

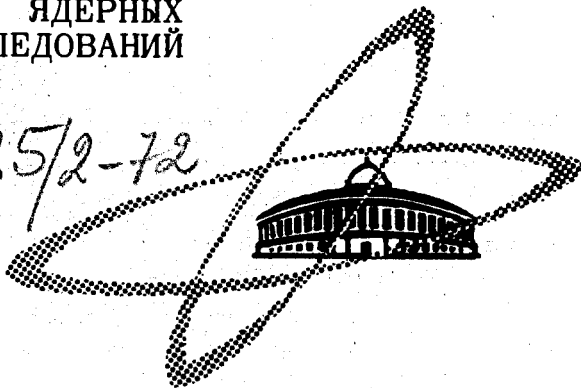
С 3435

A-941

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2685/2-72



P4 - 6458

Г.Н.Афанасьев, С.Р.Аврамов, П.П.Райчев

О РЕАЛИЗАЦИИ
ФИЗИЧЕСКОГО БАЗИСА $SU(3)$
И ВЕРОЯТНОСТИ $V(E2)$ -ПЕРЕХОДОВ
В СХЕМЕ $SU(3)$. II.

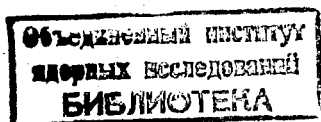
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

P4 - 6458

Г.Н.Афанасьев, С.Р.Аврамов, П.П.Райчев

О РЕАЛИЗАЦИИ
ФИЗИЧЕСКОГО БАЗИСА $SU(3)$
И ВЕРОЯТНОСТИ $V(E2)$ -ПЕРЕХОДОВ
В СХЕМЕ $SU(3)$. II.



1. В случае применения группы $SU(3)$ к задачам ядерной физики существенным является отыскание базиса, в котором диагонален полный угловой момент

$$L^2 = L_{\mu\nu} L_{\mu\nu}.$$

Нетривиальность этой задачи связана с отсутствием достаточно простого эрмитового оператора, коммутирующего с L^2 и L_3 , собственные значения которого маркируют состояния базиса $SU(3)$. В работе^{/1/} мы использовали для диагонализации базиса оператор $\Omega_2 = A^+ A$.

В данной работе мы придерживаемся тех же обозначений, что и в^{/1/}. Неприводимые унитарные представления $SU(3)$ маркируются квантовыми числами n и T ($\lambda = 2T$, $\mu = \frac{n}{2} - T$). Состояния же внутри мультиплета различаются угловым моментом l , его третьей проекцией m и числом альфа-частиц a ; ($K = \frac{n}{2} - T - 2a$). При этом состояния с различными a и одинаковыми n, T, l неортогональны. Ортонормировать эти состояния можно по-разному. Проще всего этого добиться с помощью метода Шмидта. Заманчивее, однако, отыскать эрмитовский оператор (играющий роль гамильтониана), собственные значения которого маркируют состояния с данными (n, T, l) .

2. В качестве такого оператора Баргман и Мошинский^{/2/} предложили использовать оператор $\Omega_1 = Q_{ij} Q_{jk} Q_{ik}$ (суммирование по i, j, k). Оператор Ω_1 следующим образом действует на состояние $|n, T, l, a\rangle$:

$$\Omega_1 |n T l a\rangle = \sum_{s=0, \pm 1} |n, T, l, a+s\rangle \langle n T l a+s | \Omega_1 |n, T, l, a\rangle,$$

где

$$\begin{aligned}
\langle n T l a | \Omega_1 | n T l_1 a \rangle &= -\frac{2}{9} n^3 - 2n^2 - 4n + 8n T(T+1) + \\
&+ 24 T(T+1) + 4a[l(l+1) - 3(l_1 + \beta)^2] - \\
&- 4r[l(l+1) - 3(l_2 + \beta)^2] + (l_2 - l_1)(2l+3)(l+1+3\beta); \\
\langle n T l a + 1 | \Omega_1 | n T l a \rangle &= -12r l_2 (l_2 - 1); \\
\langle n, T, l, a - 1 | \Omega_1 | n T l a \rangle &= 12 a l_1 (l_1 - 1).
\end{aligned}$$

