

20/07 72

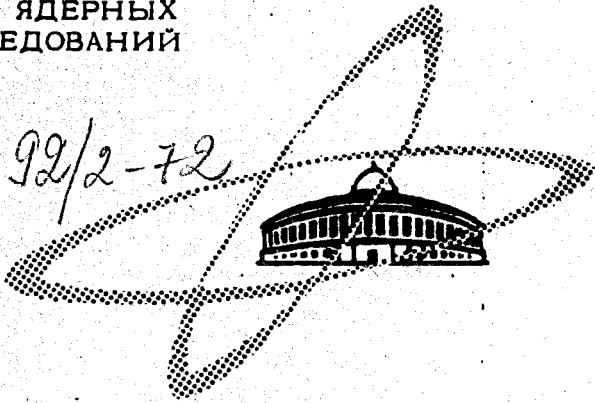
Л-84

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

892/2-72

P4 - 6269



И. Лукач , н.А. Смородинский

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ  
В СФЕРО-КОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ  
И УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА  
ДЛЯ ОДНОГО СЛУЧАЯ НЕЦЕНТРАЛЬНЫХ СИЛ

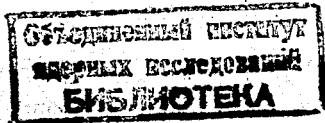
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

И. Лукач\*, Я.А. Смородинский

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ  
В СФЕРО-КОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ  
И УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА  
ДЛЯ ОДНОГО СЛУЧАЯ НЕЦЕНТРАЛЬНЫХ СИЛ

*Направлено в ТМФ*



## Введение

Ввиду особой важности сферической симметрии в физике представляет интерес рассмотрение разделения переменных в сферо-конической системе координат. Эта система является одной из криволинейных ортогональных систем координат в трёхмерном евклидовом пространстве. Такая система координат редко используется в физике, и в справочниках ей также уделяется мало места. Применение сферо-конической системы координат известно, например, при решении задачи об асимметрическом волчке в квантовой механике<sup>/1/</sup>. Обычно предпочитают пользоваться сферической системой координат, по-видимому, из-за её наглядности и простоты. Однако выбор её оправдан прежде всего там, где имеется сферо-аксимальная симметрия, т.е. где имеется выделенное направление в пространстве.

Со сферической симметрией связана одна из основных групп геометрической симметрии - группа трёхмерных вращений. В системе, обладающей сферической симметрией, как известно, сохраняется квадрат момента количества движения и соответственно система характеризуется точным квантовым числом  $\ell$ . Можно сказать, что ряд важнейших успехов в атомной и ядерной физике связан с применением моделей, обладающих сферической симметрией. В то же время исследование даже относительно несложных систем показывает, что экспериментальные данные нельзя объяснить на основе моделей, обладающих сферической симметрией.

При рассмотрении только центральных сил и решении уравнения Шредингера с потенциалом, зависящим только от расстояния, видно, что энергетические уровни системы вырождены. Это вырождение связано именно с тем, что не рассматривается зависимость потенциала от

положения точки на сфере единичного радиуса. Обычно в физике положение точки на сфере задаётся полярным и азимутальным углами. Если смотреть на сферу единичного радиуса как на двумерное пространство постоянной положительной кривизны, то видно, что такое задание точки на сфере связано с введением в этом пространстве полярной системы координат, ортогональными линиями которой является пучок прямых и семейство концентрических окружностей, проходящих через полюс сферы. При рассмотрении криволинейных ортогональных систем координат в пространствах постоянной кривизны Олевский показал<sup>/2/</sup>, что в двумерном пространстве постоянной положительной кривизны существуют всего две системы криволинейных координат, допускающих разделение переменных: полярная и эллиптическая. Ортогональными линиями эллиптической системы координат на сфере являются два семейства софокусных эллипсов и выпуклых гипербол. Эллиптической системе координат в двумерном пространстве постоянной положительной кривизны соответствует сферо-коническая система координат в трёхмерном евклидовом пространстве. Переходим к её рассмотрению.

### Сферо-коническая система координат

Пусть  $x_1, x_2, x_3$  являются декартовыми координатами точки в пространстве и пусть координаты точки на единичной сфере будут  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , причем  $\xi_i^2 = 1 - x_i^2$ . Будем пользоваться тригонометрической формой параметризации эллиптической системы координат на сфере, которая представляется наиболее удобной для физических применений<sup>/3/</sup>. В этом случае сферо-коническая система координат записывается в виде:

x) Здесь и в дальнейшем по дважды встречающимся индексам подразумевается суммирование от 1 до 3.

$$x_1 = r \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \psi} \cos \psi, \quad x_2 = r \sin \psi' \sin \psi, \quad x_3 = r \cos \psi' \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \psi},$$

$$ds^2 = dx_i^2 = dr^2 + r^2 (k^2 \sin^2 \psi + k'^2 \sin^2 \psi') \left[ \frac{d\psi^2}{1 - k^2 \cos^2 \psi} + \frac{d\psi'^2}{1 - k'^2 \cos^2 \psi'} \right] \quad (I)$$

