

с 346.2g  
Б-447

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

52/2-72

P4 - 6156



6156

В.Б.Беляев, В.Н.Ефимов, Х.Шульц

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ  
nd - РАССЕЯНИЯ ПРИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ  
ЭНЕРГИИ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ  
ЛАБОРАТОРИЯ НЕЙТРОННОЙ ФИЗИКИ

1971

P4 - 6156

В.Б.Беляев, В.Н.Ефимов, Х.Шульц

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ  
nd - РАССЕЯНИЯ ПРИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ  
ЭНЕРГИИ

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

## §1. В в е д е н и е

Как известно<sup>/1/</sup>, ядра уравнений Фаддеева при полной положительной энергии имеют движущиеся логарифмические сингулярности на действительной оси. Это обстоятельство значительно усложняет решение задачи  $n$ - $d$ -рассеяния выше порога развала дейтона.

Наиболее популярным методом решения этой проблемы в настоящее время является метод смещения контура интегрирования в комплексную плоскость<sup>/2/</sup>. Этот метод накладывает определенные ограничения на форму двухнуклонного потенциала<sup>/3/</sup>, что не является удовлетворительным, так как логарифмические особенности происходят из-за свободной 3-частичной функции Грина, т.е. не связаны с формой потенциала.

В связи с этим желательно иметь универсальные методы решения, применимые при любой форме взаимодействия. Как было показано в работе<sup>/1/</sup>, логарифмические особенности ядер уравнений Фаддеева могут быть ослаблены или устранены при соответствующем числе итераций этих уравнений. Такой метод устранения движущихся логарифмических сингулярностей мы продемонстрируем на примере уравнения Скорнякова-Тер-Мартиросяна, которое имеет достаточно простую структуру и вместе с тем содержит все особенности, присущие реальному случаю.

## §2. Метод решения

Уравнение С.-Т.-М. для  $n$ - $d$ -рассеяния с полным спином  $S = 3/2$  и полным орбитальным моментом  $l = 0$  имеет вид:

$$\frac{\sqrt{\frac{3k^2}{4} - E - a}}{k^2 - k_0^2} a(k, k_0) = -\frac{G_0(k, k_0)}{2kk_0} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty k'^2 dk' \frac{G_0(k, k')}{2kk'} \cdot \frac{a(k', k_0)}{k'^2 - k_0^2 - i\epsilon}, \quad (1)$$

где  $a(k_0, k_0) - s$  - компонента амплитуды квартетного  $n-d$ -рассеяния,

$$G_0(k, k') = \int_{-1}^1 \frac{dx}{Q + x - i\epsilon}, \quad Q = \frac{k^2 + k'^2 - E}{kk'};$$

$$G_0(k, k') = G^{(1)}(k, k') + i\pi G^{(2)}(k, k'); \quad G^{(1)}(k, k') = P \int_{-1}^1 \frac{dx}{Q + x} = \ln \left| \frac{Q + 1}{Q - 1} \right|;$$

$$G^{(2)}(k, k') = \theta(Q) = \begin{cases} 1 & |Q| < 1 \\ 0 & |Q| > 1 \end{cases}$$

$E = -a^2 + \frac{3}{4} k_0^2$  - полная энергия системы

$$a^2 = \frac{m E_d}{h^2}, \quad k_0^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{m E_n}{h^2}.$$

Вводя вместо функции  $a(k, k_0)$  функцию  $b(k)$  по формуле

$$b(k) = \frac{3/4 a(k, k_0)}{[a + \sqrt{\frac{3}{4} k^2 - E}][1 + ik_0 a(k_0, k_0)]},$$

уравнение (1) можно привести к виду:

$$b(k) = -\frac{G_0(k, k_0)}{2kk_0} - \frac{8}{3\pi} P \int_0^\infty k'^2 dk' \frac{G_0(k, k')}{2kk'} \cdot \frac{a + \sqrt{\frac{3}{4} k'^2 - E}}{k'^2 - k_0^2} b(k').$$

Перейдем теперь к безразмерным переменным:

$$k \equiv \sqrt{\frac{4}{3} E} \cdot x; \quad k' \equiv \sqrt{\frac{4}{3} E} y; \quad k_0 = \sqrt{\frac{4}{3} E} \kappa_0; \quad a \sqrt{\frac{3}{4 E}} \equiv \gamma.$$

Тогда для функции  $B(x) = \frac{4E}{3} b(k)$  будем иметь уравнение:

$$B(x) = -\frac{G_0(x, \kappa_0)}{2x\kappa_0} - \frac{8}{3\pi} P \int_0^\infty y^2 dy \frac{G_0(x, y)}{2xy} \cdot \frac{\gamma + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{y^2 - 1}}{y^2 - \kappa_0^2} B(y), \quad (2)$$