Используя эти формулы, легко построить ортонормированную систему собственных функций Ω_1 :

$$\Omega_1 | n T l \omega \rangle = \Omega | n T l \omega \rangle.$$

$| n T l \omega \rangle$ ищем в виде линейной комбинации $| n T l a \rangle$:

$$| n T l \omega \rangle = \sum_a | n T l a \rangle \langle n T a | n T l \omega \rangle,$$

или более кратко:

$$|\omega\rangle = \sum_a |a\rangle \langle a|\omega\rangle.$$

Коэффициенты $\langle a|\omega\rangle$ удовлетворяют системе однородных уравнений

$$\sum_{s=0, \pm 1} \langle a | \Omega_1 | a+s \rangle \langle a+s | \omega \rangle = \omega \langle a | \omega \rangle.$$

Допустимые ω определяются из условия обращения в нуль детерминанта системы. Для каждого ω находим отношения коэффициентов $\langle a|\omega\rangle$ к одному из них, например к $\langle a_0|\omega\rangle$, где $a_0 = a_{\min}$. Наконец, $\langle a_0|\omega\rangle$ определяем из условия нормировки $\langle \omega|\omega\rangle = 1$:

$$\langle a_0|\omega\rangle = \left[\sum_{a, a'} \langle a|a'\rangle \frac{\langle a|\omega\rangle}{\langle a_0|\omega\rangle} \frac{\langle a'|\omega'\rangle}{\langle a_0|\omega\rangle} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Вычисление $\langle a|\omega\rangle$ требует знания интегралов перекрытия

$$\langle a|a'\rangle = \langle n T l a | n T l a'\rangle.$$

К сожалению, мы не смогли получить $\langle a | a' \rangle$ в аналитическом виде и поэтому вычисляли их на ЭВМ.

3. В качестве примера на рис. 1 представлен спектр собственных значений оператора Ω для мультиплета $(n, T) = (16, 6) ((\lambda, \mu) = (12, 2))$. В пределах ротационной полосы энергия убывает с ростом l . Мы произвольно употребили термин "вращательная полоса", не указав при этом, по какому признаку мы относим состояния в ту или иную полосу. Как правило, вероятности электрических переходов внутри полосы велики по сравнению с вероятностями переходов между состояниями разных полос. К рассмотрению вероятностей переходов в рамках $SU(3)$ -схемы мы вернемся в п. 4. Сейчас же укажем, что существует по крайней мере еще один оператор, играющий ту же роль, что и $\Omega_1 = (QQQ)_0^0$, именно, оператор

$$\Omega = A^+ A.$$

Оператор Ω_2 следующим образом действует на состояние $|n T l a\rangle$:

$$\Omega_2 |n T l a\rangle = \sum_{s=0, \pm 1} |n, T, l, a+s\rangle \langle n, T, l, a+s | \Omega_2 |n T l a\rangle,$$

$$\langle n, T, l, a+1 | \Omega_2 |n T l a\rangle = 4r l_2 (l_2 - 1)(l + r + 2a + \beta + 1),$$

$$\langle n, T, l, a-1 | \Omega_2 |n T l a\rangle = -4a(a-1)l_1(l_1 - 1),$$

$$\langle n, T, l, a | \Omega_2 |n T l a\rangle = -\frac{4}{3}a\{(a-1)[l(l+1)[l(l+1) - 3(l_1 + \beta)^2]$$

$$- 2r[l(l+1) - 3(l_2 + \beta)^2] + \frac{1}{2}(l_2 - l_1)(2l+3)(l+1+3\beta)\}$$

$$+ \sum_{n=1}^a (n+3-4k)[(n+3-4k)^2 + 3 - \frac{4}{3}l(l+1) - 4T(T+1)].$$

Оператор Ω_2 удобен тем, что для широко употребляемого мультиплета n , $T = \frac{1}{2}n - 2$, что соответствует эллиотовскому $(\lambda, 2)$, собственные значения и вектора находятся в аналитическом виде. Ω_2 возбуждает состояния вращательной β -полосы по закону

$$4(n-1)^2 - 2l(l+1)$$

и оставляет в покое состояния γ -полосы. Возникает вопрос: имеет ли смысл искать новые операторы, снимающие вырождение по l , если имеются уже известные, например Ω_1 . Мы отвечаем на этот вопрос утвердительно по следующим двум причинам: а) имеются случаи сильной и слабой интерференции между β - и γ -полосами; собственно поэтому необходимы операторы, описывающие оба этих случая; б) гамильтониан, будучи скаляром, может быть аппроксимирован рядом, каждый член которого есть также скаляр; для построения этого ряда необходимо знание базисных инвариантов $SU(3)$.