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \psi' \leq \pi, \quad k^2 + k'^2 = 1,$$

$$k = \sin f, \quad k' = \cos f, \quad 2f - \text{межфокусное расстояние.}$$

Координатными поверхностями сферо-конической системы координат

(I) является семейство концентрических сфер

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

и два семейства эллиптических конусов

$$\frac{x_1^2}{\cos^2 \psi} - \frac{x_2^2}{\sin^2 \psi} - \frac{k^2 x_3^2}{1 - k^2 \cos^2 \psi} = 0, \quad \frac{k'^2 x_1^2}{1 - k'^2 \cos^2 \psi'} + \frac{x_2^2}{\sin^2 \psi'} - \frac{x_3^2}{\cos^2 \psi'} = 0$$

с осями вдоль оси  $x_1$  ( $\psi = \text{const}$ ) и вдоль оси  $x_3$  ( $\psi' = \text{const}$ ) соответственно. Как нетрудно убедиться из формул (I), частным случаем сферо-конической системы координат при  $k^2 = 0$  и  $k^2 = 1$  является сферическая система координат с осью симметрии соответственно вдоль оси  $x_3$  и  $x_1$ . Сферо-коническая система координат обладает выделенной плоскостью  $x_1 x_3$ , в которой лежат четыре фокуса эллиптической системы координат. Фокусы лежат в точках  $(\pm k, 0, \pm k')$  единичной сферы. Следует обратить внимание на то, что взаимная формальная замена  $k^2, \psi$  на  $k'^2, \psi'$  в сферо-конической системе координат (I) приводит к преобразованию

$$x_1 \rightarrow x_3, \quad x_2 \rightarrow x_2, \quad x_3 \rightarrow x_1, \quad (2)$$

которое соответствует переходу от правой системы координат  $x_1, x_2, x_3$  к левой системе координат  $x_3, x_2, x_1$ .

### Уравнение Шредингера

Уравнение Шредингера для частицы с массой  $m$ .

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta + U(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

в произвольной системе с криволинейными ортогональными координатами  $q_1, q_2, q_3$ , как известно, имеет вид:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{H_1 H_2 H_3}{H_i^2} \frac{\partial}{\partial q_i} \right) + U(q_1, q_2, q_3) \right] \psi = E \psi, \quad (3)$$

где  $H_i = \sqrt{(\partial x_k / \partial q_i)^2}$  - коэффициенты Ламе. В случае сферо-конической системы координат уравнение Шредингера (3), как нетрудно в этом убедиться, допускает разделение переменных для потенциала вида

$$U(r, \psi, \psi') = u(r) + \frac{a(\psi) + b(\psi')}{r^2 (k^2 \sin^2 \psi + k'^2 \sin^2 \psi')}, \quad (4)$$

где  $u(r)$ ,  $a(\psi)$ ,  $b(\psi')$  произвольные функции переменных  $r$ ,  $\psi$ ,  $\psi'$  соответственно. Выпишем в явной форме дифференциальные уравнения, к которым приводит разделение переменных в уравнении (3) с потенциалом (4). Записывая волновую функцию  $\psi(r, \psi, \psi')$  как произведение  $R(r)\Lambda(\psi)\Lambda'(\psi')$ , имеем для радиальной волновой функции  $R(r)$  обычное уравнение

$$\left\{ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2} [E - u(r)] \right\} R(r) = 0, \quad (5)$$

и для волновых функций  $\Lambda(\psi)$ ,  $\Lambda'(\psi')$  угловых переменных имеем два сходных уравнения:

$$\left[ \hat{D}(k^2, \psi) - \frac{2m_0}{k^2} a(\psi) + \lambda(\lambda+1)k^2 \sin^2 \psi + \mu \right] \Lambda(\psi) = 0,$$

$$\left[ \hat{D}(k'^2, \psi') - \frac{2m_0}{k'^2} b(\psi') + \lambda'(\lambda'+1)k'^2 \sin^2 \psi' - \mu \right] \Lambda'(\psi') = 0, \quad (6)$$

где  $\lambda, \mu$  являются постоянными разделения, для краткости через  $\hat{D}(k^2, \psi)$  обозначен дифференциальный оператор

$$\hat{D}(k^2, \psi) = \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \psi} \frac{d}{d\psi} \left( \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \psi} \frac{d}{d\psi} \right).$$

