Теор. и матем. физ., 1973, т. 14, № 3, с. 366-380.
27/III-72

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P4 - 6268

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

И. Лукач

О ПОЛНОМ НАБОРЕ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИХ НАБЛЮДАЕМЫХ НА ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ

1972

P4 - 6268

И.Лукач*

О ПОЛНОМ НАБОРЕ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКИХ НАБЛЮДАЕМЫХ НА ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ

Направлено в ТМФ

*Физический институт Словацкой Академии наук, Братислава

Введение

Исключительно важную роль в физике играет одна из основных групп геометрической симметрии - группа трехмерных вращений. Эта группа часто используется в физике при решении задач, обладающих сферической симметрией. Фактически во всех монографиях, которые посвящены применениям теории групп, рассматривается группа трехмерных вращений. Свойства этой группы хорошо изучены, построены её неприводимые представления, найдены другие её характеристики.

Однако все эти результаты получены в представлении, в котором диагонален оператор квадрата момента количества движения и оператор одной из его проекций. Базисом такого представления являются хорошо известные сферические функции. Оператор квадрата момента количества движения и коммутирующий с ним оператор одной из его проекций представляют собой полный набор квантовомеханических наблюдаемых на трехмерной сфере. Естественно, возникает вопрос, является ли такой набор диагональных операторов на сфере единственно возможным набором, являются ли сферические функции единственно возможным базисом для группы трехмерных вращений. Оказывается, что нет.

Поверхность трехмерной сферы представляет собой двумерное пространство постоянной положительной кривизны, которое, как и всякое пространство постоянной кривизны, допускает группу движений. Группой движений двумерного пространства постоянной положительной кривизны является группа трехмерных вращений.

Обозначим через $\hat{L}_i$, $i = 1,2,3$ составляющие оператора момента количества движения, которые выражаются через координаты

ξ_i^2 точки на единичной сфере $\xi_i^2 = 1$ обычным образом[x] (полагаем $\hbar = 1$).

$$\hat{L}_i = i\, e_{ikl}\, \xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_l}\,.$$

Как известно, составляющие оператора момента количества движения, представляющие собой генераторы группы трехмерных вращений, удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$\left[\hat{L}_i, \hat{L}_k\right] = i\, e_{ikl}\, \hat{L}_l\,. \qquad (\mathrm{I})$$

Инвариантным относительно вращений оператором на сфере является оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} = -\hat{L}_i^2\,, \qquad (2)$$

собственные значения которого, как известно, равны $-l(l+1)$, $l = 0, 1, 2, \dots$ Наиболее общим оператором, квадратичным в генераторах $\hat{L}_i$ группы трехмерных вращений, который коммутирует с оператором Лапласа (2), является полином

$$\frac{1}{2} A_{ik} \left(\hat{L}_i \hat{L}_k + \hat{L}_k \hat{L}_i\right) \qquad (3)$$

с симметричной матрицей коэффициентов $A_{ik} = A_{ki}$. Действительно, так как имеет место

$$\left[\hat{L}_j^2, \hat{L}_i \hat{L}_k\right] = \left[\hat{L}_j^2, \hat{L}_i\right]\hat{L}_k + \hat{L}_i\left[\hat{L}_j^2, \hat{L}_k\right] = 0\,,$$

то отсюда следует, что оператор (3) коммутирует с лапласианом (2).

В работе /I/ показано, что любой однородный симметрический полином, квадратичный в генераторах $\hat{L}_i$, вида (3), можно вращением трехмерной сферы свести к оператору

$$a_1 \hat{L}_1^2 + a_2 \hat{L}_2^2 + a_3 \hat{L}_3^2\,. \qquad (4)$$

---

x) Здесь и в дальнейшем по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование от I до 3.

В частном случае $a_1 = a_2$ оператор (4) можно линейной комбинацией с оператором Лапласа (2) свести к эквивалентному оператору $\hat{L}_3^2$. В той же работе показано, что оператору (4) и оператору $\hat{L}_3^2$ соответствуют две возможных ортогональных криволинейных системы координат, которые допускают разделение переменных в уравнении Лапласа на сфере. Такими системами являются эллиптическая и полярная системы координат на сфере /2/. Так как полярная система координат (в дальнейшем с.к.) является частным случаем эллиптической, то будем рассматривать в дальнейшем только эллиптическую с.к. Все полученные результаты в частном случае будут относиться к полярной с.к. на сфере.

Отметим, что с полярной и эллиптической с.к. на сфере связаны соответственно сферическая и сферо-коническая с.к. в трехмерном эвклидовом пространстве с декартовыми координатами $x_i = r\,\xi_i$ (ξ_i - координаты точки на сфере). Следовательно, при решении задач со сферической симметрией следует, наряду с обычно используемой сферической с.к., использовать также сферо-коническую с.к.

Эллиптическая система координат на сфере

В эллиптической с.к. на сфере, записанной в алгебраической форме

$$\xi_1^2 = \frac{(a_1-\rho_1)(a_1-\rho_2)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}, \quad \xi_2^2 = \frac{(a_2-\rho_1)(a_2-\rho_2)}{(a_2-a_3)(a_2-a_1)}, \quad \xi_3^2 = \frac{(a_3-\rho_1)(a_3-\rho_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)},$$

$$ds^2 = d\xi_i^2 = -\frac{1}{4}(\rho_1-\rho_2)\left[\frac{d\rho_1^2}{P(\rho_1)} - \frac{d\rho_2^2}{P(\rho_2)}\right], \qquad (5)$$

$$P(\rho) = (\rho-a_1)(\rho-a_2)(\rho-a_3), \quad a_1 \le \rho_1 \le a_2 \le \rho_2 \le a_3,$$

диагонален, как нетрудно в этом непосредственно убедиться, оператор (4). В формулах (5), а также в операторе (4), не теряя общности, можно положить $a_1+a_2+a_3=0$. Для применения в физике, однако, удобно пользоваться эллиптической с.к. на сфере, записанной в тригонометрической форме[x]. Введем параметры ψ и ψ', определяющие положение точки на сфере, с помощью следующих соотношений:

$$\rho_1 = a_1 + (a_2-a_1)\cos^2\psi \;, \quad \rho_2 = a_3 - (a_3-a_2)\cos^2\psi'. \tag{6}$$

Используя (6), можно записать эллиптическую с.к. на сфере в тригонометрической форме

$$\xi_1 = \sqrt{1-k'^2\cos^2\psi'}\,\cos\psi\,, \quad \xi_2 = \sin\psi'\sin\psi\,, \quad \xi_3 = \cos\psi'\sqrt{1-k^2\cos^2\psi}\,, \tag{7}$$

$$ds^2 = d\xi_i^2 = (k^2\sin^2\psi + k'^2\sin^2\psi')\left[\frac{d\psi^2}{1-k^2\cos^2\psi} + \frac{d\psi'^2}{1-k'^2\cos^2\psi'}\right],$$

$$0 \le \psi \le 2\pi \;, \quad 0 \le \psi' \le \pi \;, \quad k^2+k'^2 = 1$$

где

$$k^2 = \frac{a_2-a_1}{a_3-a_1} = \sin^2 f \;, \quad k'^2 = \frac{a_3-a_2}{a_3-a_1} = \cos^2 f\,,$$

и $2f$ – расстояние между фокусами эллиптической с.к. на сфере. Четыре фокуса эллиптической с.к. находятся в точках $(\pm k, 0, \pm k')$. При тригонометрической параметризации эллиптической с.к. на сфере диагонален оператор

---

[x] В литературе тригонометрическая форма эллиптической с.к. на сфере не используется. Кроме алгебраической формы (5), используются параметризации через эллиптические функции Вейерштрасса и Якоби.

$$k'^2 \hat{L}_3^2 - k^2 \hat{L}_1^2 , \qquad (8)$$

который эквивалентен оператору (4), так как он является линейной комбинацией оператора (4) и оператора Лапласа (2).