где безразмерные константы  $\kappa_0$  и  $\gamma$  выражаются через энергию связи дейтона  $E_d$  и энергию нейтрона  $E_n$  в лабораторной системе следующим образом:

$$\kappa_0^2 = \frac{1}{1-\epsilon}, \quad \gamma^2 = \frac{3}{4} \frac{\epsilon}{1-\epsilon}; \quad \epsilon = \frac{3}{2} \frac{E_d}{E_n(\pi)} < 1.$$

Итерируя уравнение (2) и вводя обозначение  $\frac{8}{3\pi} \equiv \lambda$ , получаем:

$$B(x) = -\frac{G_0(x, \kappa_0)}{2x\kappa_0} + \lambda R(x, \kappa_0) + \lambda^2 P \int_0^\infty z^2 dz R(x, z) \frac{\gamma + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{z^2 - 1}}{z^2 - \kappa_0^2} B(z). \quad (3)$$

Интегральный член в уравнении (3) имеет тот же вид, что и в уравнении (2), с заменой функции  $\frac{G_0(x, y)}{2xy}$  на функцию  $R(x, z)$ , определяемую выражением:

$$R(x, z) = \frac{1}{4xz} P \int_0^\infty dy G_0(x, y) \frac{\gamma + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{y^2 - 1}}{y^2 - \kappa_0^2} G_0(y, z). \quad (4)$$

В безразмерных переменных  $x$  и  $y$  функция  $G_0$  имеет вид:

$$G_0(x, y) = G^{(1)}(x, y) + i\pi G^{(2)}(x, y)$$

$$G^{(1)}(x, y) = \ln \left| \frac{x^2 + y^2 + xy - 3/4}{x^2 + y^2 - xy - 3/4} \right|; \quad G^{(2)}(x, y) = \theta \left( \frac{x^2 + y^2 - 3/4}{xy} \right). \quad (4')$$

Очевидно, что особенности функции  $G^{(1)}(x, y)$  определяются уравнениями:

$$x_1 = -\frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1-y^2}$$

$$x_3 = \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1-y^2}$$

$$x_4 = \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1-y^2}$$

$$x_5 = \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1-y^2}$$

$$0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq 1$$

(см. рис. 1).

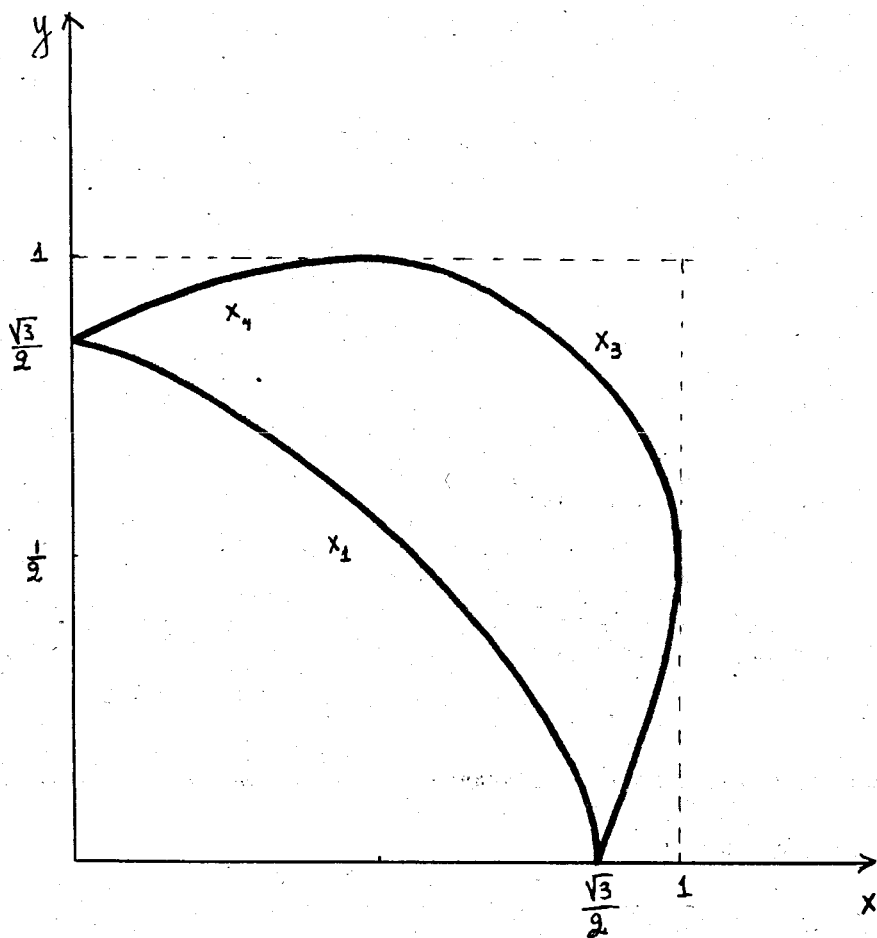


Рис. 1.

