ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P4 - 6113

С. Аврамов, Г.Н. Афанасьев, П.П. Райчев

О РЕАЛИЗАЦИЯХ ФИЗИЧЕСКОГО БАЗИСА SU (3) И ВЕРОЯТНОСТЯХ B (E2) ПЕРЕХОДОВ В СХЕМЕ SU (3)

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1971

P4 - 6113

С. Аврамов, Г.Н. Афанасьев, П.П. Райчев

О РЕАЛИЗАЦИЯХ ФИЗИЧЕСКОГО БАЗИСА SU (3) И ВЕРОЯТНОСТЯХ В (E2) ПЕРЕХОДОВ В СХЕМЕ SU (3)

Направлено в ЯФ

1. Мы начнем с базиса Бергмана-Мошинского (БМ) /1/. Кратко опишем его. Генераторы $SU(3)$ выбираем в виде:

$$L_{\mu\nu} = L_{\mu\nu}(x) + L_{\mu\nu}(y); \quad Q_{\mu\nu} = Q_{\mu\nu}(x) + Q_{\mu\nu}(y),$$

$$L_{\mu\nu}(x) = x_\mu p_\nu - x_\mu p_\nu; \quad L_{\mu\nu}(y) = y_\mu q_\nu - y_\nu q_\mu,$$

$$Q_{\mu\nu}(x) = x_\mu p_\nu + x_\nu p_\mu - \frac{2}{3}\delta_{\mu\nu}\, x \cdot p; \quad Q_{\mu\nu}(y) = y_\mu q_\nu + y_\nu q_\mu - \frac{2}{3}\delta_{\mu\nu}\, y \cdot q .$$

Мы предполагаем реализацию Фока операторов рождения x, y и уничтожения p, q:

$$p_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (x_\mu)^+, \quad q_\mu = \frac{\partial}{\partial y_\mu} = (y_\mu)^+, \quad \mu = 1, 2, 3,$$

$$[p_\mu, x_\nu] = [q_\mu, y_\nu] = \delta_{\mu\nu} .$$

Остальные коммутаторы равны нулю.

Введем операторы

$$C = xp + yq, \quad T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} xq, \quad T_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} yp, \quad T_0 = \frac{1}{2}(xp - yq).$$

C есть оператор Казимира $U(3)$ и равен суммарному числу частиц сортов x и y. Будем считать, что x, y несут проекции (± 1) изоспина соответственно. Тогда T_i можно интерпретировать как операторы группы изоспина. Операторы (xx), (yy), (xy) рождают пары частиц с нулевым угловым моментом, с изоспином 1, с третьими проекциями изоспина $(1,-1,0)$ соответственно. В дальнейшем мы будем использовать операторы $A^+ = x^2y^2-(xy)^2$ и $A = p^2q^2-(pq)^2$, которые условно назовем операторами рождения и уничтожения a -частицы. Легко понять, что $A^+ (A)$ – единственный независимый скаляр относительно пространственных и изотопических вращений, которые можно построить только из операторов рождения (уничтожения). Операторы Казимира $SU(3)$ равны

$$C_2 = Q_{ll}\,Q_{ll} - L_{ll}\,L_{ll} = \frac{2}{3}C^2 + 4C + 8T^2,$$

$$C_3 = Q_{ll}(Q_{lk}\,Q_{lk} - 3L_{lk}\,L_{lk}) = -\frac{2}{3}C^2 - 2C^2 - 4C + 24T^2 + 8CT^2.$$

Поскольку операторы C_2 и C_3 зависят только от операторов полного числа частиц и квадрата изоспина, то базисная функция, отвечающая неприводимому представлению $SU(3)$, должна содержать число частиц n и преобразовываться по неприводимому представлению с изоспином T. Генераторы $SU(3)$, коммутируя с T_k, не приводят к смешиванию состояний с различными третьими проекциями изоспина. Удобно поэтому зафиксировать собственное значение оператора T_0, положив его равным максимальному значению, т.е. T.