С постоянными  $\lambda$  и  $\mu$  связано сохранение некоторых физических величин, которые можно представить в операторной форме следующим образом:

$$\frac{\hat{D}(k^2, \psi) - \frac{2m_0}{k^2} a(\psi) + \hat{D}(k'^2, \psi') - \frac{2m_0}{k'^2} b(\psi')}{k^2 \sin^2 \psi + k'^2 \sin^2 \psi'} = \lambda(\lambda+1),$$

$$\frac{k'^2 \sin^2 \psi' [\hat{D}(k^2, \psi) - \frac{2m_0}{k^2} a(\psi)] - k^2 \sin^2 \psi [\hat{D}(k'^2, \psi') - \frac{2m_0}{k'^2} b(\psi')]}{k^2 \sin^2 \psi + k'^2 \sin^2 \psi'} = \mu. \quad (7)$$

Отметим, что в частном случае  $a(\psi) = b(\psi') = 0$  решениями уравнений (6) являются многочлены Ламе,  $\lambda$  принимает целочисленные значения  $\ell$ , и  $\mu$  является функцией параметра  $k^2$  и принимает  $2\ell+1$  собственных значений  $\mu_{\ell(m)}(k^2)$ ,  $(m) = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell$ ,

$$\mu_{\ell(-\ell)}(k^2) \leq \mu_{\ell(-\ell+1)}(k^2) \leq \dots \leq \mu_{\ell(\ell)}(k^2).$$

Интегралы движения (7) представляют в этом случае полный набор квантовомеханических наблюдаемых на сфере<sup>/3/</sup>. Если ввести составляющие момента количества движения

$$\hat{L}_i = -ik \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k} = -i \epsilon_{ijk} \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_k},$$

удовлетворяющие обычным коммутационным соотношениям

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = ik \epsilon_{ijk} \hat{L}_k,$$

то полный набор квантовомеханических наблюдаемых на сфере представляет собой систему двух диагональных операторов

$$\begin{aligned} \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2 &= k^2 \ell(\ell+1), \\ k^2 \hat{L}_3^2 - k^2 \hat{L}_1^2 &= k^2 \mu_{\ell(m)}(k^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Собственными функциями системы диагональных операторов (8) являются сферо-конические функции. Иногда удобно вместо второго из операторов (8) рассматривать эквивалентный ему оператор, являющийся его линейной комбинацией с первым оператором из (8). Тогда вместо системы диагональных операторов (8) имеем систему операторов, также диагональных на сферо-конических функциях

$$\begin{aligned} \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2 &= k^2 \ell(\ell+1), \\ e_1 \hat{L}_1^2 + e_2 \hat{L}_2^2 + e_3 \hat{L}_3^2 &= k^2 \epsilon_{\ell(m)}(k^2), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ , и

$$e_1 = -(1+k^2), \quad e_2 = (2k^2-1), \quad e_3 = (2-k^2). \quad (10)$$

Между  $\epsilon_{\ell(m)}(k^2)$  и  $\mu_{\ell(m)}(k^2)$  существует очевидная связь<sup>x)</sup>

$$\epsilon_{\ell(m)}(k^2) = 3 \mu_{\ell(m)}(k^2) + (2k^2-1) \ell(\ell+1).$$

Отметим, что собственные значения  $\mu_{\ell(m)}(k^2)$  и  $\epsilon_{\ell(m)}(k^2)$  обладают сле-

<sup>x)</sup> Более подробно о построении и свойствах сферо-конических функций, а также о свойствах собственных значений  $\mu_{\ell(m)}(k^2)$  и  $\epsilon_{\ell(m)}(k^2)$  см. в [3].



дующим свойством симметрии:

$$\mu_{\ell(m)}(k^2) = -\mu_{\ell(-m)}(k^2), \quad \varepsilon_{\ell(m)}(k^2) = -\varepsilon_{\ell(-m)}(k^2),$$

которое связано с преобразованием (2). При заданном  $\ell$  функции  $\mu_{\ell(m)}(k^2)$  и  $\varepsilon_{\ell(m)}(k^2)$  ограничены, причем имеет место

$$|\mu_{\ell(m)}(k^2)| \leq \ell^2, \quad |\varepsilon_{\ell(m)}(k^2)| \leq \ell(2\ell-1).$$

### Нецентральные силы

Естественно возникает вопрос, можно ли из класса потенциалов типа (4) выбрать какой-нибудь нецентральный потенциал, представляющий интерес с физической точки зрения. Если положить в (4)

$$\begin{aligned} a(\psi) &= q k^2 \sin^2 \psi [3k^2 \sin^2 \psi - 2(2k^2 - 1)], \\ b(\psi) &= -q k^2 \sin^2 \psi' [3k^2 \sin^2 \psi' - 2(2k'^2 - 1)], \end{aligned} \quad (\text{II})$$

где  $0 < q < \infty$  - некоторая постоянная, то, как нетрудно непосредственно убедиться, нецентральная часть потенциала (4) запишется в виде

$$q r^{-2} [k^2 (3 \cos^2 \psi - 1) - k'^2 (3 \cos^2 \psi' - 1)] = q r^{-2} [e_1 \xi_1^2 + e_2 \xi_2^2 + e_3 \xi_3^2]_{(I2)}$$