Итерированное ядро  $R(x, z)$  не содержит движущихся сингулярностей, поэтому естественно предположить, что его разложение в ряд по некоторым системам ортогональных функций будет сходиться лучше, чем соответствующие разложения для исходного ядра  $G_0(x, y)$ .

Из выражений (4) и (4') следует, что функция  $G^{(2)}(x, y)$  отлична от нуля в единичном квадрате переменных  $x, y$  и что функцию  $R(x, y)$  можно представить в виде:

$$R(x, z) = R_1(x, z) + i R_2(x, z)$$

$$R_1(x, z) = R_1^{(1)}(x, z) + R_1^{(2)}(x, z) + R_1^{(3)}(x, z) + R_1^{(3)}(z, x)$$

$$R_2(x, z) = R_2^{(1)}(x, z) + R_2^{(2)}(x, z) + R_2^{(3)}(x, z) + R_2^{(3)}(z, x),$$

где

$$R_1^{(1)}(x, z) = \frac{\gamma}{4xz} \int_0^1 \frac{dy}{y^2 - \kappa_0^2} G^{(1)}(x, y) G^{(1)}(y, z) + P_1 \int_0^\infty \frac{dy}{4xz(\gamma^2 - \kappa^2)} \left( \gamma + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\gamma^2 - 1} \right) G^{(1)}(x, y) G^{(1)}(y, z)$$

$$R_1^{(2)}(x, z) = -\frac{\pi^2 \gamma}{4xz} \int_0^1 \frac{dy}{y^2 - \kappa_0^2} G^{(2)}(x, y) G^{(2)}(y, z)$$

(5)

$$R_1^{(3)}(x, z) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{4xz} \int_0^1 dy \frac{\sqrt{1-y^2}}{y^2 - \kappa_0^2} G^{(1)}(x, y) G^{(2)}(y, z)$$

$$R_2^{(1)}(x, z) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4xz} \int_0^1 dy \frac{\sqrt{1-y^2}}{y^2 - \kappa_0^2} G^{(1)}(x, y) G^{(1)}(y, z)$$

$$R_2^{(2)}(x, z) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi^2}{4xz} \int_0^1 dy \frac{\sqrt{1-y^2}}{y^2 - \kappa_0^2} G^{(2)}(x, y) G^{(2)}(y, z)$$

$$R_2^{(3)}(x, z) = \frac{\gamma \pi}{4xz} \int_0^1 dy \frac{1}{y^2 - \kappa_0^2} G^{(1)}(x, y) G^{(2)}(y, z).$$

Для разложения ядра  $R(x, z)$  необходимо ввести две системы ортонормированных функций, а именно, функции  $M_m(x)$  и  $\phi_\nu(x)$ , определенные соответственно в интервалах  $(0, \infty)$  и  $(0, 1)$ :

$$\int_0^{\infty} dx M_m(x) M_{m'}(x) = \delta_{mm'} \quad (m, m' = 1, 2, \dots, M) \quad (6)$$

$$\int_0^1 dx \phi_\nu(x) \phi_{\nu'}(x) = \delta_{\nu\nu'} \quad (\nu, \nu' = 1, 2, \dots, N). \quad (6')$$

Если  $M_m(x)$  представить в виде

$$M_m(x) = \int_0^{\infty} r^2 dr f(r) j_0(xr) \chi_m(r), \quad (7)$$

где  $f(r)$  — некоторая положительно определенная функция, то из (6) следует, что функции  $\chi_m(r)$  должны удовлетворять интегральному уравнению

$$\chi_m(r) = \lambda_m \int_0^{\infty} r'^2 dr' K_0(r, r') f(r') \chi_m(r')$$

$$K_0(r, r') = \int_0^{\infty} dx j_0(xr) j_0(xr')$$

и условию ортонормированности

$$\frac{1}{\lambda_m} \int_0^{\infty} r^2 dr f(r) \chi_m(r) \chi_{m'}(r) = \delta_{mm'},$$

т.е. функции  $\chi_m(r)$  должны быть собственными функциями некоторой задачи Штурма-Лиувилля. В частности, выбирая  $f(r) = e^{-\beta r}$ , где  $\beta$  — некоторый параметр, получим:

$$\chi_m(r) = \frac{C_m}{r} J_0(x_m e^{-\beta r/2}),$$

где

$$C_m = \left(\frac{\beta^3}{2\pi}\right)^{1/2} \cdot \frac{x_m}{J_1(x_m)}; \quad J_0(x_m) = 0,$$

