ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4 - 6330

В.В.Бабиков, К.К.Мусабаев

К ТЕОРИИ АНТИКЛАССИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА НАДБАРЬЕРНОГО ОТРАЖЕНИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

Р4 - 6330

В.В.Бабиков, К.К.Мусабаев

К ТЕОРИИ АНТИКЛАССИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА НАДБАРЬЕРНОГО ОТРАЖЕНИЯ

Направлено в ТМФ

Авторы работ /1-2/ рассмотрели задачу надбарьерного отражения в приближении, которое ранее в квантовой механике практически не рассматривалось и которому они дали название антиклассического приближения. Это, обратное известному квазиклассическому, приближение применимо в случае резко меняющихся в небольшом интервале расстояний потенциалов. В /1,2/ при выводе антиклассического приближения использовался весьма сложный математический метод, требующий к тому же исключения встречающихся в промежуточных выкладках расходимостей.

В настоящей работе для получения антиклассического разложения коэффициента надбарьерного отражения используется метод фазовых функций. При этом удается избежать с самого начала появления бесконечных величин и показать, что для потенциалов, стремящихся к постоянным асимптотикам экспоненциальным образом, получаемый ряд является сходящимся.

Будем исходить из следующего уравнения для функции отражения $B(x)$, полученного в методе фазовых функций /3/,

$$B'(x) = \frac{p'(x)}{2p(x)}\left[e^{\frac{2i}{\hbar}\int_{x_0}^{x} p(x')\,dx'} - B^2(x)\, e^{-\frac{2i}{\hbar}\int_{x_0}^{x} p(x')\,dx'}\right] \qquad (1)$$

с начальным условием

$$B(+\infty) = 0. \qquad (2)$$

Здесь $p(x) = \sqrt{2m[E - V(x)]}$ – классический локальный импульс частицы, x_0 – произвольная, вообще говоря, точка на вещественной оси X. В нашем случае антиклассического приближения удобно выбрать в качестве этой точки центр интервала резкого изменения потенциала и положить $x_0 = 0$.

Физический смысл величины $B(x)$ в произвольной точке $x = \bar{x}$ заключается в том, что квадрат ее модуля определяет коэффициент отражения $R(\bar{x}) = |B(\bar{x} + 0)|^2$ от части потенциала, содержащейся в открытом интервале $x > \bar{x}$. Искомый коэффициент отражения от всего потенциала равен [3]

$$R = |B(-\infty)|^2. \qquad (3)$$

Для дальнейшего рассмотрения удобно перейти к безразмерным переменным расстояний и импульсов, положив

$$y = \frac{x}{a}, \qquad q(y) = \frac{p(x)}{p_c}, \qquad (4)$$

где a – размер области резкого изменения потенциала, p_c – некоторый зависящий от формы потенциала характерный импульс, конкретный вид которого уточняется ниже. Безразмерный параметр антиклассичности, который полагается малым, определяется следующим образом:

$$\epsilon = \frac{2ap_c}{\hbar} \ll 1. \qquad (5)$$

В новых переменных с учетом явной зависимости функции отражения от параметра ϵ уравнение (1) принимает вид

$$B'(y,\epsilon) = \frac{q'(y)}{2q(y)}\left[e^{i\epsilon\int_0^y q(y')dy'} - B^2(y,\epsilon)\, e^{-i\epsilon\int_0^y q(y')dy'}\right]. \qquad (6)$$

Будем искать решение уравнения (6) в виде ряда

$$B(y,\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(y)(i\epsilon)^n. \tag{7}$$

Множитель i введен здесь для удобства, ибо тогда все коэффициенты $B_n(y)$ оказываются вещественными.

Разложение экспонент в правой части уравнения (6) в ряд по степеням ϵ имеет, благодаря наличию множителя $n!$ в знаменателе n -ого члена разложения, бесконечный радиус сходимости в плоскости ϵ, даже когда интегралы в показателях экспонент линейно возрастают при $y \to \pm\infty$. В случае потенциалов, стремящихся при $y \to \pm\infty$ к постоянным асимптотическим значениям не медленнее, чем экспоненциально, присутствие множителя $q'(y)$ в правой части уравнения (6) обеспечивает конечную величину коэффициента при каждом из членов ряда после интегрирования по y. Ввиду сокращения при этом множителей $n!$, получающийся ряд оказывается сходящимся в конечной области значений параметра ϵ. Для потенциалов, стремящихся к асимптотикам при $y \to \pm\infty$ медленнее, чем экспоненциально, например, степенным образом, разложение (7) в ряд по целым степеням параметра ϵ уже не будет иметь места. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением потенциалов, стремящихся к постоянным асимптотикам, по крайней мере, экспоненциально.

