ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4 - 6356

И.М.Матора

О КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕВОРОТА СПИНА $\frac{\hbar}{2}$ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ МИКРОЧАСТИЦ В ПРОИЗВОЛЬНО МЕНЯЮЩЕМСЯ МАГНИТНОМ ПО

ЛАБОРАТОРИЯ НЕЙТРОННОЙ ФИЗИКИ

1972

P4 - 6356

И.М.Матора

О КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕВОРОТА СПИНА $\frac{\hbar}{2}$ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ МИКРОЧАСТИЦ В ПРОИЗВОЛЬНО МЕНЯЮЩЕМСЯ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Направлено в ЯФ

Введение

В последние годы интенсивно ведутся исследования возможностей транспортировки и накопления медленных и ультрахолодных нейтронов в пространственно неоднородном магнитном поле. Одним из существенных вопросов этого круга является теоретическое рассмотрение возможных потерь нейтронов вследствие переворота их спинов, первоначально параллельных полному вектору $\bar{H}$ напряженности магнитного поля, в антипараллельное состояние.

Ниже дается решение этой задачи.

§1. Теория

Уравнение поведения спиновой волновой функции $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$ во вращающейся с угловой скоростью $\bar{\omega}$ системе координат было написано Раби, Рамзаем и Швингером /1/ еще в 1954 г. Оно имеет вид

$$i\hbar\dot{\Psi} = -(\bar{\mu}(\bar{H} + \frac{\bar{\omega}}{\gamma}))\Psi . \qquad (1)$$

($\bar{\mu}$ - оператор магнитного момента).

Адекватной для нашей задачи системой координат является такая, в которой ось $oz \parallel \bar{H}$, а вектор $\bar{\omega}$ – есть угловая скорость вращения вектора $\bar{H}$. Эту подвижную систему координат далее будем называть п.с., а лабораторную систему – л.с., причем в последней все величины будут штрихованными, а в п.с. – нет.

В п.с. будет ψ_+ – компонента Ψ по направлению полного вектора $\bar{H}$, а ψ_- – ему антипараллельная.

$$\bar{\mu} = \mu \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{i} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & -0 \end{pmatrix} \bar{j} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bar{k} \right\}; \tag{2}$$

$$\bar{H} = H_z(\bar{r}, t)\bar{k} \equiv H \cdot \bar{k}. \tag{3}$$

Очевидно,

$$H = \sqrt{H_x'^2(\bar{r}', t) + H_y'^2(\bar{r}', t) + H_z'^2(\bar{r}', t)}. \tag{4}$$

$\bar{\omega} \not\parallel \bar{H}$, и возможен случай $\bar{\omega} \neq const$.

В л.с. соответствующий $\bar{\omega}'$ определяется известной формулой

$$\frac{d\bar{H}'}{dt} = [\bar{\omega}' \times \bar{H}'] + \omega_1 \bar{H}', \qquad (\omega_1 \text{ – скаляр }). \tag{5}$$

умножение которой слева векторно на $\bar{H}'$, дает

$$\bar{\omega}' H^2 - \bar{H}'(\bar{\omega}' \cdot \bar{H}') = [\bar{H}' \times \frac{d\bar{H}'}{dt}]. \tag{6}$$

Пусть в л.с. задано магнитное поле

$$\bar{H}' = \bar{H}'(\bar{r}', t), \tag{7}$$

а перемещение частицы происходит по кривой

$$\bar{r}' = \bar{r}'(t). \tag{8}$$

Тогда по (7) и (8) для заданной частицы

$$\bar{H}' = \bar{H}'(t), \tag{9}$$

откуда с помощью (6) $\bar{\omega}'$ легко определяется для любых случаев, представляющих практический интерес.

Для облегчения расчетов лучше ось $0x$ (или $0y$) в п.с. расположить в плоскости, определяемой векторами $\bar{H}$ и $\bar{\omega}$.

В результате из (1) получаем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi}_+ &= i\,\frac{\omega_z-\Omega}{2}\,\psi_+ + i\,\frac{\omega_x}{2}\,\psi_-\,, \\ \dot{\psi}_- &= i\,\frac{\omega_x}{2}\,\psi_+ + i\,\frac{\Omega-\omega_z}{2}\,\psi_-\,. \end{aligned}\right\} \quad \left(\begin{aligned} \Omega &= -\gamma H\,, \\ \gamma &= \frac{2\mu}{\hbar}\,. \end{aligned}\right) \tag{10}$$

Подчеркнем, что как только получено решение (10), задача полностью решена, так как при начальном условии $\psi_+(0) = 1$, $\psi_-(0) = 0$, $|\psi_-|^2$ есть искомая вероятность переворота спина.

