

С 374

T-612

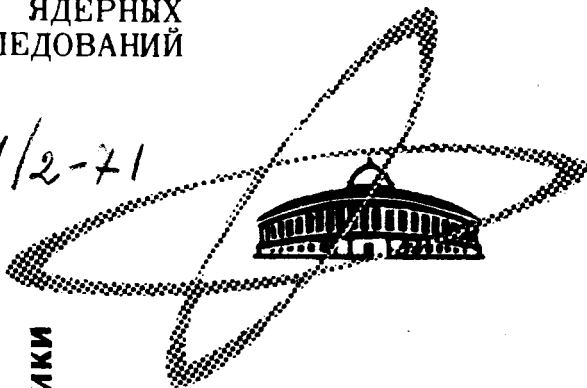
20/xii-71

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

4261/2-71

P4 - 6085



ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ  
И АВТОМАТИЗАЦИИ

Н.А. Торопков

РАССЕЯНИЕ КОГЕРЕНТНОГО СВЕТА  
В РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗАХ

1971

P4 - 6085

Н.А. Торопков

РАССЕЯНИЕ КОГЕРЕНТНОГО СВЕТА  
В РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗАХ

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

Рассеяние света в средах - хорошо исследованная область, однако в последние годы в связи с использованием когерентного света лазеров и открывшимися возможностями различного рода интерференционных экспериментов и голографии представляются достаточно важными и актуальными исследованиями по когерентным состояниям электромагнитного поля<sup>/I-3/</sup> и коррелирующим с ними вопросам диагностики сред<sup>/IO, II/</sup>.

В данной работе рассматривается рассеяние когерентного света в разреженных газах с использованием когерентного опорного источника при регистрации рассеянного излучения. Подобная методика представляется эффективной для диагностики сред и обладает преимуществами, обусловленными возможной полнотой эксперимента<sup>/4/</sup>. С учетом запаздывания получены основные выражения для спектров рассеянного поля, опорного источника и интерференционного члена. Получено выражение, связывающее сдвиг интерференционных полос, параметры, характеризующие рассеянное излучение и геометрию эксперимента.

I. Пусть плоская монохроматическая световая волна падает из среды с  $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ , рассеивается в разреженном (давление  $P \approx 1$  атмосферы) газе и детектируется в точке  $\vec{R}$ . Известно [5], что под действием внешнего поля в газе возникает поляризуемость

$$\vec{P} = N e \vec{x}(t), \quad (1)$$

где  $N$  - число рассеивателей и поле

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}, \quad (2)$$

$\vec{E}$  - поле падающей волны.

Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  из выражения (2) имеет вид:

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi |P|}{|E|} = (\hat{n})^2 = (n - i\kappa)^2, \quad (3)$$

$n$  - показатель преломления среды,  $\kappa$  - коэффициент поглощения. В случае низкого давления взаимодействие атомов газа мало и

$$e\vec{x}(t) = \alpha \vec{E} = \alpha \vec{E}_0 e^{i\omega t}, \quad \text{где} \quad (4)$$

$\omega$  - частота падающей волны. Величину  $\alpha$  рассчитываем, исходя из модельных представлений. Чтобы найти ее явный вид, рассмотрим модель ангармонического осциллятора, которой, как можно полагать, с хорошим приближением для нашей задачи, соответствует газ. Полное решение уравнения движения ангармонического осциллятора

$$m\ddot{\vec{x}} + R\dot{\vec{x}} + G\vec{x} = e\vec{E} e^{i\omega t} \quad (5)$$

хорошо известно и имеет вид суммы частного решения уравнения (5) и общего решения однородного уравнения

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{-\gamma t/2} \cos(\omega_0 t - \alpha) + \frac{e \vec{E} \cos(\omega t - \beta)}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}; \quad (6)$$

где первый член характеризует затухающие колебания, соответствующие внутреннему движению электрона в атоме со случайной в общем случае фазой  $\alpha$  в момент времени  $t = 0$ . Второй член соответствует вынужденным колебаниям с частотой падающей волны  $\omega$ . Фаза вынужденных колебаний  $\beta$  определяется как:

$$\beta = \alpha \operatorname{arctg} \frac{\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (7)$$

и изменяется от  $\beta = 0$  при  $\omega = 0$  до  $\beta = -\pi$  при  $\omega \rightarrow \infty$ .

Обычно первый член несущественен. Рассматривая только вынужденные колебания под действием внешнего поля  $\vec{E} e^{i\omega t}$ , находим, что

$$\alpha = \frac{e^2}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (8)$$

Тогда из (4) и (3) получим

$$\hat{n}^2 = \left( 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right) - i \frac{4\pi N e^2}{m} \cdot \frac{\omega \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (9)$$

В наших условиях, когда  $N \ll N_A$ ,  $N_A$  - число Авогадро, коэффициент поглощения  $\kappa \ll 1$ ,  $|n-1| \ll 1$  и  $n^2-1 \approx 2n-1$ . Поэтому для  $n$  и  $\kappa$  получаем следующие выражения:

$$n = 1 - \frac{2\pi N e^2}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}, \quad (10)$$

$$\kappa = \frac{2\pi N e^2}{m} \cdot \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}.$$

Аналогичные выражения получаются для ионной составляющей поляризуемости, однако последняя мала по сравнению с электронной в  $\left(\frac{m}{M}\right)$  раз. Поэтому в случае рассеяния световой волны ее можно не учитывать. Однако в случае резонанса  $\omega = \omega_0$  ионная составляющая поляризуемости существенна, и  $\frac{d\kappa}{d\omega}$  - дисперсия коэффициента поглощения резко возрастает в области резонанса.