$J_n(x)$  — функция Бесселя порядка  $n$ . Тогда, согласно определению (7), функции  $M_m(x)$ , удовлетворяющие условию (6), могут быть представлены

в виде:

$$M_m(x) = C_m \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x_m}{2}\right)^{2k} \frac{1}{(k!)^2 [x^2 + \beta^2(1+k)^2]}. \quad (8)$$



В качестве функций  $\phi_\nu(x)$ , удовлетворяющих условию (6'), удобно взять следующие функции:

$$\phi_\nu(x) = x(1-x)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{(\nu+3)(2\nu+4)}{\nu+1} \right]^{\frac{1}{2}} P_\nu^{(1,2)}(2x-1), \quad (9)$$

где  $P_\nu^{(1,2)}(z)$  - полиномы Якоби.

Такой выбор  $\phi_\nu(x)$  учитывает характер поведения при  $x \rightarrow 0$  и при  $x \rightarrow 1$  интегралов в (5), содержащих функцию  $G^{(2)}(x,y)$ . Следует заметить, что при  $x \rightarrow \infty$   $M_m(x) \sim \frac{1}{x^2}$ , тогда как при  $x \rightarrow \infty$  и конечных  $z$ , например,  $R_1^{(1)}(x,z) \sim 1/x^2$ . Это обстоятельство учитывается при разложении  $R(x,z)$  путем умножения и деления соответствующих выражений в (5) на  $x^2 + a^2$ , где константа  $a \approx 1$ .

Используя функции  $M_m(x)$  и  $\phi_\nu(x)$  и явное выражение (5) для  $R(x,z)$ , легко получить следующие разложения:

$$R_j(x,z) = \sum_{mm'} R_{mm'}^{(j)} \bar{M}_m(x) \bar{M}_{m'}(z) + \sum_{\nu\nu'} P_{\nu\nu'}^{(j)} \bar{\phi}_\nu(x) \phi_{\nu'}(z) + \sum_{m\nu} C_{m\nu}^{(j)} [\bar{M}_m(x) \bar{\phi}_\nu(z) + \bar{M}_m(z) \bar{\phi}_\nu(x)] \quad (j=1,2), \quad (10)$$

где

$$\bar{M}_m(x) = (x^2 + a^2) M_m(x); \quad \bar{\phi}_\nu(x) = \frac{\phi_\nu(x)}{x}.$$

Явный вид коэффициентов разложений (10) приведен в Приложении 1. Если записать решение  $B(x)$  уравнения (3) в виде

$$B(x) = B_1(x) + i B_2(x)$$

и воспользоваться разложением (10), то легко показать, что  $B_1(x)$  и  $B_2(x)$  имеют вид:

$$\begin{aligned}
B_1(x) = & -\frac{G^{(1)}(x, \kappa_0)}{2x\kappa_0} + \lambda R_1(x, \kappa_0) + \lambda^2 \left\{ \sum_m D_m^{(1)} Q_m^{(1)}(x) - \right. \\
& \left. - \sum_m D_m^{(2)} Q_m^{(2)}(x) + \sum_\nu G_\nu^{(1)} \bar{F}_\nu^{(1)}(x) - \sum_\nu G_\nu^{(2)} \bar{F}_\nu^{(2)}(x) \right\}; \\
B_2(x) = & \lambda R_2(x, \kappa_0) + \lambda^2 \left\{ \sum_m D_m^{(1)} Q_m^{(2)}(x) + \sum_m D_m^{(2)} Q_m^{(1)}(x) + \right. \\
& \left. + \sum_\nu G_\nu^{(1)} \bar{F}_\nu^{(2)}(x) + \sum_\nu G_\nu^{(2)} \bar{F}_\nu^{(1)}(x) \right\};
\end{aligned} \tag{11}$$

где  $Q_m^{(j)}(x)$  и  $\bar{F}_\nu^{(j)}(x)$  выражаются через функции  $\bar{M}_m(x)$  и  $\bar{\phi}_\nu(x)$  следующим образом:

$$\begin{aligned}
Q_m^{(j)}(x) & \equiv \sum_m \bar{M}_m(x) R_{m,m}^{(j)} + \sum_\nu \bar{\phi}_\nu(x) C_{m\nu}^{(j)} \\
\bar{F}_\nu^{(j)}(x) & \equiv \sum_m \bar{M}_m(x) C_{m\nu}^{(j)} + \sum_\nu \bar{\phi}_\nu(x) P_{\nu\nu}^{(j)}
\end{aligned} \tag{11'}$$