Введем сферические коэффициенты

$$\xi_{\pm 1} = (x_1 \pm i x_2), \quad \xi_0 = x_3; \quad \eta_{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 \pm i y_2), \quad \eta_0 = y_3.$$

Тогда базисная функция, преобразующаяся по неприводимому представлению $SU(3)$ с угловым моментом ℓ (проекция на ось z также ℓ), имеет вид:

$$z^{\beta}\xi_1^{\ell+2a-\frac{1}{2}(n-\tau)}(\xi_1\eta_0-\xi_0\eta_1)^{\frac{n-\tau}{2}-2a-\beta}(\xi^2)^{\frac{1}{2}\left(\frac{n+\tau}{2}-\beta-\ell-2a\right)}(A^+)^a|0>$$

Здесь мы положили

$$\xi^2=\xi_0^2+2\xi_1\xi_{-1};\quad z=\xi_0(\xi_1\eta_0-\xi_0\eta_1)+\xi_1(\xi_1\eta_{-1}-\xi_{-1}\eta_1).$$

$$\tau = 2T$$

Индексы (n,τ,ℓ,a,β) принимают значения

$$\beta=0,1;\quad n=0,1,2,3,\ldots;\quad \tau=n,n-2,\ldots0,(1).$$

ℓ принимает целочисленные значения в интервале

$$0\le\ell\le\frac{n+\tau}{2}-\beta.$$

При этом допустимыми являются ℓ , чётность которых совпадает с чётностью $\frac{n+\tau}{2}-\beta$. Наконец, a принимает целочисленные значения в интервале:

$$\min\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n-\tau}{2}-\beta\right),\frac{1}{2}\left(\frac{n-\tau}{2}-\ell-\beta\right)\right]<a<\max\left[0,\frac{1}{2}\left(\frac{n-\tau}{2}-\ell\right)\right].$$

Авторы /1/ предложили искать также ортогональные комбинации (по a), которые являются собственными функциями оператора Ω , составленного из скалярного произведения трех Q_{μ} :

$$\Omega = (QQQ)^{\circ}_{\circ}.$$

2. В данной работе в качестве оператора Ω выбирается оператор AA^+. Имеем:

$$<n\tau\ell a_1 | AA^+ | n\tau\ell a_2> = <n+4, \tau, \ell, a_1+1 | n+4, \tau, \ell, a_2+1>. \quad (2.1)$$

Ищем коэффициенты $<n\tau, \ell a | n\tau\ell\omega>$ такие, чтобы

$$|n\tau\ell\omega> = \sum_a |n\tau, \ell a><n\tau\ell a | n\tau\ell\omega> \quad (2.2)$$

были собственными векторами AA^+:

$$AA^+ |n\tau, \ell\omega> = \omega |n\tau\ell\omega>. \quad (2.3)$$

Из (2.1)-(2.3) находим систему однородных уравнений для коэффициентов $<a|\omega>$:

$$\sum <a|\omega>[<n+4, a+1 | n+4, a_1+1> - \omega <na | na_1>] = 0. \quad (2.4)$$

Условие разрешимости системы определяет ω:

$$det \| <n+4, a+1 | n+4, a_1+1> - \omega <na | na_1> \| = P.$$

Наконец, подставив ω_i в (2.4), получаем коэффициенты $<a|\omega_i>$ в виде функции одного из них, например, $<a_0|\omega_i>$. Этот последний, в свою очередь, определяется условием нормировки. Ясно, что как ω, так и $<a|\omega>$ зависят от интегралов перекрытия $<a_1|a_2> \equiv <n\tau\ell a_1 | n\tau\ell a_2>$, которые с помощью ЭВМ вычислялись скалярным перемножением (1.1) с эрмитово сопряженными. Вычисления проводились вплоть до $n = 10$ (и всеми допустимыми τ, ℓ, a). В таблицах 1, 2 приведены значения ω и $<a|\omega>$ для случаев, когда при данных $(n T \ell)$ имеется одно или два значения a соответственно.