Ортогональными линиями эллиптической с.к. на сфере ($\rho_\nu = const$, ν = I,2, т.е. $\psi, \psi' = const$) являются два семейства софокусных эллипсов и выпуклых гипербол (см. рис. I) , уравнения которых записываются соответственно в виде

$$\frac{\xi_1^2}{\rho_\nu - a_1} + \frac{\xi_2^2}{\rho_\nu - a_2} + \frac{\xi_3^2}{\rho_\nu - a_3} = 0 , \ \nu = 1,2$$

или же

$$\frac{\xi_1^2}{\cos^2\psi} + \frac{k'^2 \xi_3^2}{1 - k^2\cos^2\psi} = 1 , \qquad \frac{k^2 \xi_1^2}{1 - k'^2\cos^2\psi'} + \frac{\xi_3^2}{\cos^2\psi'} = 1 .$$

Эллипс (выпуклая гипербола) на сфере определяется как геометрическое место точек, сумма (разность) сферических расстояний которых до двух данных точек (фокусов) является постоянной величиной /2/. Отметим, что гипербола на сфере в отличие от гиперболы в эвклидовой плоскости является на самом деле замкнутой кривой.

Из формул (7) непосредственно видно, что в частных случаях $k^2 = 0$ и $k^2 = 1$ эллиптическая с.к. переходит в полярную с.к. на сфере с осью симметрии вдоль оси ξ_3 и оси ξ_1 соответственно. Обратим внимание на то, что взаимная формальная замена k^2, ψ на k'^2, ψ' в эллиптической с.к., записанной в тригонометрической форме (7), приводит к преобразованию

$$\xi_1 \to \xi_3 , \quad \xi_2 \to \xi_2 , \quad \xi_3 \to \xi_1 . \qquad (9)$$

Это преобразование соответствует переходу от правой с.к. ξ_1, ξ_2, ξ_3 к левой с.к. ξ_3 , ξ_2 , ξ_1 и на самом деле соответствует отражению в плоскости, проходящей через ось ξ_2 и прямую $\xi_1 = \xi_3$,

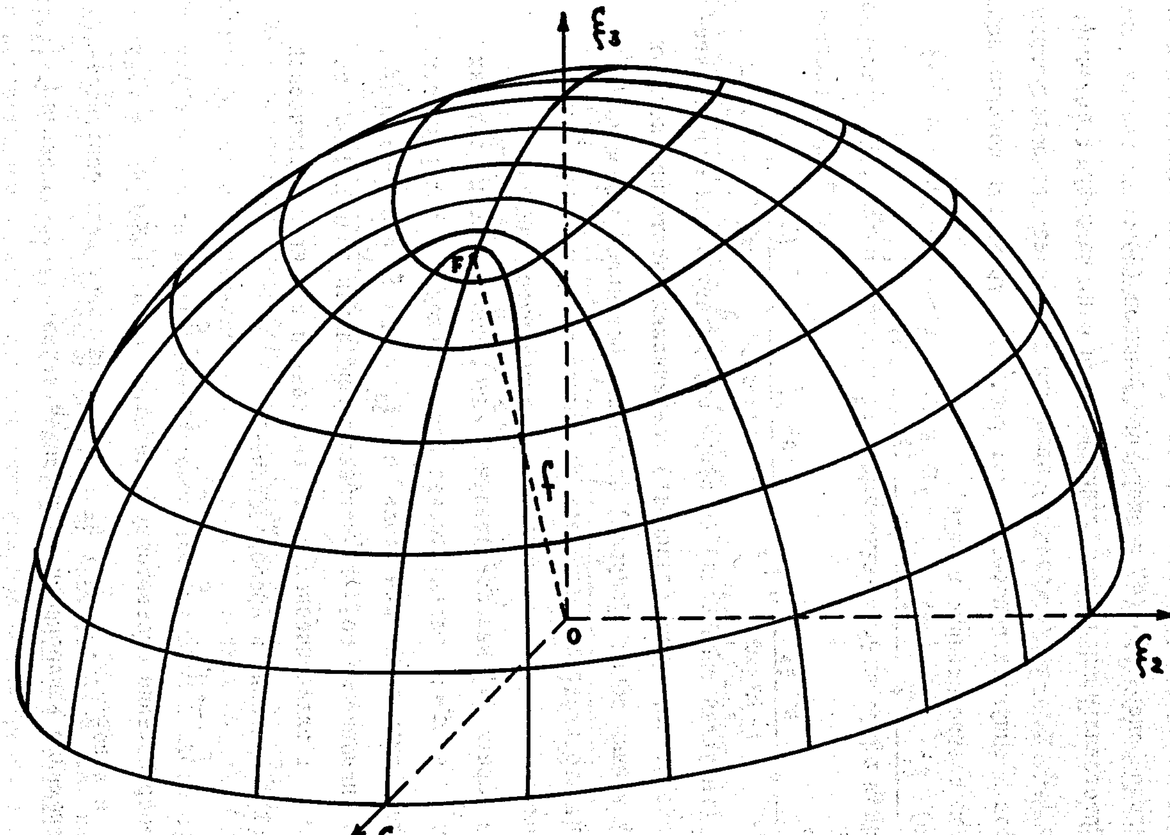


Рис. I.

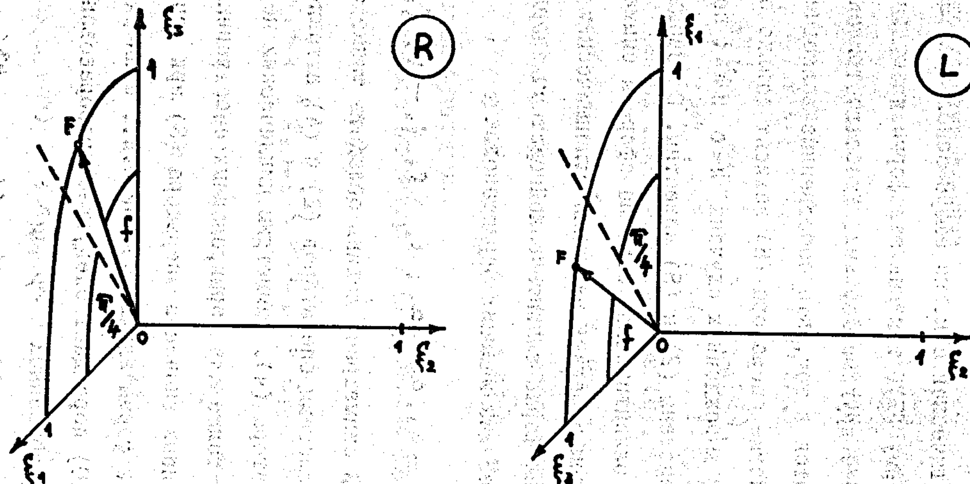


Рис. 2.