Для неизвестных коэффициентов  $D_m^{(j)}$  и  $G_\nu^{(j)}$  имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
& \sum_m [\delta_{mm} - \lambda^2 W_{mm}^{(1)}] D_m^{(1)} + \lambda^2 \sum_m W_{mm}^{(2)} D_m^{(2)} - \lambda^2 \sum_\nu W_{m\nu}^{(3)} G_\nu^{(1)} + \lambda^2 \sum_\nu W_{m\nu}^{(4)} G_\nu^{(2)} = V_m^{(1)} \\
& -\lambda^2 \sum_m W_{mm}^{(2)} D_m^{(1)} + \sum_m [\delta_{mm} - \lambda^2 W_{mm}^{(1)}] D_m^{(2)} - \lambda^2 \sum_\nu W_{m\nu}^{(4)} G_\nu^{(1)} - \lambda^2 \sum_\nu W_{m\nu}^{(3)} G_\nu^{(2)} = V_m^{(2)} \\
& -\lambda^2 \sum_m W_{\nu m}^{(5)} D_m^{(1)} + \lambda^2 \sum_m W_{\nu m}^{(6)} D_m^{(2)} + \sum_\mu [\delta_{\nu\mu} - \lambda^2 W_{\nu\mu}^{(7)}] G_\mu^{(1)} + \lambda^2 \sum_\mu W_{\nu\mu}^{(8)} G_\mu^{(2)} = V_\nu^{(3)} \\
& -\lambda^2 \sum_m W_{\nu m}^{(6)} D_m^{(1)} - \lambda^2 \sum_m W_{\nu m}^{(5)} D_m^{(2)} - \lambda^2 \sum_\mu W_{\nu\mu}^{(8)} G_\mu^{(1)} + \sum_\mu [\delta_{\nu\mu} - \lambda^2 W_{\nu\mu}^{(7)}] G_\mu^{(2)} = V_\nu^{(4)}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Явный вид коэффициентов  $W$  и правых частей  $V$  дается в Приложении 2.

Таким образом, задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (12) порядка  $2(N+M)$ , а решение исходного уравнения (2) получается в аналитическом виде, определяемом выражениями (11).

Полученное решение определяет фазу  $s$ -рассеяния выше порога развала дейтона следующим образом:

$$\operatorname{Re} \operatorname{tg} \delta(k_0) = \frac{8}{3} \gamma \kappa_0 B_1(\kappa_0),$$

$$\operatorname{Im} \operatorname{tg} \delta(k_0) = \frac{8}{3} \gamma \kappa_0 B_2(\kappa_0).$$

Так как выше порога развала  $\kappa_0 > 1$ , то в выражениях (11') следует опустить суммы, содержащие функции  $\bar{\phi}_\nu(x)$  (т.к.  $\phi_\nu(x)$  определены в интервале  $[0, 1]$ ).

В реальном случае неточечного взаимодействия при помощи какого-либо сепарабельного представления 2-частичной  $t$ -матрицы уравнения Фаддеева, как известно, сводятся к системе одномерных уравнений/4/. Ядра этих уравнений допускают явное выделение логарифмически расходящейся части, к которой вышеописанная процедура может быть непосредственно применена. Таким образом, предлагаемый метод имеет универсальный характер.

Авторы выражают благодарность Л.Д. Фаддееву за интерес к работе и А.Л. Зубареву за помощь в проведении ряда численных оценок.

### П р и л о ж е н и е 1

Коэффициенты разложений  $R_1(x, z)$  и  $R_2(x, z)$  по функциям  $M_m(x)$  и  $\phi_\nu(x)$  получаются непосредственно из (5) с учетом характера поведения этих функций соответственно на концах интервалов  $(0, \infty)$  и  $(0, 1)$ . Так, например, по функциям  $M_n(x)$  и  $M_n(z)$  разлагается выражение  $[(x^2 + a^2)(z^2 + a^2)]^{-1/2} R_1^{(1)}(x, z)$ , по функциям  $\phi_\nu(x)$  и  $\phi_\nu(z) - xz R_1^{(2)}(x, z)$  и т.д. Учитывая это, легко получить следующие выражения для коэффициентов в формуле (10):

$$R_{mm}^{(1)} = \frac{1}{4} \gamma a_{mm}^{(2)} + \frac{1}{4} b_{mm}'; \quad P_{\nu\nu'}^{(1)} = -\frac{\pi^2 \gamma}{4} A_{\nu\nu'}^{(1)}; \quad C_{m\nu}^{(1)} = -\frac{\pi \sqrt{3}}{8} g_{m\nu}^{(1)};$$

$$R_{mm}^{(2)} = \frac{\sqrt{3}}{8} a_{mm}^{(1)}; \quad P_{\nu\nu'}^{(2)} = -\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{8} A_{\nu\nu'}^{(2)}; \quad C_{m\nu}^{(2)} = \frac{\gamma \pi}{4} g_{m\nu}^{(2)},$$

