C^{\lambda\mu}_{j_s m_s j_\nu m_\nu}\, b_{\lambda\mu}(s\nu)\,.$$

Для операторов бозонов известно дифференциальное представление:

$$b^{+}_{\lambda\mu}(s\nu) \to f_{\lambda\mu}(s\nu)\,, \qquad b_{\lambda\mu}(s\nu) \to \frac{\partial}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)}\,.$$

Поэтому мы можем выразить гамильтониан системы через обобщенные координаты $f_{\lambda\mu}(s\nu)$ и импульсы $\dfrac{\partial}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)}$ и воспользоваться идеей преобразования Н.Н.Боголюбова. Приведем для примера выражения операторов числа частиц и момента вращения через новые переменные:

$$\hat{N} = \sum_{\lambda\mu s\nu} 2f_{\lambda\mu}(s\nu)\frac{\partial}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)}\,, \qquad /1/$$

$$\hat{l}_\mu = \sum_{\lambda\eta\eta' s\nu}\sqrt{\lambda(\lambda+1)}\, C^{\lambda\eta}_{\lambda\eta' 1\mu}\, f_{\lambda\eta}(s\nu)\frac{\partial}{\partial f_{\lambda\eta'}(s\nu)}\,. \qquad /2/$$

Отметим, что операторы $\hat{N}$ и $\hat{I}_\mu$ зависят от всех динамических переменных $f_{\lambda\mu}(s\nu)$, которые входят в задачу.

В гамильтониане, записанном в лабораторной системе координат, учтем только парные и квадрупольные остаточные силы:

$$H = H_0 + H_{pair} + H_{QQ},$$

$$H_0 = \sum_s (\epsilon_s - \lambda) N_s \; ; \qquad H_{pair} = -\frac{G}{4} A^+ A \; ;$$

$$H_{QQ} = -\kappa \sum_\mu (-1)^\mu Q_{2\mu} Q_{2-\mu};$$

$$N_s = \sum_{m_s} a^+_{sm_s} a_{sm_s},$$

$$A = \sum_{sm_s} (-1)^{j_s - m_s} a^+_{s\, m_s} a^+_{s\, -m_s}, \qquad A = (A^+)^+,$$

$$Q_{2\mu} = \sum_{ss'm_s m_{s'}} \langle sm_s | r^2 Y_{2\mu} | s'm_{s'} \rangle a^+_{sm_s} a_{s'm_{s'}} .$$

В представлении операторов $f_{\lambda\mu}(s\nu)$, $\dfrac{\partial}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)}$:

$$N_s = \sum_{\lambda\mu\nu} 2 f_{\lambda\mu}(s\nu) \frac{\partial}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)},$$

$$A^+ = \sum_s 2\sqrt{j_s + \frac{1}{2}}\, f_{00}(ss) - 2\sqrt{2} \sum_{\substack{ss'\nu\lambda\lambda' \\ \lambda''\mu\mu'\mu''}} \sqrt{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)} \times$$

$$\times (-1)^{j_s + j_\nu + \lambda + \lambda''} \begin{Bmatrix} \lambda'' & j_{s'} & j_\nu \\ j_s & \lambda' & \lambda \end{Bmatrix} C^{\lambda''\mu''}_{\lambda\mu\lambda'\mu'} f_{\lambda\mu}(ss') f_{\lambda'\mu'}(s\nu) \frac{\partial}{\partial f_{\lambda''\mu''}(s'\nu)},$$

$$A = \sum_s 2\sqrt{j_s + \frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial f_{00}(ss)},$$

$$Q_{2\mu} = 2 \sum_{\substack{ss'\nu\lambda \\ \lambda'\eta\eta'}} (-1)^{j_s + j_\nu - \lambda'} \sqrt{2\lambda' + 1} < s || r^2 Y_2 || s' > \begin{Bmatrix} j_\nu & j_{s'} & \lambda' \\ 2 & \lambda & j_s \end{Bmatrix} \times$$

$$\times C^{\lambda\eta}_{\lambda'\eta' 2\mu} f_{\lambda\eta}(s\nu) \frac{\partial}{\partial f_{\lambda'\eta'}(s'\nu)} .$$