Уже из вида (10) следует, что при $\omega_x = 0$ перевороты спина невозможны, т.к. автоматически оказывается здесь $|\psi_+|^2 = const.$; $|\psi_-|^2 = const$. Откуда, учитывая, что ω_x по смыслу есть нормальная к вектору $\bar{H}$ составляющая вектора $\bar{\omega}$, видим, что слагаемое $\omega_1 \bar{H}'$ в правой части (5) никогда не вызывает переворотов спина.

Точным решением (10), удовлетворяющим начальным данным $\psi_+(0) = 1$, $\psi_-(0) = 0$, в случае зависящих от времени Ω , ω_x , ω_z является

$$\left.\begin{aligned} \psi_+ &= (1-\Delta)\, e^{\frac{i}{2}\int_0^t (\omega_z-\Omega)\,dt}\,, \\ \psi_- &= \frac{i}{2}\, e^{\frac{i}{2}\int_0^t (\Omega-\omega_z)\,dt} \int_0^t \left[(1-\Delta)\,\omega_x\, e^{i\int_0^t (\omega_z-\Omega)\,dt}\right] dt\,, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где единственная неизвестная функция $\Delta(t)$, определяется интегро-дифференциальным уравнением

$$e^{i\int_0^t(\omega_z-\Omega)\,dt}\cdot\dot{\Delta}=\frac{\omega_x}{4}\int_0^t\left[(1-\Delta)\,\omega_x\,e^{i\int_0^t(\omega_z-\Omega)\,dt}\right]dt \tag{12}$$

при начальном условии $\Delta(0)=0$.

Решение (11) построено таким образом, чтобы в представляющих максимальный интерес в случаях, когда $|\Delta|\ll 1$, оценки $|\psi_-|^2$ можно было выполнять без отыскания решения (12).

В случае постоянных Ω, ω_x, ω_z (задача Раби) решение (11) приобретает известный вид

$$\left.\begin{aligned}\psi_+&=\frac{\omega_z-\Omega+n}{2n}\,e^{i\frac{n}{2}t}+\frac{\Omega-\omega_z+n}{2n}\,e^{-i\frac{n}{2}t},\\ \psi_-&=i\,\frac{\omega_x}{n}\,\sin\frac{n}{2}\,t\,.\end{aligned}\right\}\quad n=\sqrt{(\Omega-\omega_z)^2+\omega_x^2}\,. \tag{13}$$

(13) совпадает с полученным более сложным путем результатом Раби и Швингера /2/, но, как и должно быть, отличается от /1/, так как в /2/ отыскивалась вероятность переворотов спина в проекции на $\bar{H}$, а в /1/ – на неподвижную ось $0z'$ л.с.

Отметим, что решение (1), в первой вращающейся системе координат /1/ ($0z \parallel \bar{\omega}$) при переменных $\bar{H}(t)$ и $\bar{\omega}(t)$ также есть (11) и (12), в которых наши Ω, ω_x, ω_z соответственно заменены на ω_0, $\frac{H_1}{H_0}\omega_0$, ω (обозначения /1/).

§2. Перевороты спина нейтрона, двигающегося в магнитном поле шестиполюсника

Компоненты постоянного во времени поля шестиполюсника можно записать (в л.с.) /3/

$$\left.\begin{aligned} H'_y &= -2Ay'z', \\ H'_z &= A(y'^2 - z'^2). \end{aligned}\right\} \qquad (A \text{ - параметр магнита}). \tag{14}$$

Поперечные колебания нейтрона, фокусируемого в магнитном кольцевом накопителе на базе шестиполюсника, выражаются (в л.с.) /4/.

$$\left.\begin{aligned} y' &= y_0[1+\beta\cos\kappa(t-t^\circ_y)]; \\ z' &= z_0[1+a\cos\kappa(t-t^\circ_z)] \end{aligned}\right\} \qquad \left(\kappa = \sqrt{\frac{2A\mu}{m}}\right. \quad (m \text{ - масса нейтрона}). \tag{15}$$

Мы можем отвлечься от поступательного азимутального движения нейтрона, причем существо задачи от этого не изменится. Не нарушая общности, мы можем также несколько упростить выкладки, положив в (15), например, $\beta = 0$ и $t^\circ_z = 0$. Тогда (4), (6), (14) и (15) дают

$$\left.\begin{aligned} H &= Az_0^2\left[\frac{y_0^2}{z_0^2} + (1+a\cos\kappa t)^2\right] \equiv Az_0^2 f(t), \\ \omega_x &= -\frac{2y_0}{z_0}\kappa a\frac{\sin\kappa t}{f(t)}, \qquad \omega_z = 0, \\ \Omega &= -\gamma A z_0^2 f(t). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Рабочую область поля шестиполюсника всегда можно выбрать так /4/, чтобы всюду было $|\Omega(t)| \gg |\omega_x(t)|$. В этом случае в (12) будет $|\dot\Delta| \ll \Omega$, по крайней мере, для конечных t. Отсюда, при указанных начальных данных $|\Delta| \ll 1$, благодаря действию быстро осциллирующего множителя в подинтегральном выражении (12). Вследствие этого при оценке $|\psi_-|$ из (11) можно игнорировать Δ под интегралом. Техника оценки вероятности w переворота спина громоздка, но элементарна. После пренебрежения Δ под интегралом в (11) выражение для оценки w будет

$$w = -\frac{d}{dt}|\psi_+|^2 \approx \frac{\omega_x(t)}{2}\int_0^t \{\omega(\tau)\cdot \cos[\int_\tau^t \Omega(t')\,dt']\}\,d\tau . \tag{17}$$