$$a_{mm}^{(j)} = \int_0^{\sqrt{3}/2} dy h_j(y) F_m^{(1)}(y) F_m^{(1)}(y) + \int_{\sqrt{3}/2}^1 dy h_j(y) F_m^{(2)}(y) F_m^{(2)}(y); \quad j=1,2;$$

$$h_1(y) = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y^2 - \kappa_0^2}; \quad h_2(y) = \frac{1}{y^2 - \kappa_0^2};$$

$$F_m^{(1)}(y) = \int_0^1 \frac{dt}{t} \ln \frac{1+t}{1-t} [-\psi_m(x_1 t) - \psi_m(\frac{x_1}{t}) + \psi_m(x_3 t) + \psi_m(\frac{x_3}{t})];$$

$$F_m^{(2)}(y) = \int_0^1 \frac{dt}{t} \ln \frac{1+t}{1-t} [\psi_m(x_3 t) + \psi_m(\frac{x_3}{t}) + \psi_m(x_4 t) + \psi_m(\frac{x_4}{t})];$$

$$\psi_m(x) = \frac{M_m(x)}{x^2 + a^2};$$

$$b_{mm} = P \int_1^\infty \frac{dy}{y^2 - \kappa_0^2} [y + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{y^2 - 1}] F_m^{(3)}(y) F_m^{(3)}(y)$$

$$F_m^{(3)}(y) = \int_0^\infty \frac{dx}{x} \psi_m(x) G^{(1)}(x, y) \quad y \geq 1$$

$$A_{\nu\nu}^{(j)} = B_{\nu\nu}^{(j)} + B_{\nu\nu}^{(j)} \quad (j=1,2;)$$

$$B_{\nu\nu}^{(j)} = \int_0^{\sqrt{3}/2} dy \phi_{\nu}^{(j)}(y) J_j(x_1) [\Phi_\nu(y) - \Phi_\nu(x_3)] - \int_0^{1/2} dy \phi_{\nu}^{(j)}(y) J_j(x_3) [\Phi_\nu(y) - \Phi_\nu(x_1)] + \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} dy \phi_{\nu}^{(j)}(y) J_j(x_3) [\Phi_\nu(y) - \Phi_\nu(x_1)] + \int_{\sqrt{3}/2}^1 dy \phi_{\nu}^{(j)}(y) J_j(x_3) [\Phi_\nu(y) - \Phi_\nu(x_4)] - \int_{\sqrt{3}/2}^1 dy \phi_{\nu}^{(j)}(y) J_j(x_4) [\Phi_\nu(y) - \Phi_\nu(x_3)];$$

$$J_1(y) = \frac{1}{2\kappa_0} \ln \frac{\kappa_0 - y}{\kappa_0 + y}; \quad J_2(y) = \frac{\sqrt{\kappa_0^2 - 1}}{2\kappa_0} \left[ \arcsin \frac{1 + \kappa_0 y}{\kappa_0 + y} - \arcsin \frac{1 - \kappa_0 y}{\kappa_0 - y} \right] - \arcsin y;$$

$$\phi_\nu(y) = (1-y)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mu=1}^{\nu} a_\mu^{(\nu)} y^\mu; \quad (\nu=1,2,\dots,N); \quad a_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\mu+\nu} \left[ \frac{2\nu+2}{\nu(\nu+2)} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{(\mu+\nu+1)!}{(\nu-\mu)!(\mu+1)!(\mu-1)!};$$

$$\Phi_\nu(y) = \sum_{\mu=1}^{\nu} a_\mu^{(\nu)} \chi_\mu(y); \quad \chi_\mu(y) = 2(1-y)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=1}^{\mu+1} (-1)^\lambda \frac{\mu!(1-y)^\lambda}{(\lambda-1)!(\mu-\lambda+1)!(2\lambda+1)};$$

$$g_{m\nu}^{(j)} = \int_0^{\sqrt{3}/2} dy h_j(y) [\Phi_\nu(x_3) - \Phi_\nu(x_1)] F_m^{(1)}(y) + \int_{\sqrt{3}/2}^1 dy h_j(y) [\Phi_\nu(x_3) - \Phi_\nu(x_4)] F_m^{(2)}(y);$$

(j = 1, 2),

## Приложение 2

Здесь мы приведем коэффициенты  $W$  и правые части  $V$  алгебраических уравнений (12).