В снстеме, которая описывается таким гамильтонианом, могут возникнуть статические парные корреляции и квадрупольная деформация. Используемые до сих пор прнближенные методы учитывали этн эффекты так, что терялась инварнантность гамильтониана по отношению к вращению в фазовом пространстве /связанная с сохранением числа частиц/ и в обычном трехмерном пространстве. Поэтому из динамических переменных, описывающих ядро, необходимо с самого начала выделить угол ϕ, канонически сопряженный оператору числа частиц $\hat{N} = -2i \frac{\partial}{\partial \phi}$, и углы Эйлера θ_l, через которые /н только через которые/ выражается оператор момента вращения. Выделив эти переменные, мы перейдем к "внутренней" координатной системе,не нарушив законов сохранения числа частиц и момента вращения.

Покажем, что эта задача решается при помощи следующего преобразования переменных:

$$f_{\lambda\mu}(s\nu) = e^{i\phi} \sum_k D^\lambda_{\mu k}(\theta)_{\lambda k}(s\nu) , \qquad /3/$$

$D^\lambda_{\mu k}$ - - функция Вигнера. Так как новых переменных на четыре больше, чем старых, то необходимо наложить на $F_{\lambda k}(s\nu)$ четыре дополнительных условия:

$$\Psi(F_{\lambda k}(s\nu) - \Gamma_{\lambda k}(s\nu))| = 0 , \Phi_\eta (F_{\lambda k}(s\nu) - \Gamma_{\lambda k}(s\nu) = 0, \quad \eta = 1,2,3 ,$$

где c - числа $\Gamma_{\lambda k}(s\nu)$ будут определены в дальнейшем. Конкретный вид дополнительных условий нам пока не важен. Найдем выражение для $\dfrac{\partial}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)}$ через новые переменные:

$$\frac{\partial}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)} = \frac{\partial\phi}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)}\frac{\partial}{\partial\phi} + \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial\theta_l}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)}\frac{\partial}{\partial\theta_l} +$$

$$+ \sum_{\lambda' k s'\nu'}\frac{\partial F_{\lambda' k'}(s'\nu')}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)}\cdot\frac{\partial}{\partial F_{\lambda' k'}(s'\nu')}.$$

Величину $\dfrac{\partial F_{\lambda' k'}(s'\nu')}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)}$ вычислим, используя соотношение, обратное /3/:

$$F_{\lambda k}(s\nu) = e^{-i\phi}\sum_{\mu} D^{\lambda *}_{\mu k} f_{\lambda\mu}(s\nu),$$

и правило дифференцирования D -функций [6]:

$$\frac{\partial D^{\lambda}_{\mu k}}{\partial\theta_l} = i\sum_{k'\eta} D^{\lambda}_{\mu k'}\sqrt{\lambda(\lambda+1)}\, C^{\lambda k}_{\lambda k' 1\eta}\, q_{\eta l}(\theta).$$

Тогда

$$\frac{\partial F_{\lambda' k'}(s'\nu')}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)} = e^{-i\phi} D^{\lambda *}_{\mu k'}\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{s\nu, s'\nu'} - i\frac{\partial\phi}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)} F_{\lambda' k'}(s'\nu') - \qquad /4/$$

$$- i\sum_{k''\eta l}\frac{\partial\theta_l}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)}\sqrt{\lambda'(\lambda'+1)}\, C^{\lambda' k''}_{\lambda' k' 1\eta}\, q_{\eta l}\, F_{\lambda' k''}(s'\nu').$$

В результате для $\dfrac{\partial}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)}$ мы получаем:

$$\frac{\partial}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)} = e^{-i\phi}\sum_{k'} D^{\lambda *}_{\lambda k'}\frac{\partial}{\partial F_{\lambda k'}(s\nu)} + i\frac{\partial\phi}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)}\left(-i\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{\hat{n}}{2}\right) + \qquad /5/$$

$$+ \sum_{l}\frac{\partial\theta_l}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_l} - i\sum_{\eta} q_{\eta l}(\theta)\hat{L}_{\eta}\right),$$