Ввиду вещественности величин $B_n(y)$, для коэффициента отражения (3) будем иметь

$$R(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n \epsilon^{2n}, \tag{8}$$

где первые коэффициенты разложения равны

$$R_0 = B_0^2(-\infty), \tag{9а}$$

$$R_1 = B_1^2(-\infty) - 2B_0(-\infty)B_2(-\infty), \tag{9б}$$

$$R_2 = B_2^2(-\infty) - 2B_1(-\infty)B_3(-\infty) + 2B_0(-\infty)B_4(-\infty). \tag{9в}$$

Подставляя разложение (7) в уравнение (6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ϵ в обеих частях уравнения, получим для величин $B_n(y)$ рекуррентную систему уравнений, первые три из которых имеют вид (начальные условия: $B_n(+\infty) = 0$):

$$B_0'(y) = \frac{q'(y)}{2q(y)}[1 - B_0^2(y)], \tag{10а}$$

$$B_1'(y) = \frac{q'(y)}{2q(y)}\{Q(y)[1 + B_0^2(y)] - 2B_0(y)B_1(y)\}, \tag{10б}$$

$$B_2'(y) = \frac{q'(y)}{2q(y)}\{\frac{1}{2}Q^2(y)[1 - B_0^2(y)] + B_1(y)[2B_0(y)Q(y) - B_1(y)] - 2B_0(y)B_2(y)\}. \tag{10в}$$

Здесь используется обозначение

$$Q(y) = \int_0^y q(y')dy'. \tag{11}$$

Характерной чертой системы (10) является то, что в ней только первое уравнение (10а) нелинейно, а все остальные линейны и могут быть последовательно проинтегрированы в квадратурах. Уравнение (10а) также легко интегрируется

$$B_0(y) = \frac{q(y) - q_+}{q(y) + q_+}, \tag{12}$$

где для упрощения обозначений положено

$$q_+ = q(+\infty), \qquad q_- = q(-\infty). \tag{13}$$

С учетом (12) решения уравнений (10б), (10в) имеют вид

$$B_1(y) = \frac{Q(y)s(y) - q(y)S(y)}{[q(y) + q_+]^2}, \tag{14}$$

$$B_2(y) = \frac{1}{[q(y)+q_+]^2}\{\frac{1}{2}Q^2(y)s(y) - S(y)Q(y)q(y) + \tag{15}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{q(y)S^2(y)}{q(y)+q_+} + q_+ q(y)\int_{+\infty}^{y} dy' S(y')\}.$$

Здесь положено

$$s(y) = q^2(y) - q_+^2, \tag{16а}$$

$$S(y) = \int_{+\infty}^{y} s(y')dy'. \tag{16б}$$

Аналогичным образом легко находятся коэффициенты $B_3(y)$, $B_4(y)$ и т.д., аналитические выражения которых становятся, однако, все более громоздкими.

В результате для коэффициента отражения от потенциала с отличными асимптотиками $q_- \neq q_+$ получаем с точностью до членов ϵ^2 следующее выражение:

$$R=(\frac{q_- - q_+}{q_- + q_+})^2\{1-\epsilon^2\frac{2q_-q_+}{(q_-^2-q_+^2)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dy[q_-^2-q^2(y)]\int_y^{\infty}dy'[q^2(y')-q_+^2]\}. \tag{17}$$

Для потенциалов с одинаковыми асимптотиками $q_- = q_+ = q_0$ имеем $B(-\infty)=0$, и двумя первыми, отличными от нуля, коэффициентами разложения (8) являются R_1 и R_2. Соответственно в этом приближении коэффициент отражения имеет вид

$$R = \epsilon^2\frac{S^2(-\infty)}{16q_0^2}\{1-\epsilon^2[\frac{S^2(-\infty)}{16q_0^2}+\frac{2}{S(-\infty)}\int_{-\infty}^{\infty}dy\, S^2(y) - 2\int_{-\infty}^{\infty}dy\, S(y) - \tag{18}$$
$$-\frac{q_0^2}{S^2(-\infty)}(\int_{-\infty}^{\infty}dy\, S(y))^2 + \frac{2q_0^2}{S(-\infty)}\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_y^{\infty}dy' S(y')]\}.$$

Величина $S(-\infty)$ просто связана с потенциалом

$$S(-\infty) = \frac{1}{ap_c}\int_{-\infty}^{\infty}dx\, V(x).$$

Коэффициенты при ϵ^2 в фигурных скобках выражений (7) и (18) определяют численную малость поправочного члена к соответствующим предельным антиклассическим значениям коэффициента надбарьерного отражения:

$$R = \left(\frac{p_- - p_+}{p_- + p_+}\right)^2 , \tag{19}$$

$$R = \frac{m^2}{\hbar^2 p_0^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\, V(x)\right)^2 . \tag{20}$$

В (19) и (20) совершен переход к исходным переменным.