$$W_{mm}^{(1)} = \gamma \left\{ \sum_{m_1} R_{m_1 m}^{(1)} S_{mm_1}^{(1)} + \sum_{\nu} C_{m\nu}^{(1)} T_{m\nu}^{(1)} \right\} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \sum_{m_1} R_{m_1 m}^{(2)} S_{mm_1}^{(2)} + \sum_{\nu} C_{m\nu}^{(2)} T_{m\nu}^{(2)} \right\} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{m_1} R_{m_1 m}^{(1)} S_{mm_1}^{(3)};$$

$$W_{mm}^{(2)} = \gamma \left\{ \sum_{m_1} R_{m_1 m}^{(2)} S_{mm_1}^{(1)} + \sum_{\nu} C_{m\nu}^{(2)} T_{m\nu}^{(1)} \right\} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \sum_{m_1} R_{m_1 m}^{(1)} S_{mm_1}^{(2)} + \sum_{\nu} C_{m\nu}^{(1)} T_{m\nu}^{(2)} \right\} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{m_1} R_{m_1 m}^{(2)} S_{mm_1}^{(3)};$$

$$W_{m\nu}^{(3)} = \gamma \left\{ \sum_{m_1} C_{m_1\nu}^{(1)} S_{mm_1}^{(1)} + \sum_{\mu} P_{\mu\nu}^{(1)} T_{m\mu}^{(1)} \right\} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \sum_{m_1} C_{m_1\nu}^{(2)} S_{mm_1}^{(2)} + \sum_{\mu} P_{\mu\nu}^{(2)} T_{m\mu}^{(2)} \right\} + \\ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{m_1} C_{m_1\nu}^{(1)} S_{mm_1}^{(3)};$$

$$W_{m\nu}^{(4)} = \gamma \left\{ \sum_{m_1} C_{m_1\nu}^{(2)} S_{mm_1}^{(1)} + \sum_{\mu} P_{\mu\nu}^{(2)} T_{m\mu}^{(1)} \right\} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \sum_{m_1} C_{m_1\nu}^{(1)} S_{mm_1}^{(2)} + \sum_{\mu} P_{\mu\nu}^{(1)} T_{m\mu}^{(2)} \right\} + \\ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{m_1} C_{m_1\nu}^{(2)} S_{mm_1}^{(3)};$$

$$W_{\nu m}^{(5)} = \gamma \left\{ \sum_{m_1} R_{m_1 m}^{(1)} T_{m_1\nu}^{(1)} + \sum_{\mu} C_{m\mu}^{(1)} U_{\nu\mu}^{(1)} \right\} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \sum_{m_1} R_{m_1 m}^{(2)} T_{m_1\nu}^{(2)} + \sum_{\mu} C_{m\mu}^{(2)} U_{\nu\mu}^{(2)} \right\};$$

$$W_{\nu m}^{(6)} = \gamma \left\{ \sum_{m_1} R_{m_1 m}^{(2)} T_{m_1\nu}^{(1)} + \sum_{\mu} C_{m\mu}^{(2)} U_{\nu\mu}^{(1)} \right\} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \sum_{m_1} R_{m_1 m}^{(1)} T_{m_1\nu}^{(2)} + \sum_{\mu} C_{m\mu}^{(1)} U_{\nu\mu}^{(2)} \right\};$$

$$W_{\nu\mu}^{(7)} = \gamma \left\{ \sum_m C_{m\mu}^{(1)} T_{m\nu}^{(1)} + \sum_{\nu'} P_{\nu'\mu}^{(1)} U_{\nu\nu'}^{(1)} \right\} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \sum_m C_{m\mu}^{(2)} T_{m\nu}^{(2)} + \sum_{\nu'} P_{\nu'\mu}^{(2)} U_{\nu\nu'}^{(2)} \right\};$$

$$W_{\nu\mu}^{(8)} = \gamma \left\{ \sum_m C_{m\mu}^{(2)} T_{m\nu}^{(1)} + \sum_{\nu'} P_{\nu'\mu}^{(2)} U_{\nu\nu'}^{(1)} \right\} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \sum_m C_{m\mu}^{(1)} T_{m\nu}^{(2)} + \sum_{\nu'} P_{\nu'\mu}^{(1)} U_{\nu\nu'}^{(2)} \right\};$$

Где

$$S_{mm'}^{(i)} = P \int_0^{\infty} \frac{z^2 dz}{z^2 - \kappa_0^2} f_i(z) \bar{M}_m(z) \bar{M}_{m'}(z); \quad (i=1,2,3)$$

$$T_{m\mu}^{(i)} = \int_0^1 \frac{z^2 dz}{z^2 - \kappa_0^2} f_i(z) \bar{M}_m(z) \bar{\phi}_{\mu}^{(i)}(z); \quad (i=1,2); \quad T_{m\mu}^{(3)} = 0;$$

$$U_{\mu\nu}^{(i)} = \int_0^1 \frac{z^2 dz}{z^2 - \kappa_0^2} f_i(z) \bar{\phi}_\mu(z) \bar{\phi}_\nu(z); \quad (i=1,2); \quad U_{\mu\nu}^{(3)} = 0$$