причем постоянные  $e_i$  связаны с  $k^2$  соотношениями (10)<sup>x</sup>. Может быть, что с первого взгляда и не видно, что нецентральный потенциал (I2) относится к классу тензорных потенциалов типа

$$v(r) [3(\vec{\alpha} \vec{\xi})(\vec{\beta} \vec{\xi}) - (\vec{\alpha} \vec{\beta}) \xi^2], \quad (\text{I3})$$

<sup>x</sup> При  $k^2 = 0$  и  $k^2 = 1$  потенциал (I2) принимает частный вид  $q r^{-2} P_2(\cos \psi)$  и  $-q r^{-2} P_2(\cos \psi')$  соответственно ( $P_2(x)$  - полином Лежандра). Отметим, что потенциал (I2) при преобразовании (2) меняет знак.

где  $v(r)$  - функция только  $r$ ,  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  - два произвольно заданных единичных вектора,  $\vec{e}$  - единичный вектор вдоль  $\vec{r}$ . В случае потенциала (I2) функция  $v(r) = q r^{-2}$  и единичные векторы  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  имеют составляющие

$$\vec{\alpha} = (k, 0, k'), \quad \vec{\beta} = (-k, 0, k').$$

Такой выбор составляющих векторов  $\vec{\alpha}$  и  $\vec{\beta}$  соответствует диагонализации угловой части потенциала (I3), т.е. выбору главных осей системы. Доказательство этого утверждения приведено в приложении.

Дифференциальные уравнения (6) в случае нецентрального потенциала (I2) приобретают форму волнового уравнения Ламе. Для полного решения задачи с потенциалом (I2) необходимо отыскать периодические решения уравнения

$$\left\{ \hat{D}(k^2, \psi) - \frac{6m_0}{k^2} q k^4 \sin^4 \psi + \right. \quad (I4)$$

$$\left. + \left[ \lambda(\lambda+1) + \frac{4m_0}{k^2} q (2k^2-1) \right] k^2 \sin^2 \psi + \mu \right\} \Lambda(\psi) = 0$$

и определить собственные значения  $\lambda$  и  $\mu$  как функции параметров  $q$  и  $k^2$ , т.е. найти  $\lambda = \lambda(q, k^2)$  и  $\mu = \mu(q, k^2)$ . Волновое уравнение Ламе имеет три конечных особых точки и нерегулярную особую точку на бесконечности<sup>/4/</sup>. Из-за этой нерегулярной особой точки возникают при решении волнового уравнения Ламе определённые трудности. Известные методы решения волнового уравнения Ламе используют методы теории возмущений в предположении, что постоянная  $\frac{m_0 q}{k^2}$  в (I4) мала. Члены, содержащие  $q$ , рассматриваются как возмущение. Собственные значения  $\lambda$  и  $\mu$  в первом порядке теории возмущений однако проще всего получить матричным методом, исходя из уравнений (7).

Выразим составляющие момента количества движения через дифференциальные операторы от переменных  $\psi$  и  $\psi'$ , сохраняющиеся величины (7) для случая нецентрального потенциала (12) можно переписать в виде

$$\hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2 + 2m_0 q (e_1 \xi_1^2 + e_2 \xi_2^2 + e_3 \xi_3^2) = k^2 \lambda(\lambda+1),$$

$$k^2 \hat{L}_3^2 - k^2 \hat{L}_1^2 + 6m_0 q k^2 k'^2 \xi_2^2 = k^2 \mu. \quad (15)$$

Вместо системы операторов (15) можно ввести эквивалентную систему операторов так, чтобы второй оператор в (15) имел более симметричную форму

$$\hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2 + 2m_0 q (e_1 \xi_1^2 + e_2 \xi_2^2 + e_3 \xi_3^2) = k^2 \lambda(\lambda+1),$$

$$e_1 \hat{L}_1^2 + e_2 \hat{L}_2^2 + e_3 \hat{L}_3^2 - 2m_0 q (e_2 e_3 \xi_1^2 + e_3 e_1 \xi_2^2 + e_1 e_2 \xi_3^2) = k^2 \varepsilon, \quad (16)$$