Если ограничиться только первым поправочным членом в выражении (17), то можно придти к выводу, что при $p(\pm\infty) < p(y) < p(\mp\infty)$ условие малости поправки выполняется, если в формуле (5) $p_c = (p_+ p_-)^{1/2}$. Учет последующих членов разложения (9) показывает, однако, что условию их малости соответствует

$$p_c = \max(p_+ , p_-) . \tag{21}$$

Действительно, например, для потенциала

$$V(x) = \frac{V_0}{1 + e^{-x/a}} , \tag{22}$$

для которого известно /4/ точное значение коэффициента отражения

$$R = \frac{sh^2\left[\frac{\pi a}{\hbar}(p_- - p_+)\right]}{sh^2\left[\frac{\pi a}{\hbar}(p_- + p_+)\right]} , \tag{23}$$

имеем следующие три первые члена антиклассического разложения

$$R = \left(\frac{p_- - p_+}{p_- + p_+}\right)^2\left[1 - \frac{4\pi^2}{3}\,\frac{p_- p_+ a^2}{\hbar^2} + \frac{4\pi^4}{45} a^4 p_- p_+ (p_+^2 + p_-^2 + 10 p_- p_+)\right] . \tag{24}$$

Для потенциала

$$V(x) = V_0\,\theta(x - x_1)[1 - \frac{x_2 - x}{a}\,\theta(x_2 - x)]\,, \quad x_2 - x_1 = a\,, \qquad (25)$$

находим

$$R = (\frac{p_- - p_+}{p_- + p_+})^2\,[1 - \frac{1}{3}\,\frac{p_- p_+ a^2}{\hbar^2} + \frac{a^4 p_- p_+}{180\hbar^4}(19p_+^2 + 19p_-^2 + 10p_- p_+)]. \qquad (26)$$

Для потенциалов с $p_+ = p_- = p_0$ аналогичным образом находим, что величина p_c в формуле (5) определяется условием

$$p_c = max\,[\frac{2m\,|V_0|}{p_0}, p_0\,]. \qquad (27)$$

Примером здесь может служить антиклассическое разложение для коэффициента отражения от потенциала

$$V(x) = \frac{V_0}{ch^2 x/a}, \qquad (28)$$

а именно:

$$R = (\frac{2m\,V_0\,a}{\hbar\,p_0})^2\,[1 - (\frac{a p_0}{\hbar})^2\,(\frac{\pi^2}{3} - \frac{4m\,V_0}{p_0^2} + \frac{4m^2\,V_0^2}{p_0^4})]. \qquad (29)$$

Результат (29) может быть получен также из известного /4/ точного выражения. Для потенциала

$$V(x) = V_0\,e^{-x^2/a^2} \qquad (30)$$

имеем следующее приближенное значение R :

$$R = \frac{\pi}{4}(\frac{2m\,a\,V_0}{\hbar p_0})^2[1 - 2(\frac{a p_0}{\hbar})^2(1 - \sqrt{2}\,\frac{m\,V_0}{p_0^2} + \frac{\pi}{2}\,\frac{m^2 V_0^2}{p_0^4})]. \qquad (31)$$

Выше были рассмотрены случаи, когда потенциал меняется резко вблизи какой-то одной точки на оси X. Нетрудно видеть, однако, что данный подход применим и к случаю нескольких различных областей резкого изменения потенциала. Здесь есть определенная аналогия с рассмотрением случая отражения частицы от суммы нескольких дельта-образных потенциалов /3/.

Литература

1. В.А.Колкунов. ТМФ 3, 72 (1970).
2. В.А.Колкунов, В.И.Ростокин. Препринт №732, ИТЭФ (1969).
3. В.В.Бабиков "Метод фазовых функций в квантовой механике", Наука, 1968 г.
4. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц "Квантовая механика", Физматгиз, 1963 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 марта 1972 года.