

С 341а

А-465

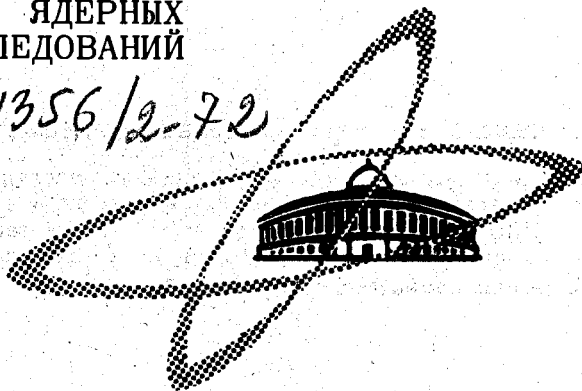
24/4-72

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

1356/2-72

P4 - 6279



Л.Александров, Д.Караджов, И.Н.Михайлов,
Е.Наджаков, Г.Ходжаев

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ РОТОРНОЙ МОДЕЛИ
НЕЧЕТНОГО ЯДРА ИЗ МНОГОЧАСТИЧНОГО
УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
И АВТОМАТИЗАЦИИ

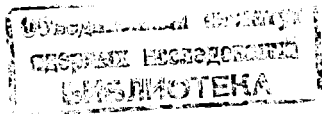
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

P4 - 6279

Л.Александров, Д.Караджов, И.Н.Михайлов,
Е.Наджаков, Г.Ходжаев

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ РОТОРНОЙ МОДЕЛИ
НЕЧЕТНОГО ЯДРА ИЗ МНОГОЧАСТИЧНОГО
УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА



Александров Л., Караджов Д., Михайлов И.Н., Наджаков Е.
Ходжаев Г. P4-6279

Вывод уравнений роторной модели нечетного ядра из
многочастичного уравнения Шредингера

Методом проектирования получена обобщенная система уравнений роторной модели нечетного деформированного ядра. При выводе не использовалось приближение о разделимости полного спина ядра на коммутирующие части, отвечающие остову и нечетному нуклому. В уравнениях учтен неадиабатический характер вращения остова.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1972

Aleksandrov L., Karadjov D., Mikhailov I.N., P4-6279
Nadjakov E., Khodjaev G.

Derivation of Equations of the Odd-Mass Nucleus
Rotor Model from the Many-Particle Schroedinger
Equation

A generalized system of equations of the odd-mass deformed nucleus rotor model is obtained by the projection method. In deriving the equation, the approximation about the separability of the nucleus total spin into commuting parts, which correspond to the core and odd nucleon, was not used. Nonadiabatic character of the core rotation was taken into account in the equations.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1972

Под роторной мы понимаем модель нечетного ядра, в которой свойства его нижайших состояний интерпретируются по данным о ротационной ветви возбуждений соседних четных ядер. Покажем, как можно прийти к такой модели, считая известными многочастичный гамильтониан H , волновые функции $|IM\rangle$ и соответствующие энергии E_I - состояний основных ротационных полос четно-четных соседей исследуемого ядра.

Мы рассматриваем следующие суперпозиции состояний четного ядра:

$$|0\rangle = \sum_I \eta_I |IM = 0\rangle. \quad (1)$$

Многочастичный вектор $|0\rangle$ удовлетворяет условию:

$$H|0\rangle = h(\vec{I}^2)|0\rangle, \quad (2)$$

где функция h такова, что $h(I(I+1)) = E_I$. В выборе коэффициентов η_I имеется произвол, который можно использовать для отыскания состояний $|0\rangle$ с достаточно простыми свойствами.

Стационарные состояния нечетного ядра записываем в виде:

$$|\nu IM\rangle = \sum_p C_p^I |pIM\rangle \quad (3)$$

$$|pIM\rangle = \int dq D_{MK_p}^I(q) R(q) \Omega_p |0\rangle. \quad (4)$$

Здесь $dq = \sin \beta d\beta d\alpha d\gamma$, $D_{MK}^I(q)$ - обобщенная сферическая функция, $\hat{R}(q)$ - оператор поворота системы координат с углами Эйлера $q \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$. Операторы Ω_p обладают "простой квазичастичной структурой" и имеют фиксированное значение проекции момента количества движения на ось O_z в лабораторной системе координат.