причём  $\varepsilon$  и  $\mu$  связаны соотношением

$$\varepsilon = 3\mu + (2k^2 - 1)\lambda(\lambda+1) + 2m_0 q (2k^2 - 1)^2.$$

Так как в уравнение (5) для радиальной волновой функции  $R(r)$  входит только постоянная  $\lambda$ , то вычислим её сейчас в предположении, что постоянная  $q$  в потенциале (12) достаточно мала. При  $q=0$  система операторов (16) совпадает с системой диагональных операторов на сфере (9). Собственными волновыми функциями системы операторов (9) являются сферо-конические функции, которые будем обозначать через  $|\ell, (m); k^2\rangle$ ,  $(m) = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell$ . С помощью этих функций легко найти в первом порядке теории возмущений значение  $\lambda$ . Так как имеет место<sup>/3/</sup>

$$\langle \ell, (m); k^2 | e_1 \xi_1^2 + e_2 \xi_2^2 + e_3 \xi_3^2 | \ell, (m); k^2 \rangle = -\frac{2\varepsilon_{\ell(m)}(k^2)}{(2\ell-1)(2\ell+3)}, \quad (17)$$

то непосредственно из (16) находим

$$\lambda(\lambda+1) \approx \ell(\ell+1) - \frac{4m_0 q}{k^2} \frac{\varepsilon_{\ell(m)}(k^2)}{(2\ell-1)(2\ell+3)}.$$

С той же степенью точности получаем значение постоянной  $\lambda$

$$\lambda \approx \ell - \frac{4m_0g}{k^2} \frac{\varepsilon_{\ell(m)}(k^2)}{(2\ell-1)(2\ell+1)(2\ell+3)}. \quad (18)$$

### Расщепление энергетических уровней

Разделение переменных в сферо-конической системе координат позволяет решить уравнение Шредингера для нецентрального потенциала (12), который является приведённым к главным осям потенциалом

$$\varphi r^{-4} [3(\vec{\alpha} \vec{r})(\vec{\beta} \vec{r}) - (\vec{\alpha} \vec{\beta}) \vec{r}^2]. \quad (19)$$

Потенциал (19) имеет аналогичную угловую зависимость как потенциал взаимодействия двух магнитных диполей с дипольными моментами  $\vec{d}_1, \vec{d}_2$

$$-r^{-5} [3(\vec{d}_1 \vec{r})(\vec{d}_2 \vec{r}) - (\vec{d}_1 \vec{d}_2) \vec{r}^2]. \quad (20)$$

Различие потенциалов (19) и (20) в их зависимости от  $r$ ; первый обратно пропорционален  $r^2$  и второй  $r^3$ . В связи с этим остаётся открытым вопрос, насколько реально нецентральное взаимодействие (19). Возможно, потенциал (19) может служить некоторой приближенной моделью для систем с нецентральным взаимодействием с тем преимуществом, что для этого потенциала задача точно формулируется и решается до конца, если решить уравнение Ламе (14).

Однако с помощью сферо-конических функций можно рассчитать в первом порядке теории возмущений расщепление энергетических уровней в центрально-симметричном поле, которое нарушено небольшим нецентральным взаимодействием типа (13) с произвольной функцией  $\tau(r)$ . Пусть  $u(r)$  сферически симметричный потенциал, в котором существуют энергетические уровни  $E_{n\ell}$ , т.е.

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta + u(r) \right] \psi_l = E_{nl} \psi_l, \quad (21)$$

где  $n$  - радиальное и  $\ell$  - орбитальное квантовое число. Пусть сферическая симметрия системы нарушена достаточно малым нецентральным взаимодействием (13), которое можно рассматривать как возмущение. Выбирая угловую зависимость волновой функции в (21) в виде сферо-конических функций, находим в первом порядке теории возмущений, согласно формуле (17), расщепление энергетических уровней

$$\Delta E_{nl} = E_{nl(m)} - E_{nl} = -\langle v(r) \rangle_{nl} \frac{2 \varepsilon_{\ell(m)}(k^2)}{(2\ell-1)(2\ell+3)}, \quad (22)$$

где  $k^2 = \frac{1}{4}(\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2$  и  $\langle v(r) \rangle_{nl}$  является диагональным матричным элементом функции  $v(r)$  от радиальных волновых функций  $R_{nl}(r)$ . Таким образом, задача о расщеплении энергетических уровней центрально-симметричного поля нецентральным взаимодействием (13) сводится по существу только к вычислению матричного элемента  $\langle v(r) \rangle_{nl}$ . В частности, для  $v(r) = -d_1 d_2 r^{-3}$  формула (22) даёт расщепление энергетических уровней центрально-симметричного поля диполь-дипольным взаимодействием. Конкретный расчёт в общем случае зависит от конкретного вида функций  $u(r)$  и  $v(r)$  переменной  $r$ .