где

$$\hat{n} = 2\sum_{\lambda k s\nu} F_{\lambda k}(s\nu)\frac{\partial}{\partial F_{\lambda k}(s\nu)}, \qquad /5'/$$

$$L_{\eta} = \sum_{\substack{\lambda k k' \\ s\nu}}\sqrt{\lambda(\lambda+1)}\, C^{\lambda k}_{\lambda k' 1\eta} F_{\lambda k}(s\nu)\frac{\partial}{\partial F_{\lambda k'}(s\nu)}. \qquad /6/$$

Если воспользоваться хорошо известным выражением для операторов проекций момента на оси внутренней системы координат :

$$\hat{\mathfrak{L}}_\eta = -i \sum_l q^{-1}_{\eta l} \frac{\partial}{\partial \theta_l},$$

$$\hat{\mathfrak{L}}_\eta D^\lambda_{\mu k} = \sum_{k'} D^\lambda_{\mu k'} \sqrt{\lambda(\lambda+1)}\; C^{\lambda k}_{\lambda k' 1 \eta},$$

$$\sum_\eta (-1)^\eta \hat{\mathfrak{L}}_\eta \hat{\mathfrak{L}}_{-\eta} D^\lambda_{\mu k} = \sqrt{\lambda(\lambda+1)}\, D^\lambda_{\mu k},$$

то

$$\frac{\partial}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)} = i \frac{\partial \phi}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)}\left(-i \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{\hat{n}}{2}\right) + i \sum_l \frac{\partial \theta_l}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)} q_{\eta l} (\hat{\mathfrak{L}}_\eta - \hat{L}_\eta) +$$

$$+ e^{-i\phi} \sum_{k'} D^{\lambda *}_{\mu k'} \frac{\partial}{\partial F_{\lambda k'}(s\nu)}.$$

Чтобы найти выражения для $\frac{\partial \phi}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)}$ и $\frac{\partial \theta_l}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)}$, необходимо использовать дополнительные условия, из которых следует, что

$$\frac{\partial \Phi_\eta}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)} = \sum_{\lambda' k' s' \nu'} \frac{\partial F_{\lambda' k'}(s'\nu')}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)} \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial F_{\lambda' k'}(s'\nu')} = 0 \qquad /7/$$

и аналогично для Ψ. Используя /7/, /4/, /5/ и /6/, получаем:

$$-\frac{i}{2} \frac{\partial \phi}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)} [\hat{n}, \Phi_\eta] + e^{-i\phi} \sum_k D^{\lambda *}_{\mu k} \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial F_{\lambda k}(s\nu)} =$$

$$= i \sum_{\eta' l} \frac{\partial \theta_l}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)} q_{\eta' l} [\hat{L}_{\eta'}, \Phi_\eta]$$

и аналогичное уравнение с заменой Φ_η на Ψ. Введя матрицу, обратную $\chi_{\eta'\eta} = [\hat{L}_{\eta'}, \Phi_\eta]$, получим:

$$i \sum_l \frac{\partial \theta_l}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)} q_{\eta' l} = -\frac{i}{2} \frac{\partial \phi}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)} \sum_\eta [\hat{n}, \Phi_\eta] X^{-1}_{\eta'\eta} +$$

$$+ e^{-i\phi} \sum_k D^{\lambda *}_{\mu k} \sum_\eta \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial F_{\lambda k}(s\nu)} X^{-1}_{\eta'\eta} \qquad /8/$$

$$i \frac{\partial \phi}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)} = e^{-i\phi} \frac{2 \sum_k D^{\lambda *}_{\mu k} \left(\sum_{\eta\eta'} \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial F_{\lambda k}(s\nu)} X^{-1}_{\eta'\eta} [\hat{L}_{\eta'}, \Psi] - \frac{\partial \Psi}{\partial F_{\lambda k}(s\nu)} \right)}{\sum_{\eta\eta'} [\hat{n}, \Phi_\eta] X^{-1}_{\eta'\eta} [\hat{L}_{\eta'}, \Psi] - [\hat{n}, \Psi]}. \qquad /9/$$