Таблица I

n	T	ℓ	α	ω	⟨α|ω⟩	n	T	ℓ	α	ω	⟨α|ω⟩
0	0	0	0	36	I	5	5/2	I	0	252	5,976I4305·IO^{-2}
I	I/2	I	0	60	I	5	5/2	3	0	232	9,622504486·IO^{-2}
2	0	I	0	I20	0,707I0678I2	5	5/2	5	0	I96	9,I2870929·IO^{-2}
2	I	0	0	I00	4,082482905·IO^{-I}						
2	I	2	0	88	0,707I0678I	6	0	I	I	840	6,45497224·IO^{-2}
3	I/2	I	0	200	0,40824829						
3	I/2	2	0	I68	0,577350269	6	0	3	0	540	8,333... ·IO^{-2}
3	3/2	I	0	I40	0,3I6227766	6	I	0	I	784	4,082482905·IO^{-2}
3	3/2	3	0	I20	0,408248290	6	I	I	0	70I,I23595	5,2999894·IO^{-2}
4	0	0	I	400	0,I66666...	6	I	3	0	540	I,II803399·IO^{-I}
						6	I	4	0	444	I,II803399·IO^{-I}
4	0	2	0	280	0,288675I35						
						6	2	I	0	504	4,22577I3·IO^{-2}
4	I	2	0	280	0,288675I35	6	2	2	0	504	6,29940788·IO^{-2}
4	I	3	0	220	0,35355339	6	2	3	0	444	8,(3)·IO^{-2}
4	2	0	0	I96	9,I28709292·IO^{-2}	6	2	4	0	476	7,4535599·IO^{-2}
4	2	2	0	I84	0,I889822365	6	2	5	0	336	8,(3) · IO^{-2}
4	2	4	0	I56	0,204I24I45	6	3	0	0	324	I,4085904·IO^{-2}
5	I/2	I	I	560	0,I29099445	6	3	2	0	3I2	3,I4970394·IO^{-2}
5	I/2	2	0	420	0,I666666...	6	3	4	0	284	4,35I94I4·IO^{-2}
5	I/2	3	0	360	0,204I24I45	6	3	6	0	240	3,72678·IO^{-2}
5	3/2	I	0	392	0,I	7	I/2	I	I	II76	2,88675I·IO^{-2}
5	3/2	2	0	360	0,I5430335	7	I/2	2	I	I080	4,45435403·IO^{-2}
5	3/2	3	0	372	0,I58II3883	7	I/2	3	0	756	4,5643546·IO^{-2}
5	3/2	4	0	276	0,I82574I86	7	I/2	4	0	660	5,2704628·IO^{-2}

n	T	l	d	w	$\langle d \vert w \rangle$	n	T	l	d	w	$\langle d \vert w \rangle$
7	3/2	I	I	I008	2,6726I242·I0^{-2}	8	2	3	0	924	2,I5I6574I·I0^{-2}
7	3/2	2	0	756	3,4503278·I0^{-2}	8	2	5	0	8I6	2,57I7225·I0^{-2}
7	3/2	4	0	672	5,7735027·I0^{-2}	8	2	6	0	624	2,227I77·I0^{-2}
7	3/2	5	0	532	5,2704628·I0^{-2}						
7	5/2	I	0	648	I,597I9I4·I0^{-2}	8	3	I	0	792	5,7505463·I0^{-3}
7	5/2	2	0	6I6	2,57I7225·I0^{-2}	8	3	2	0	792	9,0924I2I·I0^{-3}
7	5/2	3	0	628	3,I49704·I0^{-2}	8	3	3	0	732	I,25629727·I0^{-2}
7	5/2	4	0	532	3,8924947·I0^{-2}	8	3	4	0	764	I,3762047·I0^{-2}
7	5/2	5	0	592	3,I49704·I0^{-2}	8	3	5	0	623,94658	I,63430II3·I0^{-2}
7	5/2	6	0	400	3,4503278·I0^{-2}	8	3	6	0	720	I,2I9875I·I0^{-2}
7	7/2	I	0	396	8,I325·I0^{-3}	8	3	7	0	468	I,3I76I569·I0^{-2}
7	7/2	3	0	376	I,450647·I0^{-2}	8	4	0	0	484	I,660039735·I0^{-3}
7	7/2	5	0	340	I,790287·I0^{-2}	8	4	2	0	472	3,8770I754·I0^{-3}
7	7/2	7	0	288	I,4085904·I0^{-2}	8	4	4	0	444	6,03505687·I0^{-3}
8	0	0	2	I764	8,33333333·I0^{-3}	8	4	6	0	400	6,804I382·I0^{-3}
						8	4	8	0	340	4,980II92·I0^{-3}
8	0	2	I	I5I2	I,725I63898·I0^{-2}	9	I/2	I	2	2268	5,45544726·I0^{-3}
						9	I/2	2	I	20I6	8,I325006I·I0^{-3}
8	0	4	0	924	I,86339·I0^{-2}	9	I/2	3	I	I848	I,0758287·I0^{-2}
						9	I/2	4	0	I232	9,6225045·I0^{-3}
8	I	I	0	I5I2	I,336306·I0^{-2}	9	3/2	I	I	I944	5,0507627·I0^{-3}
8	I	4	0	924	2,88675I3·I0^{-2}	9	3/2	2	I	I848	8,I325006I·I0^{-3}
8	I	5	0	784	2,63523I4·I0^{-2}	9	3/2	5	0	II04	I,4085904·I0^{-2}
8	2	0	I	I296	6,520506637·I0^{-3}	9	3/2	6	0	9I2	I,I50I0927·I0^{-2}
8	2	I	0	II0I,45763	7,67I455I5·I0^{-3}	9	5/2	I	I	I584	3,7646I626·I0^{-3}