Пользуясь (17), можно показать, что даже весьма завышенная оценка для кольцевого магнитного накопителя с магнитом из железа приводит к значению вероятности w переворота спина в 1 сек даже в максимуме, не превосходящему 10^{-4}. Влияние поступательного азимутального движения состоит лишь в добавлении медленного вращения вектора $\bar{H}$, которое не вызывает заметных эффектов.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как ведет себя спин при прохождении частицы через ось шетиполюсника. Дело в том, что шестиполюсники,как известно /3/, обладают замечательным свойством,состоящим в том, что прямые, проходящие через центр симметрии сечения, есть геометрические места равных наклонов вектора $\bar{H}'$ к любому фиксированному направлению. Тогда, в соответствии с замечанием к (10) в § 1, можно ожидать, что пересечение оси шестиполюсника прямолинейной траекторией частицы переворотом спина сопровождаться не будет.

Пусть, например, нейтрон колеблется относительно центра симметрии сечения шестиполюсного магнита по прямой $z' = \frac{z_0}{y_0}y'$,

где

$$\left.\begin{aligned} y' &= y_0 \cos\kappa t, \\ z' &= z_0 \cos\kappa t. \end{aligned}\right\} \quad \text{, тогда} \tag{15'}$$

$$\left.\begin{aligned} H'_y &= -2A\, y_0 z_0 \cos^2\kappa t, \\ H'_z &= A\,(y_0^2 - z_0^2)\cos^2\kappa t. \end{aligned}\right\} \tag{14'}$$

$$\left.\begin{aligned} H &= A(y_0^2 + z_0^2)\cos^2\kappa t. \\ \omega_x &= \omega_z = 0 \\ \Omega &= -\gamma A\,(y_0^2 + z_0^2)\cos^2\kappa t \equiv \Omega_0 \cos^2\kappa t. \end{aligned}\right\} \tag{16'}$$

Тогда из (12) и (11) $\Delta = 0$; $\psi_- = 0$; $\psi_+ = e^{-i\frac{\Omega_0}{2}\int_0^t \cos^2\kappa t\, dt}$;
и всегда $|\psi_+|^2 = 1$, т.е. прохождение через точку с $H = 0$ по прямолинейной траектории в шестиполюснике не сопровождается переворотом спина, причиной чего, как мы видели, является то, что прямая, проходящая через цэнтр симметрии сечения шестиполюсника, есть геометрическое место равных наклонов вектора $\overset{\pm}{H'}$.

В действительности /5/, из-за действия гравитации траектория, пересекающая точку с $H = 0$, является прямолинейной (в проекции на плоскость $y'0z'$) только в том единственном случае, когда прямая одновременно проходит и через центр симметрии, и через точку (y_0 , z_0) в (15). Однако в малой окрестности точки, где $H = 0$, ее можно приближенно считать отрезком прямой, и, следовательно, есть основание думать, что и в реальном случае перевороты спина при прохождении точек с $H = 0$ в шестиполюснике маловероятны.

Влияние короткопериодических возмущений поля шестиполюсника, способных в случае их возникновения вызывать резонансный переворот спина нейтрона, здесь не учитывалось.

В заключение искренне благодарю Ф.Л. Шапиро и В.Н. Ефимова за ценную помощь и интерес к работе, О.А. Стрелину – за проведение трудоемких расчетов, В.И. Лущикова, Ю.В. Тарана и В.К. Игнатовича – за ценную дискуссию.

Литература

1. I.I.Rabi, N.F.Ramsay. J.Schwinger.Rev.Mod.Phys., 26, 167 (1954).
2. I.I.Rabi. Phys. Rev., 51, 652 (1937).
   J.Schwinger. Phys.Rev. 51, 648 (1937).
3. И.М. Матора. АЭ, в. 1. 71 (1969).
4. И.М. Матора, О.А. Стрелина. Препринт ОИЯИ Р3-5902,Дубна, 1971.
5. И.М. Матора. Препринт ОИЯИ, Р3-5537, Дубна, 1970,
6. В.В. Владимирский. ЖЭТФ, 39, 1062 (1960).

Рукопись поступила в издательский отдел
29 марта 1972 года.