Для иллюстрации зависимости расщепления энергетических уровней центрально-симметричного поля от параметра  $k^2$ , т.е. от угла между векторами  $\vec{\alpha}$  и  $\vec{\beta}$ , рассмотрим расщепление энергетических уровней нецентральным взаимодействием (19) для двух наиболее часто встречающихся сферически-симметричных потенциалов - кулоновского и гармонического осциллятора<sup>/5/</sup>. Исходя из ра-

диального уравнения (5), находим для кулоновского потенциала  $-Ze^2r^{-1}$  с той же степенью точности, с которой вычислено  $\lambda$  в (18), спектр энергий

$$E_{n\lambda} = -\frac{Z^2 e^4 m_0}{2k^2(n+\lambda+1)^2} \approx -\frac{Z^2 e^4 m_0}{2k^2 N^2} \left[ 1 + \frac{8m_0 q}{k^2 N} \frac{\epsilon_{\ell(m)}(k^2)}{(2\ell-1)(2\ell+1)(2\ell+3)} \right], \quad (23)$$

где  $N=n+\ell+1$  - главное квантовое число. Как нетрудно увидеть из формулы (23), каждый уровень с заданным  $N$  расщепляется на  $N^2$  подуровней. Аналогично в случае сферически симметричной потенциальной ямы  $\frac{1}{2} m_0 \omega^2 r^2$  находим энергетический спектр при наличии нецентрального взаимодействия (19)

$$E_{n\lambda} = k\omega(2n+\lambda+3/2) \approx k\omega \left[ N + \frac{3}{2} - \frac{4m_0 q}{k^2} \frac{\epsilon_{\ell(m)}(k^2)}{(2\ell-1)(2\ell+1)(2\ell+3)} \right], \quad (24)$$

где  $N=2n+\ell$  - главное квантовое число. Как и в случае кулоновского потенциала, нецентральное взаимодействие (19) снимает вырождение и для сферически-симметричной потенциальной ямы, и каждый уровень с заданным  $N$  расщепляется на  $\frac{1}{2}(N+1)(N+2)$  подуровней.

На рисунках 1 и 2 показан фактор  $\Delta E_N/E_N = (E_{N\ell(m)} - E_N)/E_N$ , определяющий расщепление вырожденных энергетических уровней в зависимости от параметра  $0 \leq k^2 \leq 1$  для низших значений главного квантового числа в случае кулоновского потенциала и сферически-симметричной потенциальной ямы соответственно. На рис. 1 показан расщепляющий фактор  $\Delta E_N/E_N = 8m_0 q \epsilon_{\ell(m)}(k^2)/k^2 N(2\ell-1)(2\ell+1)(2\ell+3)$  из (23) в единицах  $8m_0 q/15k^2$  и на рис. 2 - расщепляющий фактор из (24)  $\Delta E_N/E_N = -8m_0 q \epsilon_{\ell(m)}(k^2)/k^2 (2N+3)(2\ell-1)(2\ell+1)(2\ell+3)$  в единицах  $16m_0 q/75k^2$ . Из рисунков видно сильное перепутывание термов с разными  $\ell$  и  $(m)$  в зависимости от параметра  $k^2$ . При некоторых значениях параметра  $k^2$  возможно случайное совпадение двух или более расщепленных энергетических уровней (точки