Подставляя /8/ и /9/ в выражение для $\frac{\partial}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)}$, находим:

$$\frac{\partial}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)} = e^{-i\phi} \sum_k D^{\lambda *}_{\mu k} \Big\{ \frac{\partial}{\partial F_{\lambda k}(s\nu)} + \sum_{\eta\eta'} \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial F_{\lambda k}(s\nu)} X^{-1}_{\eta'\eta} (\hat{\mathfrak{L}}_{\eta'} - \hat{L}_{\eta'}) +$$

$$+ \frac{\sum_{\eta\eta'} \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial F_{\lambda k}(s\nu)} X^{-1}_{\eta'\eta} [\hat{L}_{\eta'}, \Psi] - \frac{\partial \Psi}{\partial F_{\lambda k}(s\nu)}}{\sum_{\eta\eta'} [\hat{n}, \Phi_\eta] X_{\eta'\eta} [\hat{L}_{\eta'}, \Psi] - [\hat{n}, \Psi]} \times \qquad /10/$$

$$\times \Big(\Big(-2i \frac{\partial}{\partial \phi} - \hat{n}\Big) - \sum_{\eta\eta'} [\hat{n}, \Phi_\eta] X^{-1}_{\eta'\eta} (\hat{\mathfrak{L}}_{\eta'} - \hat{L}_{\eta'}) \Big) \Big\}.$$

Легко проверить, что $\left[\frac{\partial}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)}, \Phi_\eta\right] = \left[\frac{\partial}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)}, \Psi\right] = 0$, откуда следует, что $[\hat{H}, \Phi_\eta] = [\hat{H}, \Psi] = 0$. Это значит, что дополнительные условия совместимы с гамильтонианом. Подставляя /10/ в /1/ и /2/, получаем:

$$\hat{N} = -2i \frac{\partial}{\partial \phi}, \qquad \hat{I}_\mu = \sum_\eta D^1_{\mu\eta}(\theta) \hat{\mathfrak{L}}_\eta . \qquad /11/$$

Это означает, что углы θ_l и ϕ являются теми динамическими переменными, которые описывают вращение в обычном трехмерном и фазовом пространствах. В отличие от /1/ и /2/, где операторы $\hat{N}$ и $\hat{I}_\mu$ зависели от всех динамических переменных, сейчас они выражаются только через углы θ_l и ϕ.

В новых переменных гамильтониан имеет вид:

$$H = \tilde{H}_0 - \frac{G}{4}\tilde{A}^+ \tilde{A} - \kappa \sum_k (-1)^k Q_{2k} Q_{2-k} ,$$

$$\tilde{H}_0 = 2 \sum_{\lambda k s \nu} (\epsilon_s - \lambda) F_{\lambda k}(s\nu) \frac{\partial}{\partial g_{\lambda k}(s\nu)} ,$$

$$\tilde{A} = 2 \sum_s \sqrt{j_s + \frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial g_{00}(ss)} ,$$

$$\tilde{A}^+ = 2 \sum_s \sqrt{j_s + \frac{1}{2}} F_{00}(ss) - 2\sqrt{2} \sum_{\substack{ss'\nu\lambda\lambda' \\ \lambda''kk'k''}} \sqrt{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)} (-1)^{j_s + j_\nu + \lambda + \lambda''} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} \lambda'' & j_{s'} & j_\nu \\ j_s & \lambda' & \lambda \end{Bmatrix} C^{\lambda'' k''}_{\lambda k \lambda' k'} F_{\lambda k}(ss') F_{\lambda' k'}(s\nu) \frac{\partial}{\partial g_{\lambda'' k''}(s'\nu)} , \qquad /12/$$