Коэффициенты C_p^I и собственные энергии $E_{\nu I}$ нечетного ядра могут быть найдены из системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} & \langle \nu IM | [H, \Omega_{p_0}] | 0 \rangle \\ & = E_{\nu I} \langle \nu IM | \Omega_{p_0} | 0 \rangle - \langle \nu IM | \Omega_{p_0} h(\vec{I}^2) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

$$p_0 = \{p_1, p_2, \dots, p_\lambda\}.$$

Введем следующие обозначения:

$$[H, \Omega_{p_0}] | 0 \rangle = \sum_p \mathcal{H}_{pp_0} \Omega_p | 0 \rangle, \quad (6)$$

$$\Omega_{p_0} h(\vec{I}^2) | 0 \rangle = \sum_p X_{pp_0}^{(I)} \Omega_p | 0 \rangle,$$

а также

$$\begin{aligned} \langle p_1 IM | \Omega_{p_2} | 0 \rangle & = \delta_{MKp_1}^{(I)} \rho_{p_1 p_2} \\ & = \int dq D_{MKp_1}^I(q) \langle 0 | \Omega_{p_1}^+ \hat{R}^{-1}(q) \Omega_{p_2} | 0 \rangle \\ & = \delta_{MKp_1} 4\pi^2 \int \sin \beta d\beta D_{Kp_1 Kp_2}^{I*}(\theta, \beta, 0) \langle 0 | \Omega_{p_1}^+ e^{-i\beta I_2} \Omega_{p_2} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя обозначения (6) и (7), уравнения (5) можно представить в виде:

$$E_{\nu l} \sum_{p_1} C_{p_1}^{I* (l)} \rho_{p_1 p_0} = \sum_{p_1 p_2} C_{p_1}^{I*} (X_{p_1 p_2} + X_{p_1 p_2}^{(l)}) \rho_{p_2 p_0} \quad (8)$$

В этой работе мы рассматриваем случай, когда Ω_p подобраны так, чтобы выполнялись простые соотношения:

$$\rho_{pp'}^{(l)} \approx \delta_{pp'}; \quad X_{pp'} \approx \epsilon_p \delta_{pp'} \quad (6')$$

Они имеют место приближенно при следующих предположениях: оператор Ω_p представляет собой оператор рождения одной квазичастицы на уровне i , (a_i^+) ; состояние $|0\rangle$ аппроксимируется деформированным состоянием Бардина-Купера-Шрифера для четного соседа (которое является вакуумом по отношению к a_i) и, наконец, предполагается выполненным условие стационарности энергии в состоянии $|0\rangle$ относительно вариации операторов a_i^+ , т.е. считается, что:

$$H = \sum_{\nu} \epsilon_{\nu} a_{\nu}^+ a_{\nu} + \frac{1}{4} \sum_{ijkl} V_{ij,kl} : a_i^+ a_j^+ a_l a_k : , \quad \epsilon_{\nu} = \sqrt{(e_{\nu} - \lambda)^2 + \Delta^2}$$

В этом случае уравнение (8) принимает вид:

$$(E_{\nu l} - \epsilon_{p_0}) C_{p_0}^{I*} = \sum_p C_p^{I*} X_{pp'}^{(l)}, \quad p_0 = \{p_1, p_2, \dots, p_{\lambda}\} \quad (9)$$

Уравнение (9) описывает "квазичастицы" в состояниях с энергиями ϵ_p , операторами рождения которых являются a_p^+ . Матрица $X^{(l)}$ описывает связь этих квазичастиц с остовом. Она в точности воспроизводит знакомые силы Кориолиса и центробежную энергию квазичастиц^[1], если энергии состояний остова $E_i = \frac{1}{2J} I(I+1)$, т.е. $\hbar = I^2 / 2J$.

Более точно матрицу $X^{(l)}$ можно определить следующим способом. Воспользуемся параметризацией ротационных энергий четно-четных ядер типа:

$$\frac{1}{2} I(I+1) = \sum_{i=1}^n b_i (E_i - E_0)^i,$$

в которой n подбирается в зависимости от статистического характера экспериментальных данных и особенностей ротационной полосы рассматриваемого ядра $x/$. В интересующей нас области ядер - изотопов иттербия - уже $n=2$ достаточно для описания экспериментально известных ротационных энергий, вплоть до $I = 18^{1/2}$. На этом основании имеем:

$$b_1 h (\vec{I}^2) + b_2 h^2 (\vec{I}^2)^2 = \vec{I}^2 / 2. \quad (10)$$

Уравнение, из которого определяется "ротационная" матрица $X^{(I)}$, удается получить, не делая предположений о разделимости полного спина I на коммутирующие части (ассоциируемые обычно с моментом остова и нечетной частицы).