Оператор, транспонированный к Ω_2 , т.е.

$$\Omega_3 = A A^+$$

также может служить для классификации состояний $SU(3)$, однако ввиду наличия следующего коммутационного соотношения: $[A^+, A] = \frac{4}{3}\Omega_1$ + инвариантные члены, зависящие от (N, T^2, L^2) , он не является линейно независимым.

4. Оператор, вызывающий электрические переходы, может быть записан в виде суммы трех слагаемых:

$$Q^{e1} = Q^{(+)} + Q + Q^{(-)}$$

Здесь Q описывает переходы между состояниями одного и того же мультиплета $SU(3)$; $Q^{(+)}$, $Q^{(-)}$ приводят к переходам между состояниями данного мультиплета $SU(3)$ и состояниями мультиплетов, отличающихся от данного по числу частиц на ± 2 единицы соответственно (и на всевозможные допустимые значения изоспинов).

Рассмотрим сначала случай, когда имеются только симметричные мультиплеты $SU(3)$, ($n = 2T$, $\alpha = \beta = 0$). Приведенные матричные элементы оператора Q^{e1} равны:

$$\langle n+2, l+2 \| Q^{e1} \| nl \rangle^2 = \frac{3}{8} \frac{(l+1)(l+2)}{(2l+3)} (n+l+3)(n+l+5),$$

$$\langle n-2, l+2 \| Q^{e1} \| nl \rangle^2 = \frac{3}{8} \frac{(l+1)(l+2)}{(2l+3)} (n-l)(n-l-1),$$

$$\langle n, l+2 \| Q^{e1} \| nl \rangle^2 = \frac{3}{8} \frac{(l+1)(l+2)}{2l+3} (n-l)(n+l+3),$$

$$\langle n, l \| Q^{e1} \| n, l \rangle^2 = \frac{1}{4} \frac{l(l+1)(2l+1)}{(2l-1)(2l+3)} (2n+3)^2,$$

$$\langle n+2, l \| Q^{e1} \| n, l \rangle^2 = \frac{1}{4} \frac{l(l+1)(2l+1)}{(2l-1)(2l+3)} (n+l+3)(n+2-l),$$

$$\langle n-2, l \| Q^{e1} \| n, l \rangle^2 = \frac{1}{4} \frac{l(l+1)(2l+1)}{(2l-1)(2l+3)} (n-l)(n+1+l),$$

$$\langle n-2, l-2 \| Q^{e1} \| nl \rangle^2 = \frac{3}{8} \frac{l(l-1)}{(2l-1)} (n+l+1)(n+l-1),$$

$$\langle n+2, l-2 \| Q^{e1} \| nl \rangle^2 = \frac{3}{8} \frac{l(l-1)}{2l-1} (n+1-l)(n+4-l),$$

$$\langle n, l-2 \| Q^{e1} \| nl \rangle^2 = \frac{3}{8} \frac{l(l-1)}{2l-1} (n+1-l)(n+1+l).$$

Из этих выражений следует, что если ротационная полоса является расщепленным мультиплетом симметричного представления $SU(3)$, то вероятности $V(E2, l \rightarrow l-2) = \frac{\langle n, l-2 \| Q \| nl \rangle^2}{2l+1}$ по мере продвижения

от начала полосы возрастают, достигают максимума примерно в середине и убывают в ее конце. С другой стороны, если вращательная полоса устроена таким образом, что состояния с угловыми моментами принадлежат представлениям $SU(3)$ с $n = n_1, n_{1+2}$ (n_1, n_{1-2}), то вероятности переходов возрастают (убывают) по мере продвижения к большим угловым моментам.