$$\tilde{Q}_{2k} = 2 \sum_{\substack{ss'\nu\lambda\lambda' \\ k'k''}} (-1)^{j_s + j_\nu - \lambda'} \sqrt{2\lambda' + 1} \langle s || r^2 Y_2 || s' \rangle \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} j_\nu & j_{s'} & \lambda' \\ 2 & \lambda & j_s \end{Bmatrix} C^{\lambda k'}_{\lambda' k'' 2 k} F_{\lambda k'}(s\nu) \frac{\partial}{\partial g_{\lambda' k''}(s'\nu)} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial g_{\lambda k}(s\nu)} = \frac{\partial}{\partial F_{\lambda k}(s\nu)} + \sum_{\eta\eta'} \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial F_{\lambda k}(s\nu)} X^{-1}_{\eta'\eta} (\hat{\mathcal{L}}_{\eta'} - \hat{L}_{\eta'}) +$$

$$+ \frac{\sum_{\eta\eta'} \frac{\partial \Phi_\eta}{\partial F_{\lambda k}(s\nu)} X^{-1}_{\eta'\eta} [\hat{L}_{\eta'}, \Psi] - \frac{\partial \Psi}{\partial F_{\lambda k}(s\nu)}}{\sum_{\eta\eta'} [\hat{n}, \Phi_\eta] X^{-1}_{\eta'\eta} [\hat{L}_{\eta'}, \Psi] - [\hat{n}, \Psi]} \times$$

$$\times \{(\hat{N} - \hat{n}) - \sum_{\eta\eta'} [\hat{n}, \Phi_\eta] X^{-1}_{\eta'\eta} (\hat{\mathcal{L}}_{\eta'} - \hat{L}_{\eta'})\}.$$

От переменных $\hat{\theta}_l$, ϕ гамильтониан зависит только через посредство операторов $\hat{\mathcal{L}}_\eta$ и $\hat{N}$. Отсутствие явной зависимости от θ_l и ϕ означает, что гамильтониан инвариантен относительно вращений в обычном и фазовом пространствах, а собственные значения $\hat{N}$ и $\hat{\mathcal{L}}^2$ сохраняются. Следует подчеркнуть, что мы получили для гамильтониана как функции операторов $\hat{\mathcal{L}}_\eta$ замкнутое выражение, а не бесконечный ряд, как в работах /7/.

Следующий этап состоит в выделении самосогласованного поля ядра с помощью канонического преобразования:

$$F_{\lambda k}(s\nu) \to \Gamma_{\lambda k}(s\nu) + \beta^+_{\lambda k}(s\nu), \quad \frac{\partial}{\partial F_{\lambda k}(s\nu)} \to \Delta_{\lambda k}(s\nu) + \beta_{\lambda k}(s\nu),$$

где $\beta^+_{\lambda k}(s\nu)\,(\beta_{\lambda k}(s\nu))$ - операторы рождения /уничтожения/ бозонов, $\Gamma_{\lambda k}(s\nu)$, $\Delta_{\lambda k}(s\nu)$ - c - числа, которые можно найти из условия минимизации H. В приближении самосогласованного поля зависимостью гамильтониана от операторов бозонов пренебрегают. Но и в этом приближении гамильтониан остается оператором, а не c -числом, поскольку зависит от $\hat{\mathcal{L}}_\eta$. Он напоминает гамильтониан ротатора во внешнем поле, так как содержит как линейные, так и квадратичные по $\hat{\mathcal{L}}_\eta$ члены.

Прежде всего необходимо диагонализовать гамильтониан, полученный в приближении самосогласованного поля (H_{cc}). Только после диагонализации можно получить уравнения для $\Gamma_{\lambda k}(s\nu)$ и $\Delta_{\lambda k}(s\nu)$, минимизируя собственные значения H_{cc}:

$$\frac{\partial \langle H_{cc}\rangle_I}{\partial F_{\lambda k}(s\nu)} = 0, \qquad \frac{\partial \langle H_{cc}\rangle_I}{\partial \Delta_{\lambda k}(s\nu)} = 0.$$

Значения $\Gamma_{\lambda k}(s\nu)$ и $\Delta_{\lambda k}(s\nu)$, вообще говоря, будут различаться для состояний с различными моментами l.