$$f_1(z) = 1; \quad f_2(z) = \begin{cases} \sqrt{1-z^2} & 0 \leq z \leq 1; \\ 0 & z > 1 \end{cases}; \quad f_3(z) = \begin{cases} 0 & z < 1 \\ \sqrt{z^2-1} & 1 \leq z \leq \infty \end{cases};$$

$$V_m^{(1)} = \gamma \int_0^1 \frac{z^2 dz}{z^2 - \kappa_0^2} \bar{M}_m(z) \left[ -\frac{G^{(1)}(z, \kappa_0)}{2z\kappa_0} + \lambda R_1^{(1)}(z, \kappa_0) + \lambda R_1^{(3)}(\kappa_0, z) \right] +$$

$$+ P \int_1^\infty \frac{z^2 dz}{z^2 - \kappa_0^2} \bar{M}_m(z) \left[ -\frac{G^{(1)}(z, \kappa_0)}{2z\kappa_0} + \lambda R_1^{(1)}(z, \kappa_0) \right] -$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 \frac{z^2 dz}{z^2 - \kappa_0^2} \sqrt{1-z^2} \bar{M}_m(z) \lambda [R_2^{(1)}(z, \kappa_0) + R_2^{(3)}(\kappa_0, z)] +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} P \int_1^\infty \frac{z^2 dz}{z^2 - \kappa_0^2} \sqrt{z^2-1} \bar{M}_m(z) \left[ -\frac{G^{(1)}(z, \kappa_0)}{2z\kappa_0} + \lambda R_1^{(1)}(z, \kappa_0) \right];$$

$$V_m^{(2)} = \gamma \left\{ \lambda \int_0^1 \frac{z^2 dz}{z^2 - \kappa_0^2} \bar{M}_m(z) [R_2^{(1)}(z, \kappa_0) + R_2^{(3)}(\kappa_0, z)] + \lambda P \int_1^\infty \frac{z^2 dz}{z^2 - \kappa_0^2} \bar{M}_m(z) R_2^{(1)}(z, \kappa_0) \right\} +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 \frac{z^2 dz}{z^2 - \kappa_0^2} \sqrt{1-z^2} \bar{M}_m(z) \left[ -\frac{G^{(1)}(z, \kappa_0)}{2z\kappa_0} + \lambda R_1^{(1)}(z, \kappa_0) + \lambda R_1^{(3)}(\kappa_0, z) \right] +$$

$$+ \lambda \frac{\sqrt{3}}{2} P \int_1^\infty \frac{z^2 dz}{z^2 - \kappa_0^2} \sqrt{z^2-1} \bar{M}_m(z) R_2^{(1)}(z, \kappa_0);$$

$$V_\mu^{(3)} = \gamma \int_0^1 \frac{z^2 dz}{z^2 - \kappa_0^2} \bar{\phi}_\mu(z) \left[ -\frac{G^{(1)}(z, \kappa_0)}{2z\kappa_0} + \lambda R_1^{(1)}(z, \kappa_0) + \lambda R_1^{(3)}(\kappa_0, z) \right] -$$

$$-\lambda \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 \frac{z^2 dz}{z^2 - \kappa_0^2} \sqrt{1-z^2} \bar{\phi}_\mu(z) [R_2^{(1)}(z, \kappa_0) + R_2^{(3)}(\kappa_0, z)];$$

$$V_\mu^{(4)} = \gamma \lambda \int_0^1 \frac{z^2 dz}{z^2 - \kappa_0^2} \bar{\phi}_\mu(z) [R_2^{(1)}(z, \kappa_0) + R_2^{(3)}(\kappa_0, z)] +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 \frac{z^2 dz}{z^2 - \kappa_0^2} \sqrt{1-z^2} \bar{\phi}_\mu(z) \left[ -\frac{G^{(1)}(z, \kappa_0)}{2z\kappa_0} + \lambda R_1^{(1)}(z, \kappa_0) + \lambda R_1^{(3)}(\kappa_0, z) \right].$$

### Л и т е р а т у р а

1. Л.Д. Фаддеев. Труды математ. ин-та им. Стеклова АН СССР, т. 49, 1963 г.
2. J.H. Hetherington, L.H. Schick, Phys.Rev., 137, В 935 (1965); R.Aaron, R.D.Amado. Phys.Rev., 150, 857, (1966); R.T.Cahill, I.H.Sloan, Phys.Lett., 33B, 195, (1970);
3. D.D.Brayshaw. Phys.Rev., 176, 1855, (1968); R.T.Cahill, I.H.Sloan. Nucl.Phys., A168, 211 (1971).
4. А.Г. Ситенко, В.Ф. Харченко. УФН, т. 103, стр. 469, (1971).

Рукопись поступила в издательский отдел  
8 декабря 1971 года.