Мы провели аналогичный анализ для более сложных мультиплетов $SU(3)$. В данной работе мы рассмотрим переходы внутри ротационных полосок, входящих в один мультиплет $SU(3)$, и между ними. Процедура вычисления матричных элементов сводится к следующей:

1) вычисляем действие оператора перехода Q на неортонормированное состояние $|l, \alpha\rangle$:

$$Q |l, \alpha\rangle = \sum_{\substack{k=0,1,2 \\ s=0,\pm 1}} q_s^{(k)} |l+k, l, \alpha+s\rangle.$$

Здесь

$$q_0^{(2)} = \frac{12r}{\sqrt{(l+2)(2l+3)}}, \quad q_{-1}^{(2)} = \frac{12\alpha}{\sqrt{(l+1)(2l+3)}}, \quad q_1^{(2)} = 0;$$

$$q_{-1}^{(1)} = -\frac{12\alpha l_1}{(l+2)\sqrt{(l+1)}}, \quad q_1^{(1)} = -\frac{12r\beta}{\sqrt{l+1}} \frac{l}{l+2},$$

$$q_0^{(1)} = 12 \frac{\alpha\beta(l_1+1) + r(l_2+\beta)}{(l+2)\sqrt{l+1}} + \frac{6\beta}{\sqrt{l+1}};$$

$$q_1^{(0)} = -\frac{12rl_2(l_2-1)}{(l+1)(2l+3)}, \quad q_{-1}^{(0)} = \frac{12\alpha l_1(l_1-1)}{(l+1)(2l+3)},$$

$$q_0^{(0)} = 4\alpha \frac{l(l+1) - 3(l_1+\beta)^2}{(l+1)(2l+3)} - 4r \frac{l(l+1) - 3(l_2+\beta)^2}{(l+1)(2l+3)}$$

$$- (l_1 - l_2) \left(1 + \frac{3\beta}{l+1}\right).$$

2) оператором Q действуем на собственный вектор оператора Ω_1 (или Ω_2):

$$Q|l\omega\rangle = \sum_a Q|la\rangle\langle la|\omega\rangle = \sum_s q_s^{(k)}|l+k, l, a+s\rangle\langle la|\omega\rangle =$$

$$= \sum_{a, s, k, \omega'} |l+k, l, \omega'\rangle\langle l+k, \omega'|l+k, a+s\rangle q_s^{(k)}\langle la|\omega\rangle.$$

Здесь $\langle a|\omega\rangle$ и $\langle\omega|a\rangle$ - элементы взаимнообратных матриц:

$$|\omega\rangle = \sum_a |a\rangle\langle a|\omega\rangle; \quad |a\rangle = \sum_\omega |\omega\rangle\langle\omega|a\rangle.$$

Наконец, для матричного элемента оператора перехода получаем выражение

$$\langle l+k, l, \omega'|Q|l\omega\rangle = \sum_{a, s} q_s^{(k)}\langle l+k, \omega'|l+k, a+s\rangle\langle la|\omega\rangle.$$

Проанализировав около десяти различных мультиплетов $SU(3)$, мы пришли к следующим выводам:

1) Операторы Ω_1 и Ω_2 достаточно чётко разделяют ротационные полосы: вероятности переходов внутри β - и γ -полос на порядок величины превосходят вероятности переходов из γ -полосы в β и на 2-3 порядка вероятность соответствующего $\beta \rightarrow \gamma$ перехода (рис. 2-4).

2) Вероятность $V(E2, l\beta \rightarrow l-2, \beta)$ переходов внутри β -полосы является функцией l , имеет максимум в середине полосы и убывает к ее краям (рис. 2);

3) Вероятности $V(E2, l\gamma \rightarrow l-2, \beta)$ переходов внутри γ -полосы, убывая в целом к границам γ -полосы, испытывают осцилляции внутри полосы; осцилляции более ярко выражены для собственных состояний Ω_1 оператора (рис. 2);

4) Вероятности $V(E2, l\gamma \rightarrow l-1, \gamma)$ переходов убывают (с той же оговоркой на осцилляции) по мере продвижения к большим угловым моментам (рис. 2);

5) Вероятности $V(E2, l\gamma \rightarrow l-2, \beta)$ и $V(E2, l\gamma \rightarrow l-1, \beta)$ проходят через максимум для состояний Ω_1 и растут для состояний Ω_2 оператора; осцилляций нет (рис. 3);

б) Вероятности $B(E2, l\beta \rightarrow l-1, \gamma)$ на порядок величины превосходят $B(E2, l\beta \rightarrow l-2, \gamma)$ вероятности. И те и другие имеют максимум внутри полосы и убывают к ее концам; осцилляций нет (рис. 4).

Приведенный анализ должен быть дополнен анализом переходов между состояниями различных мультиплетов.