n	T	ℓ	d	ω	$\langle d\|\omega\rangle$	n	T	ℓ	d	ω	$\langle d\|\omega\rangle$
9	5/2	4	0	II04	I,0403I397·IO^{-2}						
9	5/2	6	0	972	I,0309827·IO^{-2}	IO	2	I	I	2376	I,882308·IO^{-3}
9	5/2	7	0	720	8,6258I95·IO^{-3}	IO	2	6	0	I296	5,95238I·IO^{-3}
9	7/2	I	0	968	I,9I684878·IO^{-3}	IO	2	7	0	I044	4,54620605·IO^{-3}
9	7/2	2	0	936	3,I6557I57·IO^{-3}	IO	3	0	I	I936	7,8255024·IO^{-4}
9	7/2	3	0	948	4,I8765756·IO^{-3}	IO	3	I	0	I595,8I374	8,5924352·IO^{-4}
9	7/2	4	0	852	5,3979I896·IO^{-3}	IO	3	3	0	I404	2,809I66094·IO^{-3}
9	7/2	5	0	9I2	5,44767042·IO^{-3}	IO	3	5	0	I296	4,36785343·IO^{-3}
9	7/2	6	0	720	6,29940788·IO^{-3}	IO	3	7	0	II40	3,80362887·IO^{-3}
9	7/2	7	0	860	4,3920523I·IO^{-3}	IO	3	8	0	820	3,I0565·IO^{-3}
9	7/2	8	0	540	4,69530I42·IO^{-3}						
9	9/2	I	0	572	8,66927478·IO^{-4}	IO	4	I	0	II44	6,I30I0298·IO^{-4}
9	9/2	3	0	552	I,64253443·IO^{-3}	IO	4	2	0	II44	I,00I04I63·IO^{-3}
9	9/2	5	0	5I6	2,3II25082·IO^{-3}	IO	4	3	0	I084	I,42247655·IO^{-3}
9	9/2	7	0	464	2,4I57I265·IO^{-3}	IO	4	4	0	III6	I,70697I85·IO^{-3}
9	9/2	9	0	396	I,66003973·IO^{-3}	IO	4	5	0	976	2,I098737·IO^{-3}
IO	0	I	2	3024	2,227I7702·IO^{-3}	IO	4	6	0	I072	I,9920477·IO^{-3}
						IO	4	7	0	820	2,25969227·IO^{-3}
IO	0	3	I	2464	3,58609569·IO^{-3}	IO	4	8	0	IOI2	I,4847847·IO^{-3}
						IO	4	9	0	6I6	I,57485I97·IO^{-3}
IO	0	5	0	I456	3,402069·IO^{-3}	IO	5	0	0	676	I,58278578·IO^{-4}
IO	I	0	2	29I6	I,4580296I·IO^{-3}	IO	5	2	0	664	3,80I72848·IO^{-4}
IO	I	I	I	2929,0I5385	2,00I60I92·IO^{-3}	IO	5	4	0	636	6,36I5085·IO^{-4}
IO	I	5	0	I456	5,7505463·IO^{-3}	IO	5	6	0	592	8,25I22952·IO^{-4}
IO	I	6	0	I264	4,980II92·IO^{-3}	IO	5	8	0	532	8,078820I5·IO^{-4}
						IO	5	IO	0	456	5,24950657·IO^{-4}