В этой работе, однако, мы используем другой путь, чтобы получить непосредственную возможность для сопоставления наших результатов с кренкинг-моделью, хотя для решения задачи этот путь значительно менее удобен, чем рассмотренный выше. В качестве независимой переменной для варьирования используем не $\Delta_{\lambda k}(s\nu)$, а не зависящую от $\beta_{\lambda k}(s\nu)$ и $\beta^{+}_{\lambda k}(s\nu)$ часть $\frac{\partial}{\partial g_{\lambda k}(s\nu)}$, которую обозначим через $\Lambda_{\lambda k}(s\nu)$. Выражение для гамильтониана в приближении самосогласованного поля можно получить, если в /12/ заменить $F_{\lambda k}(s\nu)\to\Gamma_{\lambda k}(s\nu)$, $\frac{\partial}{\partial g_{\lambda k}(s\nu)}\to\Lambda_{\lambda k}(s\nu)$. Величины $\Gamma_{\lambda k}(s\nu)$ и $\Lambda_{\lambda k}(s\nu)$ нельзя непосредственно определять из условия минимизации H_{cc}, поскольку имеется соотношение, которое необходимо учитывать при варьировании. Подставляя выражения для $f_{\lambda\mu}(s\nu)$ и $\frac{\partial}{\partial f_{\lambda\mu}(s\nu)}$ в /2/ и сравнивая результат с /11/, находим:

$$\hat{\mathfrak{L}}_\eta = \sum_{\substack{\lambda k k'\\ s\nu}} \sqrt{\lambda(\lambda+1)}\, C^{\lambda k}_{\lambda k' 1\eta}\, F_{\lambda k}(s\nu)\frac{\partial}{\partial g_{\lambda k'}(s\nu)}.$$

Тогда в приближении самосогласованного поля:

$$\mathfrak{L}_\eta = \sum_{\substack{\lambda k k'\\ s\nu}} \sqrt{\lambda(\lambda+1)}\, C^{\lambda k}_{\lambda k' 1\eta}\, \Gamma_{\lambda k}(s\nu)\,\Lambda_{\lambda k'}(s\nu). \qquad /13/$$

Это дополнительное ограничение на $\Gamma_{\lambda k}(s\nu)$ и $\Lambda_{\lambda k}(s\nu)$ необходимо учесть при варьировании. Учтем это дополнительное условие обычным способом, включив его в гамильтониан с помощью множителей Лагранжа Ω_η:

$$\tilde{H}_{cc} \equiv H_{cc} - \sum_\eta \Omega_\eta \sum_{\substack{\lambda k k'\\ s\nu}} \sqrt{\lambda(\lambda+1)}\, C^{\lambda k}_{\lambda k' 1\eta}\, \Gamma_{\lambda k}(s\nu)\,\Lambda_{\lambda k'}(s\nu).$$

Для определения Ω_η служат дополнительные условия /13/. Если переписать полученное выше выражение для $\tilde{H}_{cc}$ в терминах элементов матрицы плотности: $\langle a^{+}_{sm_s} a_{\nu m_\nu}\rangle$, , $\langle a^{+}_{sm_s} a^{+}_{\nu m_\nu}\rangle$, $\langle a_{\nu m_\nu} a_{sm_s}\rangle$, которые простым образом выражаются через $\Gamma_{\lambda k}(s\nu)$ и $\Lambda_{\lambda k}(s\nu)$, то получится обычное выражение для гамильтониана кренкинг-модели. Единственное отличие состоит в том, что $\tilde{H}_{cc}$ содержит три компоненты оператора момента $\mathfrak{L}_\eta$ и имеется, соответственно, три дополнительных условия для определения множителей Лагранжа Ω_η. Но это отличие принципиальное, поскольку компоненты $\hat{\mathfrak{L}}_\eta$ не коммутируют друг с другом. В результате решения вариационной задачи мы получаем не c -число, являющееся энергией состояния ядра с моментом I, а некоторый оператор, выражающийся через компоненты $\mathfrak{L}_\eta$, который еще нужно диагонализовать.