как это показано на рис. 2. Преобразованию (9) соответствует следующая несобственная матрица вращения

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для построения собственных волновых функций диагональных операторов в эллиптической с.к. на сфере используем именно тригонометрическую форму (7), так как эта форма имеет ряд преимуществ по сравнению с другими формами. Удобство тригонометрической формы заключается в том, что собственные волновые функции и собственное значение оператора (8) зависят только от одного параметра k^2. В вырожденных случаях $k^2=0$ и $k^2=1$ собственные волновые функции системы (2) и (8) известны. С помощью тригонометрической формы эллиптической с.к. на сфере и симметрии (9) нам удастся в дальнейшем избежать введения эллиптических функций.

Алгебраическая форма эллиптической системы координат (5) обладает симметрией циклических перестановок

$$a_1 \to a_2, \; a_2 \to a_3, \; a_3 \to a_1; \; \xi_1 \to \xi_2, \; \xi_2 \to \xi_3, \; \xi_3 \to \xi_1. \qquad (10)$$

Очевидно, что этой симметрией должны обладать также собственные волновые функции системы операторов (2) и (4), а также собственные значения оператора (4). Симметрию циклических перестановок удается сохранить также для нормированных собственных волновых функций и собственных значений оператора (8) при использовании тригонометрической формы эллиптической с.к., если учесть, что преобразование (10) порождает следующее преобразование параметров k^2, k'^2 и переменных ψ, ψ'

$$k^2 \to -k'^2/k^2 \to 1/k'^2; \; k'^2 \to 1/k^2 \to -k^2/k'^2, \qquad (11)$$

$$\cos^2\psi \to -k^2/k'^2 \sin^2\psi \to 1-k^2\cos^2\psi; \; 1-k'^2\cos^2\psi' \to -k'^2/k^2 \sin^2\psi \to \cos^2\psi'.$$

Симметрии (9) и (10) удобно использовать для построения собственных волновых функций системы диагональных операторов (2) и (8) эллиптической с.к. на сфере, при вычислении нормировочных постоянных, собственных значений оператора (8) и различных матричных элементов, связанных с этими функциями.

Сферо-конические функции

Итак, наша задача состоит в том, чтобы отыскать собственные значения и собственные волновые функции системы диагональных операторов

$$\hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2 = \ell(\ell+1),$$
$$k'^2 \hat{L}_3^2 - k^2 \hat{L}_1^2 = \mu_{\ell(m)}(k^2), \tag{12}$$

где через $\mu_{\ell(m)}(k^2)$, $(m) = -\ell, -\ell+1, \ldots \ell-2, \ell-1, \ell$ обозначено $2\ell+1$ собственных значений оператора (8), причем[x)]

$$\mu_{\ell(-\ell)} \leq \mu_{\ell(-\ell+1)} \leq \ldots \leq \mu_{\ell(\ell)}. \tag{13}$$

Собственные волновые функции системы операторов (12) будем обозначать через $|\ell(m), k^2\rangle = E_{\ell(m)}(k^2;\psi;k'^2;\psi')$ и будем их называть сферо- коническими функциями.

Вместо второго оператора в (12) иногда удобно рассматривать эквивалентный ему оператор

$$e_1 \hat{L}_1^2 + e_2 \hat{L}_2^2 + e_3 \hat{L}_3^2 = \varepsilon_{\ell(m)}(k^2), \tag{14}$$

где

$$e_1 = -(1+k^2),\ e_2 = 2k^2-1,\ e_3 = 2-k^2,$$
$$e_1 + e_2 + e_3 = 0. \tag{15}$$

Между собственными значениями $\varepsilon_{\ell(m)}(k^2)$ и $\mu_{\ell(m)}(k^2)$ существует связь

$$\varepsilon_{\ell(m)}(k^2) = 3\mu_{\ell(m)}(k^2) + (2k^2-1)\ell(\ell+1). \tag{16}$$

[x)] Обозначение (m) не означает квантовое число, а служит только для нумерации собственных значений диагонального оператора (8), которые удовлетворяют неравенству (13).

Заметим, что оператор (I4) является частным случаем инвариантного относительно вращений оператора

$$\frac{3}{2}\left[(\alpha_i \hat{L}_i)(\beta_k \hat{L}_k)+(\beta_i \hat{L}_i)(\alpha_k \hat{L}_k)\right]-(\alpha_i \beta_i)\,\delta_{ik}\,\hat{L}_j^2\,,$$

когда единичные векторы $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ имеют составляющие

$$\vec{\alpha}=\pm(k,0,k'),\quad \vec{\beta}=\pm(-k,0,k'),$$

т.е. когда концы векторов $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ совпадают с фокусами эллиптической с.к. на сфере.

Установим прежде всего некоторые свойства собственных значений $\mu_{\ell(m)}(k^2)$ и $\varepsilon_{\ell(m)}(k^2)$, а также сферо-конических функций, которые вытекают из точечных преобразований. Применяя преобразование (9) к оператору (8), устанавливаем, что собственные значения $\mu_{\ell(m)}(k^2)$ и $\varepsilon_{\ell(m)}(k^2)$ обладают следующим свойством симметрии:

$$\mu_{\ell(m)}(k^2)=-\mu_{\ell(-m)}(k'^2)\,;\quad \varepsilon_{\ell(m)}(k^2)=-\varepsilon_{\ell(-m)}(k'^2).\qquad (17)$$

Сферо-конические функции при преобразовании (9) преобразуются согласно формуле

$$E_{\ell(m)}(k^2,\psi;k'^2,\psi')=E_{\ell(-m)}(k'^2,\psi';k^2,\psi).$$

Система операторов (I2) вместе с коммутационными соотношениями (1) инвариантна по отношению к одновременному изменению знаков любых двух из операторов $\hat{L}_i$, что формально совпадает с симметрией точечной группы D_2. Группа D_2, кроме тождественного элемента, содержит три операции поворота на угол π трех декартовых осей координат /3/. Неприводимые представления точечной группы D_2 представлены в таблице I.

Таблица I.

D_2	e	$C^2_{\xi_1}$	$C^2_{\xi_2}$	$C^2_{\xi_3}$
A	1	1	1	1
B_1	1	-1	-1	1
B_2	1	-1	1	-1
B_3	1	1	-1	-1

Согласно этому, сферо-конические функции должны распадаться на четыре класса, преобразующихся по неприводимым представлениям A, B_1, B_2, B_3 группы D_2.