5. Поскольку операторы Ω_1 , Ω_2 не имеют ясного физического смысла, необязательно требовать, чтобы состояния $SU(3)$ были собственными векторами этих операторов (или их комбинаций). Именно, стартуя с произвольного ортонормированного базиса, замечаем, что этот последний определяется с точностью до унимодулярного преобразования. Этой свободой в выборе базиса можно воспользоваться для подгонки вероятностей переходов. Так как число подгоночных параметров велико (для каждой тройки n, T^1 выполняется свое унитарное преобразование), то в рамках такой схемы можно объяснить все наблюдаемые на эксперименте переходы. Однако такая свобода базиса является мнимой, поскольку гамильтониан однозначно фиксирует параметры унитарного преобразования.

Авторы благодарны И.Н. Михайлову - за обсуждения, профессору В.Г. Соловьеву - за постоянный интерес к работе.

Литература

1. С.Р. Аврамов, Г.Н. Афанасьев, П.П. Райчев. Препринт ОИЯИ, Р4-6113, Дубна, 1971.
2. V. Bargmann, M. Moshinsky. Nucl. Phys., 18, 697 (1960), ibid 23, 177 (1961).

Рукопись поступила в издательский отдел
17 мая 1972 года.

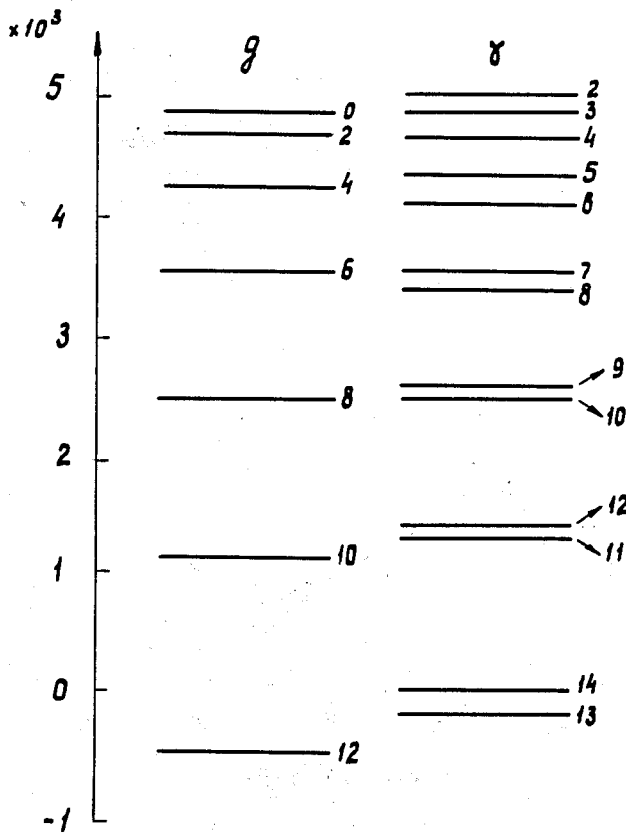


Рис. 1. Спектр собственных значений оператора $\Omega_1 = (QQQ)^9$ на примере мультиплетта $(\lambda, \mu) = (12, 2)$.