Исходим из условия (10), чтобы вычислить выражение $a_\nu^+ h (\vec{I}^2) |0\rangle$, входящее в определение $X^{(I)}$. Запишем:

$$\frac{1}{2} a_\nu^+ \vec{I}^2 |0\rangle = \frac{1}{2} \{ I a_\nu^2 + 2 \sum_p I_p [a_\nu^+, I_p] + \sum_p [[a_\nu^+, I_p], I_p] \} |0\rangle, \quad (11)$$

где

$$I_p = \sum_{ij} (I_p)_{ij} a_i^+ a_j; \quad \vec{I}^2 = \sum_p I_p I_p; \quad (p = x, y, z). \quad (12)$$

Второй и третий члены правой части (11) удобно представить так, чтобы выявилась часть полного спина, связанная с возбуждениями нечетной частицы:

$x/$ Двух коэффициентов недостаточно для описания сложных зависимостей $E(I)$, наблюдаемых в некоторых ядрах^{1/2/}. Введением третьего коэффициента (b_3) можно описать особенности ротационных полос такого типа.

$$\sum_p I_p [\alpha_{\nu}^+, I_p] |0\rangle = \sum_p I_p \sum_k |k\rangle \langle k | [\alpha_{\nu}^+, I_p] |0\rangle.$$

Здесь $|k\rangle = \{|0\rangle, \alpha^+ |0\rangle, \alpha^+ \alpha^+ |0\rangle, \dots\}$ является полным набором состояний. Имея в виду (12), в сумме можно оставить только состояния типа $\alpha^+ |0\rangle$:

$$\begin{aligned} \sum_p I_p [\alpha_{\nu}^+, I_p] |0\rangle &= \sum_p I_p \sum_{\nu'} \alpha_{\nu'}^+ |0\rangle \langle 0 | \alpha_{\nu'} [\alpha_{\nu}^+, I_p] |0\rangle \\ &\equiv - \sum_p I_p \sum_{\nu'} (j_p)_{\nu'\nu} \alpha_{\nu'}^+ |0\rangle \\ &= - \{ I_+ \sum_{\nu'} (j_-)_{\nu'\nu} \alpha_{\nu'}^+ + I_- \sum_{\nu'} (j_+)_{\nu'\nu} \alpha_{\nu'}^+ \} |0\rangle - 2I_0 K_{\nu} \alpha_{\nu}^+ |0\rangle, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} (j_p)_{\nu'\nu} &\equiv \langle 0 | \alpha_{\nu'} [\alpha_{\nu}^+, I_p] |0\rangle = -(I_p)_{\nu'\nu} (u_{\nu} u_{\nu'} + v_{\nu} v_{\nu'}); \\ I_{\pm} &= I_x + iI_y; \quad [I_0, \alpha_{\nu}^+] |0\rangle = K_{\nu} \alpha_{\nu}^+ |0\rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

Аналогичным образом третий член правой части (11) сводится к:

$$\begin{aligned} \sum_p [[\alpha_{\nu}^+, I_p], I_p] |0\rangle &\equiv \sum_{\nu'} (j^2)_{\nu'\nu} \alpha_{\nu'}^+ |0\rangle \\ (j^2)_{\nu'\nu} &\equiv \sum_p \langle 0 | \alpha_{\nu'} [[\alpha_{\nu}^+, I_p] |0\rangle = \sum_p \sum_q (j_p)_{\nu'q} (j_p)_{q\nu}. \end{aligned} \quad (15)$$

Наконец, отметим, что оператор $P_{IM} = \int dq D_{MK}^I(q) \hat{R}(q)$, входящий в определение (4), удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} P_{IM} \vec{I}^2 &= I(I+1) P_{IM}; \quad P_{IM} I_0 = M P_{IM}; \\ P_{IM} I_{\pm} &= \sqrt{(I \pm M)(I \mp M + 1)} P_{IM \mp 1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Потребуем выполнение уравнения:

$$\langle \nu' IM | \alpha_{\nu}^{+} (b_1 h + b_2 h^2) | 0 \rangle = \frac{1}{2} \langle \nu' IM | \alpha_{\nu}^{+} I^2 | 0 \rangle, \quad (17)$$

которое в силу определения функции $|\nu IM\rangle$ (3) дает:

$$\sum_p C_p^{I*} \langle 0 | \alpha_p P_{IM} \alpha_{\nu}^{+} (b_1 h + b_2 h^2) | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_p C_p^{I*} \langle 0 | \alpha_p P_{IM} \alpha_{\nu}^{+} I^2 | 0 \rangle. \quad (17')$$