Пусть оператор $\hat{P}$ является оператором чётности, связанным с преобразованием $\xi_i \to -\xi_i$, т.е. $\psi \to \psi+\pi$, $\psi' \to \pi-\psi'$, $\varphi \to \varphi+\pi$. Так как система операторов (I2) инвариантна относительно этого преобразования, то сферо-конические функции должны распадаться на два класса согласно их чётности. Из дальнейшего будет видно, что имеет место

$$\hat{P}\, E_{\ell(m)}(k^2,\psi;k'^2,\psi') = (-1)^{\ell} E_{\ell(m)}(k^2,\psi;k'^2,\psi'),$$
$$(m) = -\ell,-\ell+1,\dots \ell .$$

В частном случае $k^2=0$ собственные значения $\mu_{\ell(m)}(0)$ равны 0, I, I, 4, ... ℓ^2, ℓ^2, и в частном случае $k^2=1$ собственные значения $\mu_{\ell(m)}(1)$ равны $-\ell^2$, $-\ell^2$, $-(\ell-1)^2$, ... I, I, 0[x]. Продифференцировав второй из операторов (I2) по парамет-

---

[x] Собственными волновыми функциями системы диагональных операторов (I2) при $k^2=0$ и $k^2=1$ являются линейные комбинации обычных сферических функций $1/\sqrt{2}\left[Y_{\ell m}(\psi',\psi) \pm Y^*_{\ell m}(\psi',\psi)\right]$, $1/\sqrt{2}\left[Y_{\ell m}(\psi,\psi') \pm Y^*_{\ell m}(\psi,\psi')\right]$ соответственно.

ру k^2, получаем

$$\frac{d\mu_{\ell(m)}(k^2)}{dk^2} = -\left[\ell(\ell+1) - \langle \ell,(m);k^2 | \hat{L}_2^2 | \ell,(m);k^2\rangle\right] \leq 0. \qquad (18)$$

Следовательно, собственное значение $\mu_{\ell(m)}(k^2)$ является монотонно убывающей функцией параметра k^2. Из сказанного выше следует, что, как собственное значение $\mu_{\ell(m)}(k^2)$, так и собственное значение $\varepsilon_{\ell(m)}(k^2)$ при заданном ℓ для всех (m) ограничены, и имеет место

$$|\mu_{\ell(m)}(k^2)| \leq \ell^2, \quad |\varepsilon_{\ell(m)}(k^2)| \leq \ell(2\ell-1).$$

Для построения сферо-конических функций и отыскания собственных значений $\mu_{\ell(m)}(k^2)$ необходимо выразить операторы $\hat{L}_i$ через инфинитезиальные дифференциальные операторы от переменных ψ, ψ' эллиптической с.к. на сфере. Запишем операторы $\hat{L}_i$ в компактной форме

$$\hat{L}_i = \frac{i}{H_\psi H_{\psi'}}\left[\frac{\partial \xi_i}{\partial \psi'}\frac{\partial}{\partial \psi} - \frac{\partial \xi_i}{\partial \psi}\frac{\partial}{\partial \psi'}\right],$$

где через H_ψ, $H_{\psi'}$ обозначены коэффициенты Ламе эллиптической с.к. (7). Тогда нетрудно найти явный вид системы диагональных операторов (12)

$$\begin{gathered} -(k^2\sin^2\psi + k'^2\sin^2\psi')^{-1}\left[\hat{D}(k^2;\psi) + \hat{D}(k'^2;\psi')\right] = \ell(\ell+1), \\ -(k^2\sin^2\psi + k'^2\sin^2\psi')^{-1}\left[k'^2\sin^2\psi'\,\hat{D}(k^2;\psi) - k^2\sin^2\psi\,\hat{D}(k'^2;\psi')\right] = \mu_{\ell(m)}(k^2), \end{gathered} \qquad (19)$$

где через $\hat{D}(k^2;\psi)$ обозначен дифференциальный оператор

$$\hat{D}(k^2;\psi) = \sqrt{1-k^2\cos^2\psi}\,\frac{d}{d\psi}\left(\sqrt{1-k^2\cos^2\psi}\,\frac{d}{d\psi}\right).$$

Если положить $E_{\ell(m)}(k^2;\psi;k'^2;\psi') = \Lambda_{\ell(m)}(k^2;\psi)\cdot\Lambda'_{\ell(-m)}(k'^2;\psi')$, то в системе (19) переменные разделяются и функция $\Lambda_{\ell(m)}(k^2;\psi)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left[\hat{D}(k^2,\psi) + \ell(\ell+1)k^2\sin^2\psi + \mu_{\ell(m)}(k^2)\right]\Lambda_{\ell(m)}(k^2,\psi) = 0. \qquad (20)$$

Такому же дифференциальному уравнению удовлетворяет и функция $\Lambda'_{\ell(-m)}(k'^2,\psi')$, если учесть свойство симметрии (I7) собственного значения $\mu_{\ell(m)}(k^2)$.

Для построения сферо-конических функций необходимо отыскать периодические решения дифференциального уравнения (20) при целочисленных значениях ℓ, когда $\mu_{\ell(m)}(k^2)$ - определенные собственные значения.

Дифференциальное уравнение (20) представляет собой дифференциальное уравнение Ламе, записанное в тригонометрической форме[x)]. Оно является дифференциальным уравнением, принадлежащим к уравнениям класса Фукса, имеет три конечных особых точки и особую регулярную точку на бесконечности. Его можно охарактеризовать P - символом Римана/4/ -

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & k^{-2} & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & -\ell/2 & \cos^2\psi \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & \ell/2+1/2 & \end{matrix}\right\}$$

---

x) Наряду с тригонометрической формой дифференциального уравнения Ламе в математической литературе встречаются прежде всего другие его формы: форма Вейерштрасса, форма Якоби и алгебраическая форма/4/. Очевидно, что разнообразие форм дифференциального уравнения Ламе связано с существованием разных параметризаций эллиптической с.к. на сфере.

Из теории дифференциального уравнения Ламе следует, что в случае целочисленных ℓ его решением является $2\ell+1$ линейно независимых функций, соответствующих $2\ell+1$ различным собственным значениям $\mu_{\ell(m)}(k^2)$, так называемых многочленов Ламе. Решения уравнения (20) представляются в виде степенных рядов вида

$$\cos^{\sigma_1}\psi\,\sin^{\sigma_2}\psi\,(1-k^2\cos^2\psi)^{\frac{1}{2}\sigma_3}\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(\ell-\sigma)} A_{2r}(k^2;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\,(k\sin\psi)^{\ell-\sigma-2r},$$

где σ_1, σ_2, σ_3 могут принимать два значения 0 или 1, $\sigma = \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$. Коэффициенты $A_{2r}(k^2;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению, вытекающему из дифференциального уравнения (20)

$$\begin{aligned} &2r(2\ell+1-2r)A_{2r}+\\ &+\left[\mu(k^2)+(\ell+2-\sigma_1-2r)^2k^2-(\ell+2-\sigma_3-2r)^2k'^2\right]A_{2r-2}+\\ &+(\ell+4-\sigma-2r)(\ell+3-\sigma+2\sigma_2-2r)k^2k'^2A_{2r-4}=0. \end{aligned} \tag{21}$$