Таблица 2

n	Λ	l	ω	$\lvert\omega\rangle = \sum_{\alpha} \lvert\alpha\rangle\langle\alpha\lvert\omega\rangle$
6	I	2	739,522452	$\lvert 0\rangle$ 7,24903477$\cdot$IO^{-3} – $\lvert I\rangle$ 7,77I037636$\cdot$IO^{-2}
			572,477548	$\lvert 0\rangle$ 8,0592$\cdot$IO^{-2} – $\lvert I\rangle$ 2,255340905$\cdot$IO^{-2}
7	3/2	3	94I,0299II	$\lvert 0\rangle$ 7,726I9I22$\cdot$IO^{-3} – $\lvert I\rangle$ 3,94405822$\cdot$IO^{-2}
			706,970089	$\lvert 0\rangle$ 5,2I352448$\cdot$IO^{-2} – $\lvert I\rangle$ I,I9I5I727$\cdot$IO^{-2}
8	I	3	I336,282I2	$\lvert 0\rangle$ I,I2I52552$\cdot$IO^{-3} – $\lvert I\rangle$ 2,44I29553$\cdot$IO^{-2}
			995,7I788I	$\lvert 0\rangle$ 2,057$\cdot$IO^{-2} – $\lvert I\rangle$ 9,92230I$\cdot$IO^{-3}
8	2	2	I249,9863	$\lvert 0\rangle$ 7,6470II69$\cdot$IO^{-4} – $\lvert I\rangle$ I,424I92I8$\cdot$IO^{-2}
			958,0I3338	$\lvert 0\rangle$ I,3435259I$\cdot$IO^{-2} – $\lvert I\rangle$ 5,04972647$\cdot$IO^{-3}
8	2	4	II65,8I239	$\lvert 0\rangle$ 4,9982I224$\cdot$IO^{-3} – $\lvert I\rangle$ I,7588I044$\cdot$IO^{-2}
			846,I876I	$\lvert 0\rangle$ 2,60476693$\cdot$IO^{-2} – $\lvert I\rangle$ 4,9348422$\cdot$IO^{-3}
9	3/2	3	I269,65604	$\lvert 0\rangle$ 8,264I9285$\cdot$IO^{-3} – $\lvert I\rangle$ 8,55362667$\cdot$IO^{-4}
			I886,3496	$\lvert 0\rangle$ 2,I27634I$\cdot$IO^{-4} – $\lvert I\rangle$ 8,2225608$\cdot$IO^{-3}
9	3/2	4	I6II,007I8	$\lvert 0\rangle$ I,26808785$\cdot$IO^{-3} – $\lvert I\rangle$ I,I59790975$\cdot$IO^{-2}
			II92,99282	$\lvert 0\rangle$ I,28I9404$\cdot$IO^{-2} – $\lvert I\rangle$ 5,6065725I$\cdot$IO^{-3}
9	5/2	3	I5I2	$\lvert 0\rangle$ 8,28377888$\cdot$IO^{-4} – $\lvert I\rangle$ 6,627023I$\cdot$IO^{-3}
			II44	$\lvert 0\rangle$ 8,0436I8I5$\cdot$IO^{-3} – $\lvert I\rangle$ 2,68I2060$\cdot$IO^{-3}
9	5/2	5	I4I4,424I	$\lvert 0\rangle$ 2,5I60III3$\cdot$IO^{-3} – $\lvert I\rangle$ 7,08295037$\cdot$IO^{-3}
			989,575896	$\lvert 0\rangle$ I,I2790379$\cdot$IO^{-2} – $\lvert I\rangle$ I,80294687$\cdot$IO^{-3}
I0	I	2	282I,22973	$\lvert I\rangle$ 4,90397289$\cdot$IO^{-4} – $\lvert 2\rangle$ 2,9I408I0I$\cdot$IO^{-3}
			2546,77027	$\lvert I\rangle$ 3,34306957$\cdot$IO^{-3} – $\lvert 2\rangle$ 7,50II9735$\cdot$IO^{-4}
I0	I	4	2I98,3I394	$\lvert 0\rangle$ I,3598874$\cdot$IO^{-3} – $\lvert I\rangle$ 5,39I222I$\cdot$IO^{-3}
			I573,68606	$\lvert 0\rangle$ 4,082427I3$\cdot$IO^{-3} – $\lvert I\rangle$ 2,47I4I345$\cdot$IO^{-3}