Отсюда, отбрасывая тривиальный случай $C_p^I = 0$, получаем уравнение для матрицы $X^{(I)}$. При помощи (6), (13), (15), (16) это уравнение может быть представлено в следующей форме:

$$\begin{aligned} \sum_p [b_1 X_{p\nu}^{(I)} + b_2 (X_{p\nu}^{(I)})^2] \langle 0 | \alpha_p P_{IM} \alpha_{\nu} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \{ [I(I+1) - 2K_{\nu}^2] \langle 0 | \alpha_p P_{IM} \alpha_{\nu} | 0 \rangle \\ + \sum_{\nu'} [(j_{\nu'}^2)_{\nu\nu'} \langle 0 | \alpha_p P_{IM} \alpha_{\nu'}^{+} | 0 \rangle - \sqrt{(I+K_{\nu'}) (I-K_{\nu'}+1)} (j_{-\nu'}^2)_{\nu\nu'} \times \\ \times \langle 0 | \alpha_p P_{IM-1} \alpha_{\nu'}^{+} | 0 \rangle - \sqrt{(I-K_{\nu'}) (I+K_{\nu'}+1)} (j_{+\nu'}^2)_{\nu\nu'} \langle 0 | \alpha_p P_{IM+1} \alpha_{\nu'} | 0 \rangle] \}. \end{aligned} \quad (18)$$

В правой части (18) явным образом выделена часть, отвечающая "кинетической энергии вращения" нечетного ядра - первый член. Второй член представляет собой "центробежную энергию" нечетной частицы, а третий и четвертый по виду совпадают с членами, описывающими взаимодействие Кориолиса в обычной роторной модели /1,3/. Полученное уравнение (18) упрощается, если справедливо приближение (6'). Учитывая (7), имеем в этом случае:

$$[b_1 X_{p\nu}^{(I)} + b_2 (X_{p\nu}^{(I)})^2] = \frac{1}{2} \{ [I(I+1) - 2K_{\nu}^2] \delta_{p\nu} - 2(Ij)_{p\nu} + (j_{p\nu}^2)_{p\nu} \}, \quad (19)$$

где

$$(l j)_{p, \nu}^{\rightarrow} = \sqrt{(l+K_{\nu})(l-K_{\nu}+1)} (j_{-})_{p, \nu}^{\rightarrow} + \sqrt{(l-K_{\nu})(l+K_{\nu}+1)} (j_{+})_{p, \nu}^{\rightarrow},$$

а матричные элементы $(j_{\pm})_{p, \nu}^{\rightarrow}$ определены в (14).

При сделанных предположениях о состоянии $|0\rangle$ в формуле (1) коэффициенты b_1 и b_2 имеют следующий вид (A - массовое число исследуемого нечетного ядра):

$$b_i^{(A)} = \frac{1}{2} [(b_i^{(A-1)} + b_i^{(A+1)}) + (b_i^{(A-1)} - b_i^{(A+1)}) \sum_p |C_p^I|^2 (u_p^2 - v_p^2)], \quad (i = 1, 2).$$

Уравнение (9) следует дополнить еще двумя условиями для функции $|\nu IM\rangle$:

а) условием нормировки:

$$\langle \nu IM | \nu IM \rangle = \sum_p |C_p^I|^2 = 1 \quad \text{и} \quad (20)$$

б) условием "сохранения числа частиц в среднем":

$$\langle \nu IM | \hat{N} | \nu IM \rangle = \sum_{\nu} 2v_{\nu}^2 - \sum_p |C_p^I|^2 2v_p^2 = N, \quad (21)$$

где $N = \sum_i a_i^+ a_i$, N - число нуклонов (протонов или нейтронов) в рассматриваемом ядре.

Полученная система нелинейных матричных уравнений $(S) \equiv (9), (19), (20), (21)$ является некоторым обобщением модели, развитой в /1,3/, если учитывать более реалистично, чем обычно, кинетическую энергию вращения остова.

Все три члена в (18), (19) порождаются оператором $\hbar(l^{\rightarrow 2})$, представляющим ротационные степени возбуждения четного остова. Часть $\hbar(l^{\rightarrow 2})$, меняющая число квазичастиц в состояниях $a_p^+ |0\rangle$, совпадает (при $b_2 = 0$) с членом, названным "центробежными силами" в работе /3/. В уравнениях роторной модели (см. (19) эта часть $\hbar(l^{\rightarrow 2})$ отражена членами кориолисова взаимодействия и $\hbar(l(l+1))$. Таким обра-

зом, введение "центробежных сил" с принципиальной точки зрения эквивалентно учету энергии вращения ядра $h(I(I+1))$ и кориолисова взаимодействия. Поэтому одновременный учет кориолисова взаимодействия и "центробежных сил" с общим параметром (моментом инерции) кажется формальным приемом, требующим физического обоснования.

Литература

1. A.K. Kerman. Mat.Fys.Medd.Vid.Sesk. 30, No 15 (1956).
2. J. Krumlinde, Z. Szymanski. Phys.Lett., 36B, 157 (1971); Annual Report, Research Institute for Physics - Stockholm, 1970.
3. N.I. Pyatov, M.I. Chernej, M.I. Baznat. Preprint JINR, E4-5468 (1970).
4. Preprint LA/DC/12255, Los Alamos, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 февраля 1972 года.