В формуле (21) $A_p \equiv 0$ для $p<0$. Из (21) видно, что при взаимной замене $k^2 \longleftrightarrow k'^2$ и $\sigma_1 \longleftrightarrow \sigma_3$ коэффициенты A_{2r} удовлетворяют соотношению

$$A_{2r}(k'^2;\sigma_3,\sigma_2,\sigma_1) = (-1)^r A_{2r}(k^2;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3).$$

Условие, определяющее собственные значения, имеет вид

$$A_{\ell+2-\sigma}=0$$

и представляет собой алгебраическое уравнение степени $\frac{1}{2}(\ell-\sigma)+1$ относительно μ. Можно показать, что в невырожденном случае $0<k^2<1$ это уравнение имеет $\frac{1}{2}(\ell-\sigma)+1$ различных корней. Из определителя, который определяет собственные значения μ, нетрудно получить следующее правило сумм:

$$\sum \mu = \frac{1}{6}(\ell-\sigma+2)\left[(k^2-k'^2)\ell(\ell+1)-(\ell+\sigma-1)(e_1\sigma_1+e_2\sigma_2+e_3\sigma_3)\right].$$

Собственные значения $\mu_{\ell(m)}(k^2)$ для ℓ = 0,I,2,3 приведены в таблице 3. Их графическая зависимость от параметра $0 \leq k^2 \leq 1$ показана на рис. 3 .

Согласно классификации собственных волновых функций системы диагональных операторов (I2) относительно точечной группы D_2 , показатели σ_1 , σ_2 , σ_3 могут принимать значения, представленные в таблице 2.

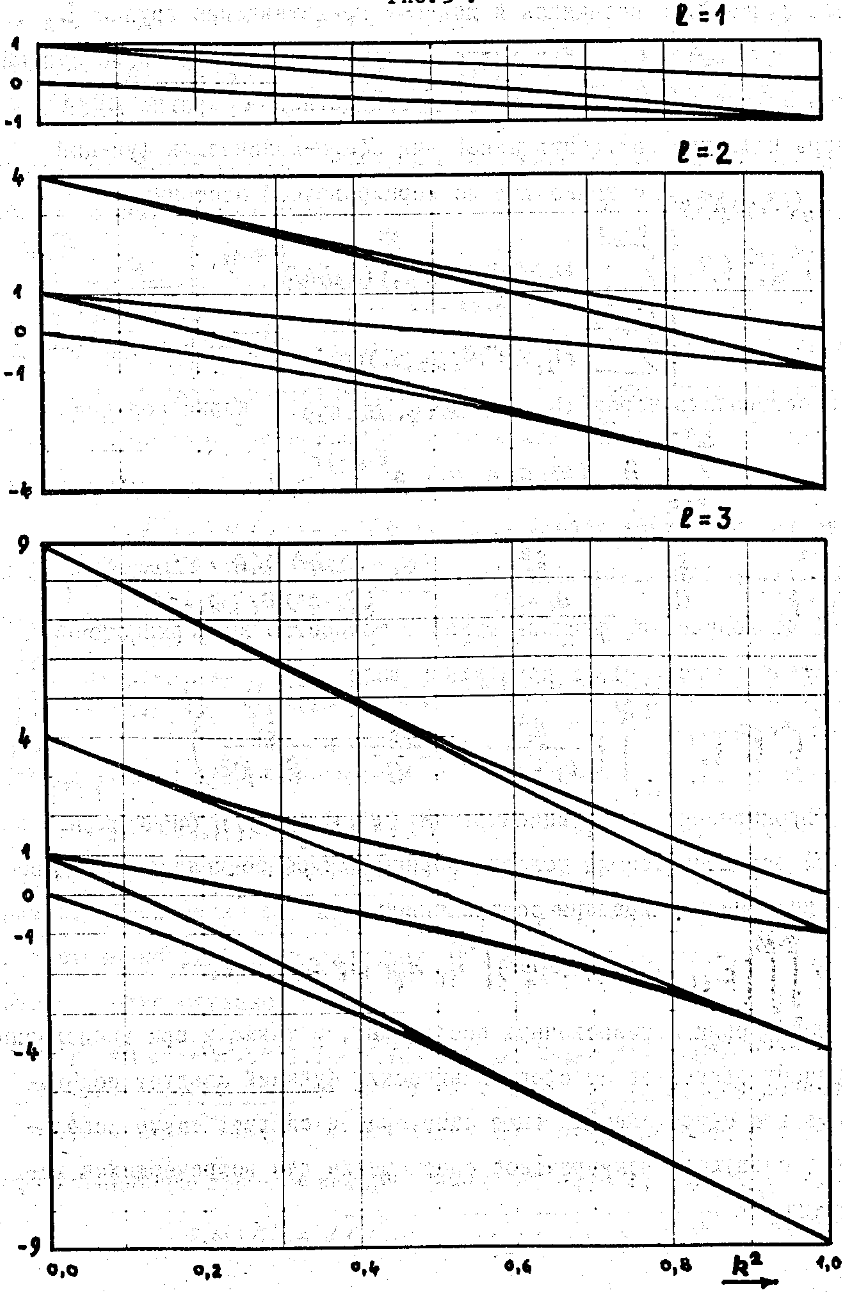
Таблица 2.

	ℓ – четное				
D_2	σ	σ_1	σ_2	σ_3	$\frac{1}{2}(\ell-\sigma)+1$
A	0	0	0	0	$\frac{1}{2}\ell+1$
B_1	2	1	1	0	$\frac{1}{2}\ell$
B_2	2	1	0	1	$\frac{1}{2}\ell$
B_3	2	0	1	1	$\frac{1}{2}\ell$
	ℓ – нечетное				
D_2	σ	σ_1	σ_2	σ_3	$\frac{1}{2}(\ell-\sigma)+1$
A	3	1	1	1	$\frac{1}{2}(\ell-1)$
B_1	1	0	0	1	$\frac{1}{2}(\ell+1)$
B_2	1	0	1	0	$\frac{1}{2}(\ell+1)$
B_3	1	1	0	0	$\frac{1}{2}(\ell+1)$

Таблица 3.

l	(m)	$k^2=0$	$\mu_{l(m)}(k^2)$	$k^2=1$	D_2
0	0	0	0	0	A
1	1	1	$1-k^2$	0	B_3
	0	1	$1-2k^2$	-1	B_2
	-1	0	$-k^2$	-1	B_1
2	2	4	$2(1-2k^2)+2\sqrt{1-k^2+k^4}$	0	A
	1	4	$4-5k^2$	-1	B_1
	0	1	$1-2k^2$	-1	B_2
	-1	1	$1-5k^2$	-4	B_3
	-2	0	$2(1-2k^2)-2\sqrt{1-k^2+k^4}$	-4	A
3	3	9	$5-7k^2+2\sqrt{4-7k^2+4k^4}$	0	B_3
	2	9	$5(1-2k^2)+2\sqrt{4-k^2+k^4}$	-1	B_2
	1	4	$2-7k^2+2\sqrt{1-k^2+4k^4}$	-1	B_1
	0	4	$4(1-2k^2)$	-4	A
	-1	1	$5-7k^2-2\sqrt{4-7k^2+4k^4}$	-4	B_3
	-2	1	$5(1-2k^2)-2\sqrt{4-k^2+k^4}$	-9	B_2
	-3	0	$2-7k^2-2\sqrt{1-k^2+4k^4}$	-9	B_1

Рис. 3 .