Можно было бы не решать вариационную задачу, а написать уравнения движения для матрицы плотности. В этом случае при вычислении коммутатора матрицы плотности с одночастичным гамильтонианом следовало бы учитывать не только тот факт, что эти величины являются матрицами в пространстве одночастичных состояний, но и то, что они зависят от компонент оператора $\hat{\vec{\mathfrak{L}}}$, которые не коммутируют друг с другом. В результате в уравнениях появятся слагаемые, возникшие при одно-, двух- и т.д. кратном коммутировании операторов $\hat{\mathfrak{L}}_\eta$. Поправка, возникшая в результате однократного коммутирования, была получена другим способом в лекциях С.Т.Беляева на Международной школе по структуре ядра /Алушта, май 1972/.

В случае аксиальной симметрии достаточно рассматривать вращение только вокруг одной из двух осей, перпендикулярных оси симметрии среднего поля ядра. В этом случае дополнительные условия будут содержать лишь одну компоненту оператора момента $\hat{\mathfrak{L}}$, и проблем, связанных с некоммутативностью различных компонент $\hat{\mathfrak{L}}$, не возникнет. Мы получим обычную формулировку кренкинг-модели.

Другой подход к описанию вращательного движения ядер и корректный способ выделения динамических переменных, описывающих вращение, были предложены в /8/, основное отличие нашей работы от /8/, состоит в том, что мы получаем замкнутое выражение для гамильтониана, описывающего вращательное движение, а не ряд по степеням оператора момента.

Мы уже отмечали, что в случае аксиальной симметрии наш результат полностью переходит в обычную формулировку кренкинг-модели. Но полученный гамильтониан допускает рассмотрение и случаев, когда нет аксиальной симметрии. Это очень важно в связи с высказываемыми в последнее время предположениями о возможной динамической неаксиальности, растущей с ростом момента I /9/.

В заключение авторы выражают признательность сотрудникам отдела теории ядра за обсуждение работы. Один из авторов /Р.Д./ пользуется случаем отметить многочисленные и полезные дискуссии по вопросам, поднимавшимся выше, с В.Рыбарской.

Литература

1. B.R.Mottelson and J.G.Valatin. Phys.Rev.Lett., 5,511 (1960).
   Ю.Т.Гринь, А.И.Ларкин. ЯФ,2, 40 /1965/.
   M.Mariscotti, G.S.Goldhaber and B.Buck. Phys.Rev., 178, 1864.
   J.Krumlinde and Z.Szymanski. Phys.Lett., 36B, 157 (1971).
   N.I.Pyatov, M.I.Chernej, M.I.Baznat. Preprint JINR, E4-5468 (1970).
   Л.Александров, Д.Караджов, И.Н.Михайлов и др. Сообщение ОИЯИ, Р4-6279, Дубна, 1972.

2. Н.Н.Боголюбов. Украинский математический журнал, 2, 3 /1950/, см. также Избранные труды, т. 2, стр. 499, Киев /1970/.

3. С.В.Тябликов. ЖЭТФ, 21, 377 /1956/.
   Е.П.Солодовникова, А.Н.Тавхелидзе, О.А.Хрусталев. ТМФ, 10, 162 /1972/.

4. Ю.Т.Гринь, ЯФ,12, 927 /1970/.
   Ю.Т.Гринь, А.Б.Кочетов. ЯФ,12, 1154 /1970/.
   Ю.Т.Гринь, Л.Б.Левинсон, ЯФ,14, 96 /1971/.
   Г.Ф.Филиппов. Препринт ИТФ-68-14, Киев, 1968.
   А.Я.Дзюблик. Препринт ИТФ-71-122Р, Киев, 1971.

5. D.Janssen, F.Donav, S.Fravendorf and R.V.Jolos. Nucl.Phys., A172, 145 (1971).

6. А.С.Давыдов. Теория атомного ядра, Москва, Физматгиз, 1958, стр. 568.

7. F.M.H.Villars. Nucl.Phys. 74, 353 (1965).
   В.М.Михайлов. Изв. АН СССР, сер. физ., 35, 794 /1971/.

8. С.Т.Беляев, В.Г.Зелевинский. ЯФ,11, 741 /1970/.

9. B.R.Mottelson. Leigh Page Lectures at Yale University (1970).

Рукопись поступила в издательский отдел
21 июня 1972 года.