n	T	l	ω	$\vert\omega\rangle = \sum \vert\alpha\rangle\langle\alpha\vert\omega\rangle$
IO	2	3	2I98,3I394	$\vert 0\rangle$ I,0I36002I·IO^{-4} − $\vert I\rangle$ 4,0I83797·IO^{-3}
			I57,68606	$\vert 0\rangle$ 3,04286I52·IO^{-3} − $\vert I\rangle$ I,84208283·IO^{-3}
IO	2	4	2299,67826	$\vert 0\rangle$ 2,0634873·IO^{-4} − $\vert 1\rangle$ 3,43776237·IO^{-3}
			I504,32I738	$\vert 0\rangle$ 5,05079902·IO^{-3} − 4,54754802·IO^{-4} $\vert I\rangle$
IO	2	5	I906,02362	$\vert 0\rangle$ 8,676475I7·IO^{-4} − $\vert 1\rangle$ 4,9349587·IO^{-3}
			I397,97638	$\vert 0\rangle$ 6,II5838I2·IO^{-3} − $\vert I\rangle$ 2,4I934778·IO^{-3}
IO	3	2	I889,28204	$\vert 0\rangle$ IO^{-5} 6,3369876I − $\vert 1\rangle$ I,8II0963·IO^{-3}
			I438,7I795	I,646I9646·IO^{-3} $\vert 0\rangle$ − 6,9II9206I·IO^{-4} $\vert 1\rangle$
IO	3	4	I795,65I93	5,454303I6·IO^{-4} $\vert 0\rangle$ − 2,77062384·IO^{-3} $\vert I\rangle$
			I336,348I4	3,75085675·IO^{-3} $\vert 0\rangle$ − I,I0759986·IO^{-3} $\vert I\rangle$
IO	3	6	I687,0709	I,0804I028·IO^{-3} $\vert 0\rangle$ − 2,6248I582·IO^{-3} $\vert I\rangle$
			II36,929I	4,4I596004·IO^{-3} $\vert 0\rangle$ − 6,05889958·IO^{-4} $\vert I\rangle$

3. Заметим, теперь, что как оператор AA^{+}, так и оператор, использованный в [1], являются нефизическими. Собственные векторы оператора AA^{+} удобно использовать в качестве затравочного ортонормированного базиса. Ясно, что всякий ортонормированный базис определяется с точностью до некоторого унитарного преобразования

$$|i> = \sum_{\omega} |\omega><\omega|i>.$$

В нашем случае $(n \leq 10)$ имеем, например,

$$|1> = e^{i\phi_1} \cos\theta\,|\omega_1> + e^{i\phi_{12}} \sin\theta\,|\omega_2>,$$

$$|2> = -e^{i(\phi_1+\phi_2-\phi_{12})} \sin\theta\,|\omega_1> + e^{i\phi_2} \cos\theta\,|\omega_2>.$$

Таким образом, остаются неопределенными углы θ, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_{12}. Эту неопределенность можно использовать для подгонки вероятностей $B(E2)$ переходов. Заметим, что углы (θ, ϕ) не являются одними и теми же для всех n, T, ℓ, а свои для каждой тройки $(n\ T\ \ell)$. Столь большим числом параметров (а их в нашем случае около 70) мы надеемся подогнать практически все наблюдаемые на опыте отношения $B(E2)$ переходов в рамках $SU(3)$ симметрии.