Число функций, относящихся к данному представлению группы D_2, равно $\frac{1}{2}(\ell-\sigma)+1$. Как видно из таблицы 2, общее число функций как в случае чётных, так и в случае нечётных ℓ равно $2\ell+1$. Теперь нетрудно построить явный вид сферо-конических функций $E_{\ell(m)}(k^2,\psi;k'^2,\psi')$ с точностью до нормировочной постоянной

$$\xi_1^{\sigma_1}\xi_2^{\sigma_2}\xi_3^{\sigma_3}\left[\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(\ell-\sigma)} A_{2r}(k^2;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)(k\sin\psi)^{\ell-\sigma-2r}\right]\cdot\left[\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(\ell-\sigma)} A_{2r}(k'^2;\sigma_3,\sigma_2,\sigma_1)(k'\sin\psi')^{\ell-\sigma-2r}\right]. \tag{22}$$

Если обозначить через $\theta_i = \theta_i(k^2;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ корни полинома

$$\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(\ell-\sigma)} A_{2r}(k^2;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\, z^{\ell-\sigma-2r}=0,$$

и учесть, что имеет место

$$\frac{\xi_1^2}{\theta_i-k^2}+\frac{\xi_2^2}{\theta_i}+\frac{\xi_3^2}{\theta_i+k'^2}=\frac{(\theta_i-k^2\sin^2\psi)(\theta_i+k'^2\sin^2\psi')}{(\theta_i-k^2)\,\theta_i\,(\theta_i+k'^2)},$$

то сферо-конические функции можно с точностью до нормировочного множителя представить в компактном виде

$$\xi_1^{\sigma_1}\xi_2^{\sigma_2}\xi_3^{\sigma_3}\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}(\ell-\sigma)}\left(\frac{\xi_1^2}{\theta_i-k^2}+\frac{\xi_2^2}{\theta_i}+\frac{\xi_3^2}{\theta_i+k'^2}\right). \tag{23}$$

Произведение коэффициентов $A_0(k^2;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\,A_0(k'^2;\sigma_3,\sigma_2,\sigma_1)$ в (22) определяется из условия нормировки сферо-конических функций, которые нормированы соотношением

$$8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\left[E_{\ell(m)}(k^2,\psi;k'^2,\psi')\right]^2 H_\psi H_{\psi'}\,d\psi\,d\psi'=1.$$

При вычислении нормировочных постоянных, а также и при вычислении матричных элементов от сферо-конических функций следует использовать все перечисленные выше симметрии и следует также использовать следующее рекуррентное соотношение для встречающихся интегралов/5/

$$\int_0^{\pi/2}\frac{(k\sin\psi)^r d\psi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\psi}} = \frac{r-2}{r-1}(2k^2-1)\int_0^{\pi/2}\frac{(k\sin\psi)^{r-2}d\psi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\psi}} + \frac{r-3}{r-1}k^2k'^2\int_0^{\pi/2}\frac{(k\sin\psi)^{r-4}d\psi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\psi}}.$$

С помощью этого соотношения все встречающиеся интегралы можно свести к интегралам вида

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\psi}} = K(k), \quad \int_0^{\pi/2}\frac{(k\sin\psi)^2 d\psi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\psi}} = E(k)-k'^2K(k),$$

где $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Следует также использовать соотношение Лежандра для полных эллиптических интегралов первого и второго рода

$$E(k)K(k')+E(k')K(k)-K(k)K(k')=\frac{\pi}{2}.$$

При вычислениях интегралов от сферо-конических функций, записанных в форме (23), следует пользоваться формулой /5/

$$\iint\limits_{\xi_i^2=1}\xi_1^{2\alpha_1}\xi_2^{2\alpha_2}\xi_3^{2\alpha_3}d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = 4\pi\frac{(2\alpha_1)!\,(2\alpha_2)!\,(2\alpha_3)!\,(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\,\alpha_3!\,(2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+1)!}.$$

Нормированные сферо-конические функции порядка 0,I,2,3 приведены в таблице 4.

Отметим, что для сферо-конических функций аналогично, например, сферическим функциям существует теорема сложения. Пусть декартовы координаты двух точек ξ_i и $\tilde{\xi}_i$ на единичной сфере равны соответственно

$$\xi' = \left(\sqrt{1-k'^2\cos^2\psi'}\cos\psi,\ \sin\psi'\sin\psi,\ \cos\psi'\sqrt{1-k^2\cos^2\psi}\right),$$

$$\tilde{\xi}' = \left(\sqrt{1-k'^2\cos^2\tilde{\psi}'}\cos\tilde{\psi},\ \sin\tilde{\psi}'\sin\tilde{\psi},\ \cos\tilde{\psi}'\sqrt{1-k^2\cos^2\tilde{\psi}}\right),$$

сферическое расстояние которых равно

$$2\sin\gamma/2 = \sqrt{(\xi_1-\tilde{\xi}_1)^2+(\xi_2-\tilde{\xi}_2)^2+(\xi_3-\tilde{\xi}_3)^2}$$

Таблица 4а.

ℓ	(m)	$E_{\ell(m)}(k^2, \psi; k'^2, \psi')$	D_2
0	0	$\dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}$	A
1	1	$\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\,\sqrt{1-k'^2\cos^2\psi'}\,\cos\psi$	B_3
	0	$\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\,\sin\psi'\,\sin\psi$	B_2
	-1	$\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\,\cos\psi'\,\sqrt{1-k^2\cos^2\psi}$	B_1
2	2	$\sqrt{\dfrac{5}{16\pi}}\,\dfrac{\left[\sqrt{1-k^2k'^2}+k^2-k'^2+3k'^2\sin^2\psi'\right]\left[\sqrt{1-k^2k'^2}+k^2-k'^2-3k^2\sin^2\psi\right]}{\sqrt{2(1-k^2k'^2)^2+(k^2-k'^2)(2+k^2k'^2)\sqrt{1-k^2k'^2}}}$	A
	1	$\sqrt{\dfrac{15}{4\pi}}\,\sin\psi'\sqrt{1-k'^2\cos^2\psi'}\,\cos\psi\,\sin\psi$	B_1
	0	$\sqrt{\dfrac{15}{4\pi}}\,\cos\psi'\sqrt{1-k'^2\cos^2\psi'}\,\cos\psi\,\sqrt{1-k^2\cos^2\psi}$	B_2
	-1	$\sqrt{\dfrac{15}{4\pi}}\,\cos\psi'\,\sin\psi'\,\sin\psi\,\sqrt{1-k^2\cos^2\psi}$	B_3
	-2	$\sqrt{\dfrac{5}{16\pi}}\,\dfrac{\left[\sqrt{1-k^2k'^2}+k'^2-k^2-3k'^2\sin^2\psi'\right]\left[\sqrt{1-k^2k'^2}+k'^2-k^2+3k^2\sin^2\psi\right]}{\sqrt{2(1-k^2k'^2)^2+(k'^2-k^2)(2+k^2k'^2)\sqrt{1-k^2k'^2}}}$	A

Таблица 4б.