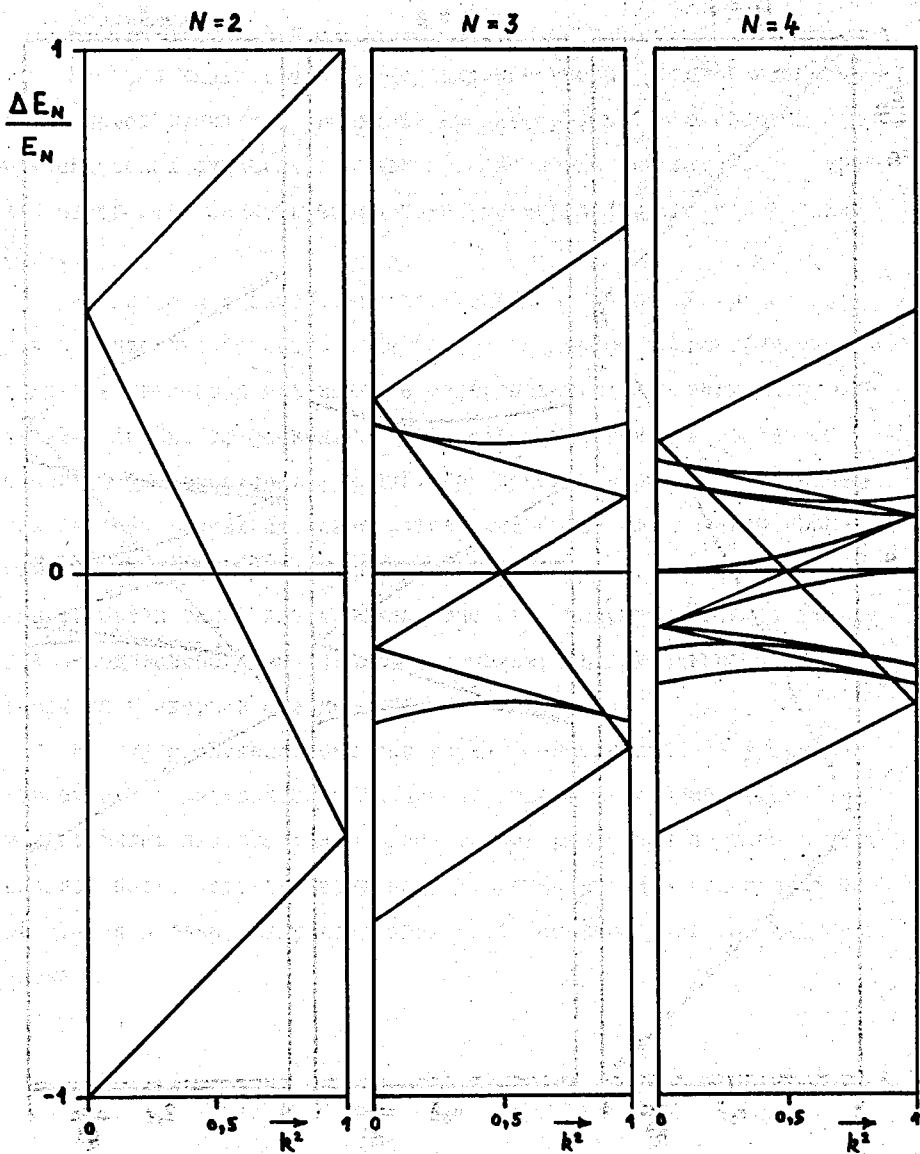


Рис. I.

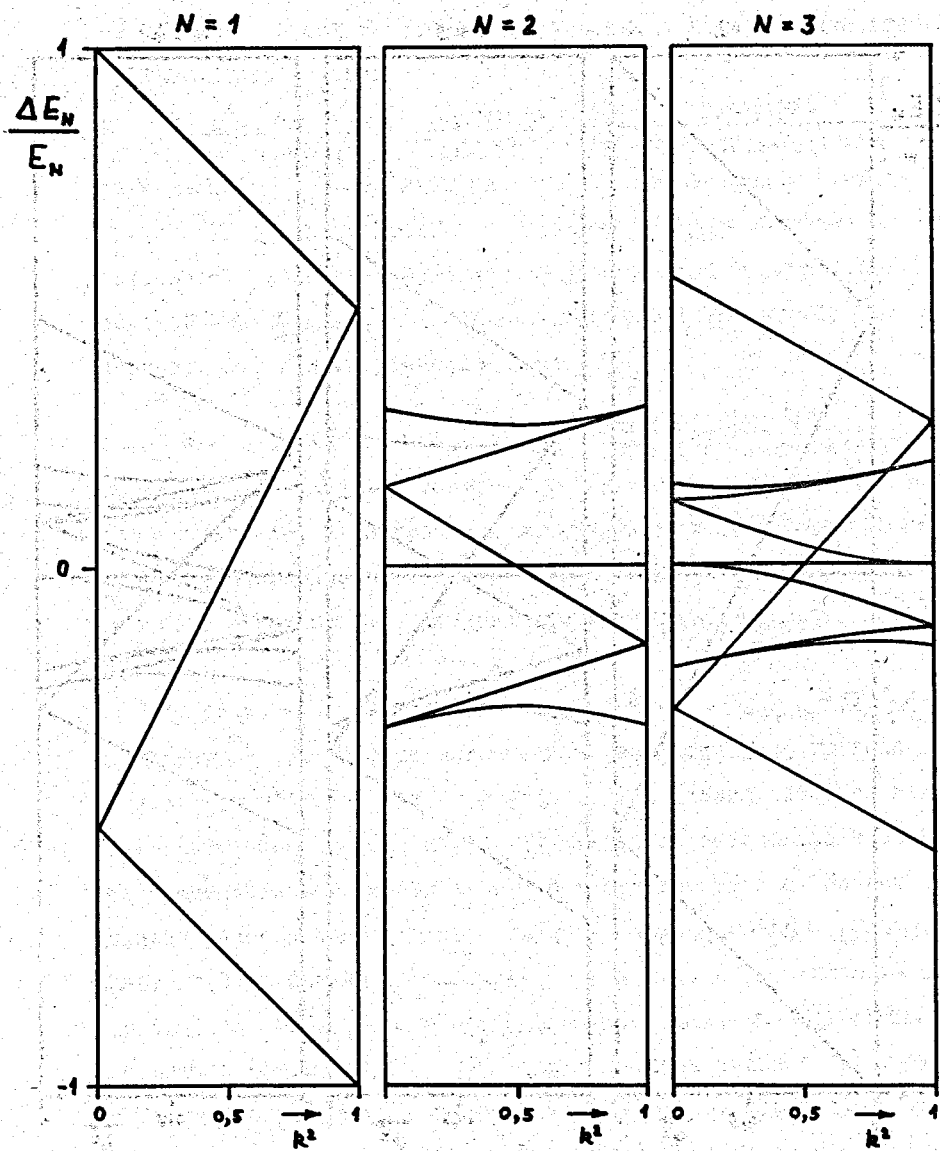


Рис. 2.