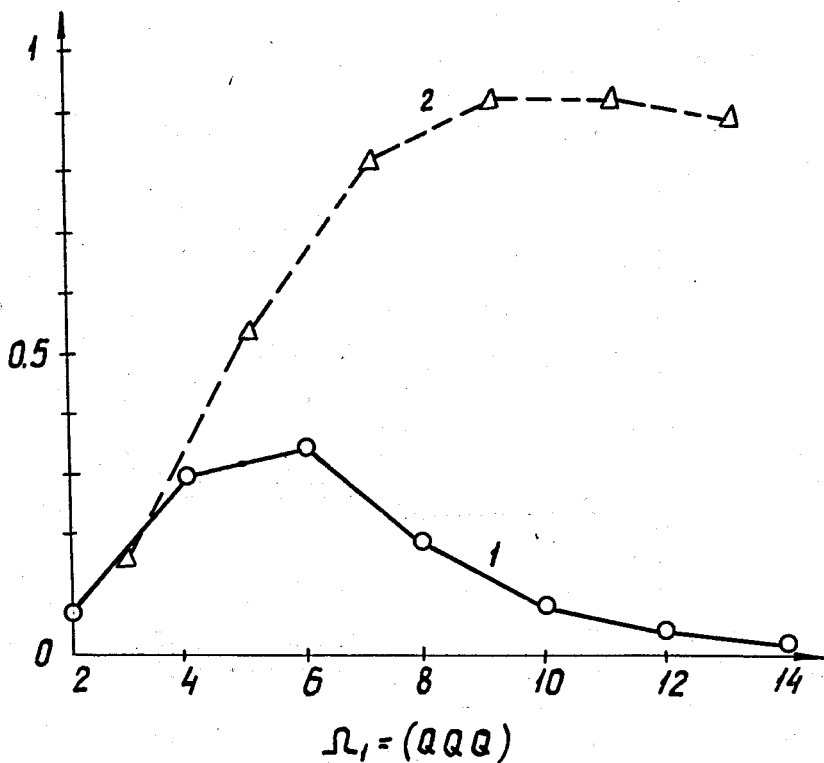
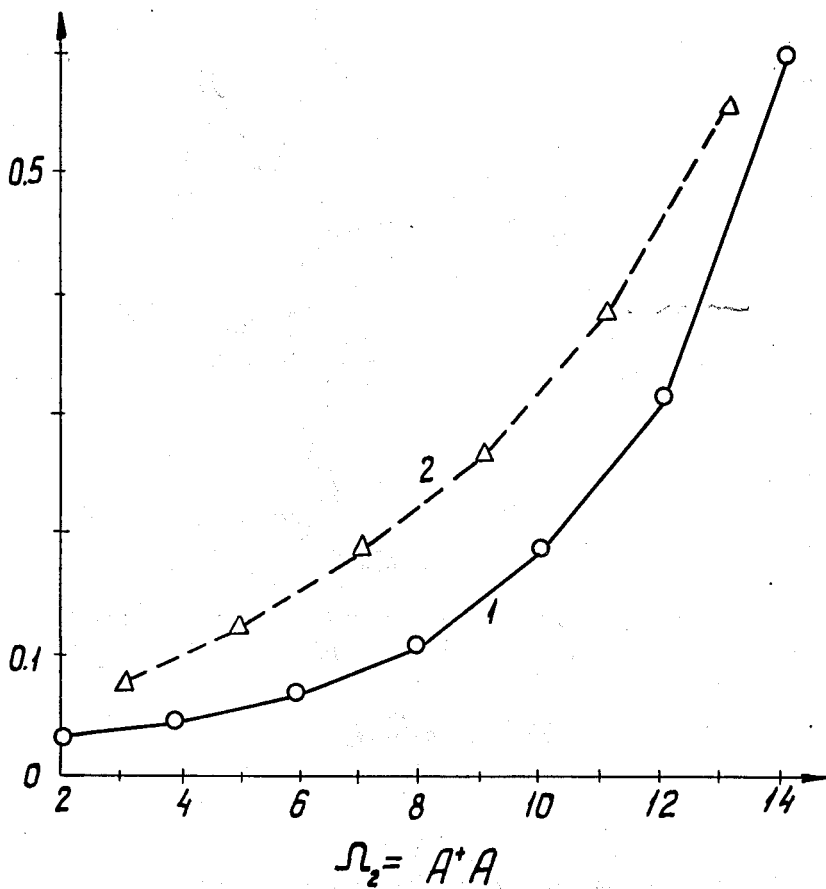


Рис. 2. Вероятности переходов внутри β - и γ -полос для $(\lambda, \mu) = (12, 2)$.
 Кривая 1 - $\langle I \beta \| Q \| I - 2, \beta \rangle^2$, кривая 2 - $\langle I \gamma \| Q \| I - 2, \gamma \rangle^2$, кривая 3 -
 $\langle I \gamma \| Q \| I - 1, \gamma \rangle^2$.