ℓ	(m)	$E_{\ell(m)}(k^2,\psi;k'^2,\psi')$	D_ℓ
3	3	$\xi_1\sqrt{\frac{21}{16\pi}}\frac{\left[\sqrt{4k'^4+k^2}+1-3k'^2+5k'^2\sin^2\psi'\right]\left[\sqrt{4k'^4+k^2}+1-3k'^2-5k^2\sin^2\psi\right]}{\sqrt{2(2k'^4+3k^2)(4k'^4+k^2)-(1+k^2)(8k'^4-3k^2)\sqrt{4k'^4+k^2}}}$	B_3
	2	$\xi_2\sqrt{\frac{21}{16\pi}}\frac{\left[\sqrt{4-k^2k'^2}+2(k^2-k'^2)+5k'^2\sin^2\psi'\right]\left[\sqrt{4-k^2k'^2}+2(k^2-k'^2)-5k^2\sin^2\psi\right]}{\sqrt{2(2-3k^2k'^2)(4-k^2k'^2)+(k^2-k'^2)(8+3k^2k'^2)\sqrt{4-k^2k'^2}}}$	B_2
	1	$\xi_3\sqrt{\frac{21}{16\pi}}\frac{\left[\sqrt{4k^4+k'^2}-1+3k^2+5k'^2\sin^2\psi'\right]\left[\sqrt{4k^4+k'^2}-1+3k^2-5k^2\sin^2\psi\right]}{\sqrt{2(2k^4+3k'^2)(4k^4+k'^2)+(1+k'^2)(8k^4-3k'^2)\sqrt{4k^4+k'^2}}}$	B_1
	0	$\sqrt{\frac{105}{4\pi}}\cos\psi'\sin\psi'\sqrt{1-k'^2\cos^2\psi'}\cos\psi\sin\psi\sqrt{1-k^2\cos^2\psi}$	A
	-1	$\xi_1\sqrt{\frac{21}{16\pi}}\frac{\left[\sqrt{4k'^4+k^2}-1+3k'^2-5k'^2\sin^2\psi'\right]\left[\sqrt{4k'^4+k^2}-1+3k'^2+5k^2\sin^2\psi\right]}{\sqrt{2(2k'^4+3k^2)(4k'^4+k^2)+(1+k^2)(8k'^4-3k^2)\sqrt{4k'^4+k^2}}}$	B_3
	-2	$\xi_2\sqrt{\frac{21}{16\pi}}\frac{\left[\sqrt{4-k^2k'^2}+2(k'^2-k^2)-5k'^2\sin^2\psi'\right]\left[\sqrt{4-k^2k'^2}+2(k'^2-k^2)+5k^2\sin^2\psi\right]}{\sqrt{2(2-3k^2k'^2)(4-k^2k'^2)+(k'^2-k^2)(8+3k^2k'^2)\sqrt{4-k^2k'^2}}}$	B_2
	-3	$\xi_3\sqrt{\frac{21}{16\pi}}\frac{\left[\sqrt{4k^4+k'^2}+1-3k^2-5k'^2\sin^2\psi'\right]\left[\sqrt{4k^4+k'^2}+1-3k^2+5k^2\sin^2\psi\right]}{\sqrt{2(2k^4+3k'^2)(4k^4+k'^2)-(1+k'^2)(8k^4-3k'^2)\sqrt{4k^4+k'^2}}}$	B_1

и

$$\cos\chi = \xi_1\tilde{\xi}_1 + \xi_2\tilde{\xi}_2 + \xi_3\tilde{\xi}_3 . \qquad (24)$$

Имеет место следующая теорема сложения для сферо-конических функций:

$$P_\ell(\cos\chi) = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{(m)=-\ell}^{\ell} E_{\ell(m)}(k^2,\psi;k'^2,\psi')E_{\ell(m)}(k^2,\tilde{\psi};k'^2,\tilde{\psi}').$$

Эту теорему можно доказать, исходя из интегрального уравнения, которому удовлетворяют сферо-конические функции. Это интегральное уравнение имеет вид:

$$E_{\ell(m)}(k^2,\tilde{\psi};k'^2,\tilde{\psi}') = \frac{2\ell+1}{2\pi}\int_0^\pi\int_0^\pi P_\ell(\cos\chi)E_{\ell(m)}(k^2,\psi;k'^2,\psi')H_\psi H_{\psi'}d\psi d\psi',$$

где $\cos\chi$ определён формулой (24).

Вычисление некоторых матричных элементов от сферо-конических функций приведено в приложении.

Заключение

Итак, построены сферо-конические функции, которые являются собственными волновыми функциями двух диагональных операторов, представляющих собой полный набор квантовомеханических наблюдаемых в эллиптической с.к. на сфере. Приведена удобная форма этих функций, связанная с тригонометрической параметризацией эллиптической с.к. на сфере, и перечислен ряд основных свойств этих функций.

Сферо-коническим функциям, являющимся одним из классов специальных функций, уделено в математической литературе мало места. В литературе по физике они фактически не упоминаются.

Сферо-конические функции в физике применялись в основном в связи с проблемой асимметрического волчка в квантовой механике /6-8/ . Оператор энергии свободного волчка с главными моментами инерции $J_1 \geqslant J_2 \geqslant J_3$, как известно, имеет вид

$$\hat{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{L}_1^2}{J_1} + \frac{\hat{L}_2^2}{J_2} + \frac{\hat{L}_3^2}{J_3}\right). \tag{24}$$

Для вычисления энергетических уровней асимметрического волчка достаточно рассмотреть волновые функции с нулевой третьей проекцией момента количества движения на неподвижную ось в пространстве /7/. Тогда волновые функции асимметрического волчка совпадают со сферо-коническими функциями и собственные значения оператора (24) можно выразить через собственное значение оператора (8)

$$T_{\ell(m)}(J_1, J_2, J_3) = \frac{1}{2J_2}\ell(\ell+1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{J_3} - \frac{1}{J_1}\right)\mu_{\ell(m)}(k^2), \tag{25}$$

где

$$k^2 = J_3(J_1 - J_2)/J_2(J_1 - J_3).$$

Формула (25) описывает одновременно уровни энергии асимметрического волчка $(J_1 \neq J_2 \neq J_3, 0 < k^2 < 1)$, симметрического вытянутого $(J_1 = J_2 \neq J_3, k^2 = 0)$ и сплюснутого $(J_1 \neq J_2 = J_3, k^2 = 1)$ волчков, а также шарового волчка $(J_1 = J_2 = J_3)$.

Среди других физических проблем, где с успехом может быть применена эллиптическая с.к. на сфере с её диагональными операторами и собственными волновыми функциями, можно упомянуть, например, проблему квадрупольного взаимодействия, проблему мультипольных разложений, разложения разных физических величин (амплитуд) для систем, обладающих только сферической симметрией, а не сферо-аксиальной симметрией. Все эти проблемы, однако, следует, используя результаты этой статьи, рассмотреть отдельно.

С групповой точки зрения сферо-конические функции являются вторым возможным базисом для построения представления группы трехмерных вращений, в котором диагональны операторы (I2). Такое представление эквивалентно представлению, базисом которого являются сферические функции, так как эти представления связаны унитарным преобразованием.