4. Покажем, что задача нахождения дополнительного квантового числа в схеме $SU(3)$ может быть сведена к задаче асимметрического волчка. По определению группа унитарных преобразований в трехмерном пространстве оставляет инвариантной форму:

$$\rho^2 = x\bar{x} = x_0\bar{x}_0 + x_1\bar{x}_1 + x_{-1}\bar{x}_{-1}. \qquad (4.1)$$

Начиная с этого момента под x_μ и $p_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ подразумеваем координаты и производные по ним. Черта означает комплексное сопряжение. Генераторы $\dot{U}(3)$ имеют вид:

$$x_\mu p_\nu - \bar{x}_\nu \bar{p}_\mu . \tag{4.2}$$

Таким образом, унитарные преобразования переводят x_μ в линейные же комбинации x_μ, т.е. не смешивают x_μ и $\bar{x}_\mu$. С другой стороны, форма (4.1) инвариантна также относительно следующих преобразований:

$$x_\mu \bar{p}_\nu - x_\nu \bar{p}_\mu , \qquad \bar{x}_\mu p_\nu - \bar{x}_\nu p_\mu . \tag{4.3}$$

Совокупность преобразований (4.2), (4.3) изоморфна группе шестимерных вращений $O(6)$. Унитарная группа является подгруппой $O(6)$. В свою очередь, $SU(3)$ содержит подгруппу трехмерных вращений, оставляющих инвариантными кроме (4.1) еще следующие формы:

$$r^2 = (-1)^\mu x_\mu x_{-\mu}; \qquad \bar{r}^2 = (-1)^\mu \bar{x}_\mu \bar{x}_{-\mu} .$$

Генераторы $O(3)$ имеют вид:

$$L_0 = x_1 p_1 - x_{-1} p_{-1} - \bar{x}_1 \bar{p}_1 + \bar{x}_{-1} \bar{p}_{-1} ,$$

$$L_1 = x_1 p_0 + x_0 p_{-1} - \bar{x}_0 \bar{p}_1 - \bar{x}_{-1} \bar{p}_0 ,$$

$$L_{-1} = x_0 p_1 + x_{-1} p_0 - \bar{x}_0 \bar{p}_{-1} - \bar{x}_1 \bar{p}_0 .$$

Компоненты квадрупольного момента равны

$$Q_0 = \frac{1}{3} (x_1 p_1 + x_{-1} p_{-1} - 2 x_0 p_0 - \bar{x}_1 \bar{p}_1 - \bar{x}_{-1} \bar{p}_{-1} + 2 \bar{x}_0 \bar{p}_0) ,$$

$$Q_1 = x_0 p_{-1} - x_1 p_0 - \bar{x}_{-1} \bar{p}_0 + \bar{x}_0 \bar{p}_1 ,$$

$$Q_2 = x_1 p_{-1} - \bar{x}_{-1} \bar{p}_1 ,$$

$$Q_{-\mu} = Q_\mu^+ , \quad \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}_\mu}\right)^+ = -\frac{\partial}{\partial \bar{x}_\mu} .$$

Перейдем к координатам

$$x_\mu = \rho e^{i\alpha} [D_{\mu 0}(\theta, \phi\psi) \cos\gamma + i \frac{\sin\gamma}{\sqrt{2}} [D_{\mu 1} - D_{\mu -1}] ,$$

$$e^{2i\alpha} = \frac{r}{\bar{r}} , \quad \cos 2\gamma = \frac{r\bar{r}}{\rho^2} , \quad \rho^2 = x_\mu \bar{x}_\mu .$$

Оператор Казимира $U(3)$ первого порядка

$$C_1 = xp - \overline{xp} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha} .$$

Квадратичный оператор Казимира

$$C_2 = \frac{1}{4}(xp + \overline{xp} + 1)(xp + \overline{xp} + 3) - \rho^2 p_\mu \bar{p}_\mu =$$

$$= C_1^2 + 3 - p_\gamma^2 - 2\,\mathrm{ctg}\,2\gamma . p_\gamma + \left(\frac{\tilde{\tilde{L}}_x^2}{\sin\gamma} + \tilde{\tilde{L}}_y^2 + \frac{\tilde{\tilde{L}}_z^2}{\cos\gamma}\right) . \qquad (4.4)$$

Здесь $\tilde{\tilde{L}}_i$ - компоненты углового момента во внутренней системе координат. Диагонализация (4.4) включает в себя диагонализацию гамильтониана асимметричного волчка, что и требовалось доказать.

Литература

1. Bargmann V., Moshinsky. Nucl.Phys. 18, 697, 1960; ibid. 23, 177, 1961.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 ноября 1971 года.