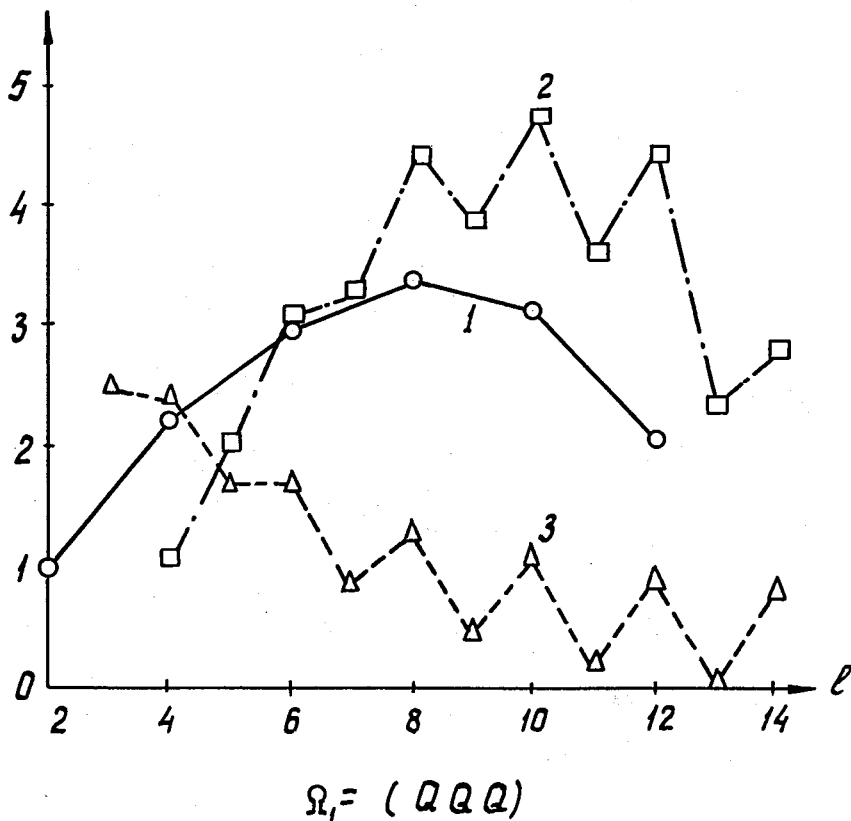
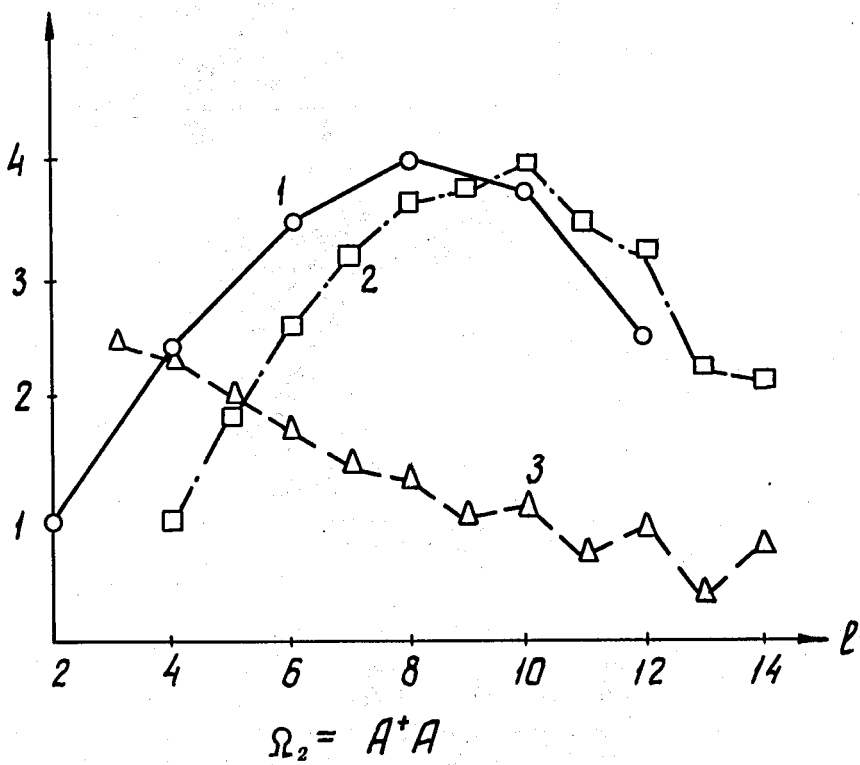


Рис. 3. Вероятности переходов из γ -полосы в β -полосу для $(\lambda, \mu) = (12, 2)$.
 Кривая 1 - $|\langle l, \gamma \| Q \| l-2, \beta \rangle|^2$ в единицах $|\langle 2\beta \| Q \| 0\beta \rangle|^2$. Кривая 2 -
 $|\langle l, \gamma \| Q \| l-1, \beta \rangle|^2$ в единицах $|\langle 2\beta \| Q \| 0\beta \rangle|^2$.