Приложение

Докажем, что имеет место равенство

$$\langle \ell,(m);k^2 | e_1\xi_1^2 + e_2\xi_2^2 + e_3\xi_3^2 | \ell,(m);k^2\rangle = -\frac{2\varepsilon_{\ell(m)}(k^2)}{(2\ell-1)(2\ell+3)}, \qquad (\text{П.I})$$

где постоянные e_i связаны с k^2 соотношениями (I5) и $\varepsilon_{\ell(m)}(k^2)$ — собственное значение оператора (I4). Для доказательства формулы (П.I) усредним тензор $\xi_i\xi_k - \frac{1}{3}\delta_{ik}$ по состоянию с заданным ℓ и $\varepsilon_{\ell(m)}(k^2)$. Искомое среднее значение есть оператор, который может выражаться только через операторы $\hat{L}_i$, т.е.

$$\left\langle \xi_i\xi_k - \frac{1}{3}\delta_{ik}\right\rangle_{\ell(m)} = \alpha_0 \left\langle \frac{\hat{L}_i\hat{L}_k + \hat{L}_k\hat{L}_i}{2} - \frac{1}{3}\hat{L}_j^2\delta_{ik}\right\rangle_{\ell(m)}, \qquad (\text{П.2})$$

где α_0 — некоторая постоянная, подлежащая определению. Для определения α_0 помножим равенство (П.2) слева на $\hat{L}_i$ и справа на $\hat{L}_k$ (подразумевается суммирование по i и k)Так как, по определению, вектор $\vec{\xi}$ перпендикулярен к оператору момента количества движения, т.е. $\xi_i\hat{L}_i = 0$, то в (П.2) слева имеем $-\frac{1}{3}\ell(\ell+1)$. Произведение $\hat{L}_i^2\hat{L}_k^2$ заменяем его средним значением $\ell^2(\ell+1)^2$ и произведение $\hat{L}_i\hat{L}_k\hat{L}_i\hat{L}_k$ вычисляем с помощью коммутационных соотношений (I)

$$\hat{L}_i\hat{L}_k\hat{L}_i\hat{L}_k = \hat{L}_i^2\hat{L}_k^2 + i\,e_{ijk}\hat{L}_i\hat{L}_j\hat{L}_k = \ell^2(\ell+1)^2 +$$
$$+\frac{1}{2}e_{ijk}\hat{L}_i(\hat{L}_j\hat{L}_k - \hat{L}_k\hat{L}_j) = \ell^2(\ell+1)^2 - \frac{1}{2}e_{ijk}e_{mjk}\hat{L}_i\hat{L}_m = \qquad (\text{П}.3)$$
$$= \ell(\ell+1)\left[\ell(\ell+1) - 1\right].$$

В (П.3) использовано известное соотношение $e_{ijk}e_{mjk} = 2\delta_{im}$. После простых вычислений получаем для постоянной α_0 значение

$$\alpha_0 = -\frac{2}{(2\ell-1)(2\ell+3)}. \qquad (\text{П}.4)$$

Если помножить обе стороны равенства (П.2) на $e_i\,\delta_{ik}$ и воспользоваться тем, что оператор $e_i\hat{L}_i^2$ диагонален на сферо-конических функциях с собственным значением $\varepsilon_{\ell(m)}(k^2)$, то немедленно получаем равенство (П.I).

Продифференцировав равенство (П.I) по k^2, находим среднее значение

$$\langle \ell,(m);k^2|\,\xi_2^2\,|\,\ell,(m);k^2\rangle = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{2}{(2\ell-1)(2\ell+3)}\,\frac{d\varepsilon_{\ell(m)}(k^2)}{dk^2}\right]. \qquad (\text{П}.5)$$

Комбинируя это среднее с равенством (П.I), получаем два других средних от квадратов составляющих вектора $\vec{\xi}$

$$\langle \ell,(m);k^2|\,\xi_1^2\,|\,\ell,(m);k^2\rangle = \frac{1}{3}\left[1 + \frac{2}{(2\ell-1)(2\ell+3)}\left(\varepsilon_{\ell(m)}(k^2) + k'^2\frac{d\varepsilon_{\ell(m)}(k^2)}{dk^2}\right)\right],$$
$$(\text{П}.6)$$
$$\langle \ell,(m);k^2|\,\xi_3^2\,|\,\ell,(m);k^2\rangle = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{2}{(2\ell-1)(2\ell+3)}\left(\varepsilon_{\ell(m)}(k^2) - k^2\frac{d\varepsilon_{\ell(m)}(k^2)}{dk^2}\right)\right].$$

Среднее значение от квадратов операторов $\hat{L}_i$ также нетрудно найти. Из (I8) следует, что

$$\langle \ell,(m);k^2|\,\hat{L}_2^2\,|\,\ell,(m);k^2\rangle = \ell(\ell+1) + \frac{d\mu_{\ell(m)}(k^2)}{dk^2}. \qquad (\text{П}.7)$$

Комбинируя это равенство со вторым из операторов (I2), находим

$$\langle \ell,(m);k^2 | \hat{L}_1^2 | \ell,(m);k^2 \rangle = -\mu_{\ell(m)}(k^2) - k'^2 \frac{d\mu_{\ell(m)}(k^2)}{dk^2},$$

$$\langle \ell,(m);k^2 | \hat{L}_3^2 | \ell,(m);k^2 \rangle = \mu_{\ell(m)}(k^2) - k^2 \frac{d\mu_{\ell(m)}(k^2)}{dk^2}. \qquad (\text{П.8})$$

При вычислении других матричных элементов следует пользоваться всеми симметриями, перечисленными выше, которыми обладают сферо--конические функции. Из этих же симметрий вытекают правила отбора для матричных элементов от сферо-конических функций. Так, например, вычисляя матричный элемент от $e_i \xi_i^2$ между состояниями $|\ell,(-m);k^2\rangle$ и $|\ell,(m);k^2\rangle, (m)\neq 0$, находим, что вследствие симметрии (9) он равен нулю, т.е.

$$\langle \ell,(-m);k^2 | e_1\xi_1^2 + e_2\xi_2^2 + e_3\xi_3^2 | \ell,(m);k^2 \rangle = 0. \qquad (\text{П.9})$$

Литература:

I. П. Винтерниц, И. Лукач, Я.А. Смородинский, ЯФ, 7, I92, (I968).
2. М.Н. Олевский, Мат. сб. 27, 379 (I950).
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика, ГИФМЛ, Москва, I963.
4. И. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, I939,
Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. Курс современного анализа, т. 2, ГИФМЛ, Москва, I963, Г.Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т. 3, Наука, Москва, I967.
5. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИФМЛ, Москва, I962.
6. И. Лукач, Я.А. Смородинский, ЖЭТФ, 57, I342, (I969).
7. H.A.Kramers, G.P.Itmann, Zs.f.Phys. 53, 553 (I929), 58, 2I8 (I929); 60, 663 (I930).
8. R.D.Spence., Amer.J.Phys., 27, 329 (I959).

Рукопись поступила в издательский отдел
4 февраля I972 г.