пересечения кривых на рисунках 1 и 2).

### Заключение

Итак, показано, что при правильном выборе угловой зависимости волновой функции в уравнении Шредингера, можно с помощью сферо-конических функций рассчитать расщепление энергетических уровней центрально-симметричного поля нецентральным взаимодействием (19).

По-видимому, разделение переменных в уравнении Шредингера для нецентрального потенциала (12) и задача об асимметричном волчке в квантовой механике не исчерпывают всех возможных применений в физике сферо-конической системы координат и связанных с ней сферо-конических функций. При использовании сферо-конической системы координат можно решить ряд более общих задач проще, чем с использованием обычно применяемой сферической системы координат. Среди таких задач можно отметить, например, эффект Штарка для неводородоподобных атомов и проблему квадрупольного взаимодействия в ядерной физике.

Наряду с расщеплением вырожденных энергетических уровней в сферически симметричном поле нецентральным взаимодействием (19) представляет интерес также рассмотрение рассеяния частицы в центральном поле, которое нарушено этим нецентральным взаимодействием. Такая задача ввиду некоторых особенностей будет рассмотрена позже.

## Приложение

Запишем угловую часть потенциала (I3), представляющую собой свертку двух симметричных тензоров, в виде квадратичной формы

$$A_{ik} \xi_i \xi_k, \quad A_{ik} = \frac{3}{2} (\alpha_i \beta_k + \alpha_k \beta_i) - (\alpha_i \beta_i) \delta_{ik}. \quad (\text{П.1})$$

Подвергнем координатную систему вращению, при котором координаты точки на сфере  $\xi_i$  преобразуются согласно формуле

$$\xi'_i = a_{ij} \xi_j, \quad a_{ij} a_{kj} = \delta_{ik}, \quad (\text{П.2})$$

где  $a_{ik}$  - элементы вещественной ортогональной матрицы. При вращении (П.2) квадратичная форма (П.1) переходит в квадратичную форму с коэффициентами  $A'_{ik}$

$$A'_{ik} = a_{ij} A_{jl} a_{kl}. \quad (\text{П.3})$$

Как известно из теории матриц, любую симметрическую матрицу можно диагонализировать с помощью ортогонального преобразования<sup>/6/</sup>.

Пусть собственные значения матрицы  $A_{ik}$  равны  $e_1 \leq e_2 \leq e_3$ , причем  $e_1 + e_2 + e_3 = 0$  в силу того, что  $\text{Sp } A_{ik} = 0$ . В новой координатной системе имеем

$$\begin{aligned} 3 \alpha'_1 \beta'_1 - (\bar{\alpha}' \cdot \bar{\beta}') &= e_1, & 3 \alpha'_2 \beta'_2 - (\bar{\alpha}' \cdot \bar{\beta}') &= e_2, & 3 \alpha'_3 \beta'_3 - (\bar{\alpha}' \cdot \bar{\beta}') &= e_3, \\ \alpha'_1 \beta'_3 + \alpha'_3 \beta'_1 &= 0, & \alpha'_3 \beta'_1 + \alpha'_1 \beta'_3 &= 0, & \alpha'_1 \beta'_2 + \alpha'_2 \beta'_1 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Система уравнений (П.4), как нетрудно убедиться, удовлетворяется двумя парами векторов  $\bar{\alpha}', \bar{\beta}'$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}' &= (k, 0, k'), & \bar{\beta}' &= (-k, 0, k'), \\ \tilde{\alpha}' &= (-k, 0, -k'), & \tilde{\beta}' &= (k, 0, -k'), \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

причем тогда постоянные  $e_i$  выражаются через  $k^2$  с помощью формул (I0). Концы четырех векторов (П.5) совпадают с фокусами эллиптической системы координат на сфере.

### Литература

1. Н.А.Крамeрс, G.P.Itman. Zs.Phys., 53, 553 (1929); 58, 217 (1929); 60, 663 (1930); R.D.Spence, Amer.J.Phys., 27, 329(1959);  
И. Лукач, Я.А. Смородинский, ЖЭТФ, 57, 1342 (1969);  
М.Д.О. Стрэтт. Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, Харьков-Киев, 1935.
2. М.Н. Олевский. Мат. сб., 27, 379 (1950).
3. И. Лукач. О полном наборе квантовомеханических наблюдаемых на трехмерной сфере. Препринт ОИЯИ Р4-6268, Дубна, 1972.
4. И. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939.  
Г. Бейтмен, А.Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т.3, Наука, Москва, 1967.
5. А.С. Давыдов. Квантовая механика, ГИФМЛ, Москва, 1963.
6. Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц, Наука, Москва, 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел  
4 февраля 1972 г.