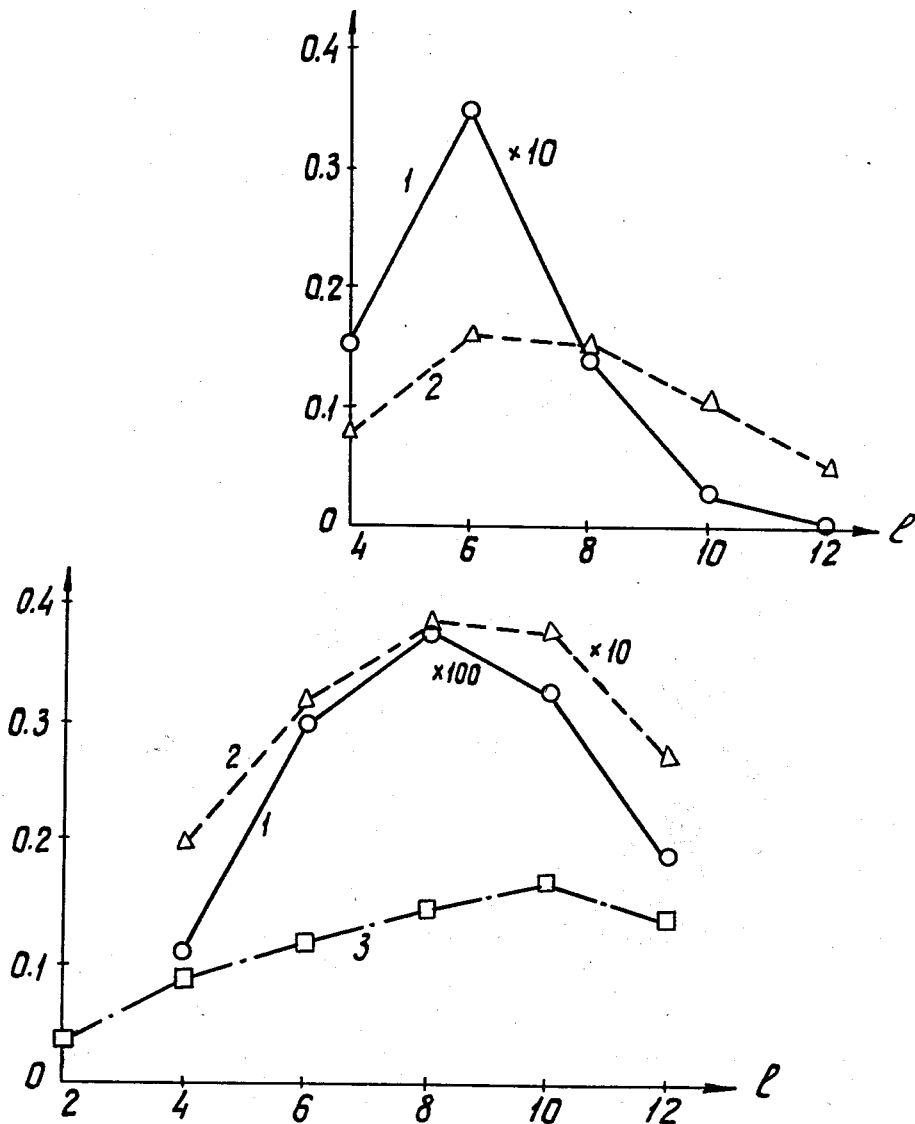


Рис. 4. Вероятности переходов из β -полосы в γ -полосу для $(\lambda, \mu) = (12, 2)$. Кривая 1 - $|\langle l \beta \| Q \| l-2, \gamma \rangle|^2$ в единицах $|\langle 2\beta \| Q \| 0\beta \rangle|^2$. Кривая 2 - $|\langle l \beta \| Q \| l-1, \gamma \rangle|^2$ в единицах $|\langle 2\beta \| Q \| 0\beta \rangle|^2$. Кривая 3 - $|\langle l \beta \| Q \| l, \gamma \rangle|^2$ в единицах $|\langle 2\beta \| Q \| 0\beta \rangle|^2$. Для состояний Ω_1 вероятности $|\langle l \beta \| Q \| l, \gamma \rangle|^2$ равны нулю. Для состояний оператора Ω_1 масштаб кривой 1 увеличен в 10 раз. Для Ω_2 масштаб кривых 1 и 2 увеличен соответственно в 100 и 10 раз.