При наличии многих возможных переходов у атомов газа выражения (10) видоизменяются:

$$n = 1 + \frac{2\pi N \mu e^2}{m} \sum_{\mu, \nu} \frac{f_{\mu\nu} (\omega_{\mu\nu}^2 - \omega^2)}{(\omega_{\mu\nu}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_{\mu\nu}^2 \omega^2} \left(1 - \frac{g_\nu N_\nu}{g_\mu N_\mu}\right) \quad (11)$$

при учете силы ангармонического осциллятора  $f_{\mu\nu}$ , пропорциональной матричному элементу перехода  $n \rightarrow \mu$  и нормированных статистических весов  $g_n$  и  $g_\mu$  состояний  $n$  и  $\mu$  соответственно.

Таким образом, под действием падающей волны осциллятор переизлучает волну, имеющую вид в случае одной собственной частоты

$$\vec{E}^{(r)} = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \vec{E} e^{i(\omega t - \beta)} \quad (12)$$

Вдали от резонанса  $\gamma/\omega \ll 1$  и  $\omega_0 \ll \omega$  происходит когерентное переизлучение волны с задержкой фазы на  $\pi$ .

2. Найдем явный вид электрического  $\vec{E}^{(r)}$  и магнитного  $\vec{B}^{(r)}$  рассеянных таким образом полей в точке детектирования  $\vec{R}$ .  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  в этой точке будут определяться потенциалами Ленарта-Вихерта, имеющих общий вид:

$$\vec{A}(\vec{R}, t) = \frac{-e\vec{v}(t^*)}{|\vec{R} - \vec{r}(t^*)| - \frac{1}{c}\vec{r}(t^*) \cdot \{\vec{R} - \vec{r}(t^*)\}} \quad (13)$$

$$\phi(\vec{R}, t) = \frac{-e}{|\vec{R} - \vec{r}(t^*)| - \frac{1}{c}\vec{r}(t^*) \cdot \{\vec{R} - \vec{r}(t^*)\}}$$

где  $\vec{R}$  - радиус-вектор точки наблюдения,  $\vec{r}$  - радиус-вектор точки нахождения электрона и  $t^*$  - учитывает запаздывание:

$$t^* = t - \frac{|\vec{R} - \vec{r}(t^*)|}{c}$$

и отличается от  $t$  на промежуток времени, необходимый для распространения электромагнитной волны до детектора.

Электромагнитные поля в точке  $\vec{R}$  детектора, получаемые из потенциалов вида (13), есть

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{R}, t) &= \nabla_{\vec{R}} \times \vec{A}, \\ \vec{E}(\vec{R}, t) &= -\nabla_{\vec{R}} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.\end{aligned}\quad (14)$$

Используя приближение волновой зоны, разложим потенциалы и запаздывающее время в ряд Тейлора. Чтобы сохранить интерференционные члены, оставляем нулевой порядок в выражении для амплитуды и первый порядок для фазы; в этом случае имеем:

$$\begin{aligned}t^* &\simeq t - \frac{R}{c} + \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}(t - \frac{R}{c})}{Rc}, \\ \vec{A} &\simeq - \frac{e \dot{\vec{r}}(t^*)}{Rc}.\end{aligned}\quad (15)$$

Используя (12), (14) и (15), магнитное поле рассеяния для вклада в волновой зоне получим в виде:

$$\vec{B}(\vec{R}, t) \simeq - \frac{e^2}{mc^2} \cdot d \left( \frac{\vec{E}_0 \times \vec{p}}{R^2} \right) \cos \left\{ \vec{k} \cdot \vec{r}_j \left( t - \frac{R}{c} \right) - \omega_0 \left( t - \frac{R}{c} \right) \right\} - \beta, \quad (16)$$

где  $\vec{k} = \vec{k}_0 - \frac{\omega_0}{c} \frac{\vec{R}}{R}$

и  $\frac{\omega_0}{c} \frac{\vec{R}}{R}$  является вектором распространения только рассеянной волны.

Уравнение (16) является выражением для магнитного поля излучения, рассеянного атомом в положении  $\vec{r}_j$ .



Чтобы получить поле от ансамбля  $N$  рассеивателей, просуммируем выражение (16)

$$\vec{B}(\vec{R}, t) \approx -\frac{e^2}{mc^2} \cdot \left( \frac{\vec{E}_0 \times \vec{R}}{R^2} \right) \cdot \sum_{j=1}^N \cos \left[ \vec{k} \vec{r}_j \left( t - \frac{R}{c} \right) - \omega_0 \left( t - \frac{R}{c} \right) \right], \quad (17)$$

Электрическое поле рассеяния в точке  $\vec{R}$  детектора

$$\vec{E}(\vec{R}, t) \approx \frac{\vec{B} \times \vec{R}}{R}. \quad (18)$$

3. Поскольку в разреженном газе поле  $\vec{D}$  определяется с учетом поляризуемости среды, а показатель преломления и коэффициент поглощения зависят от плотности  $N$  и частоты падающего излучения, причем

$$n \approx 1 + \delta n(\vec{r}), \quad \text{где } \delta n \ll 1, \quad (19)$$

найдем поправки на амплитуду и фазу волны, обусловленные ее распространением в слабо неоднородной среде.

С учетом (19) волновое уравнение будет иметь вид:

$$\nabla^2 u + k_0^2 u = -2k_0^2 \delta n(\vec{r}) u. \quad (20)$$

В борновском приближении полная волна в точке детектирования  $\vec{R}$  есть

$$u(\vec{R}) = e^{i\vec{k}_0 \vec{R}} + \frac{k_0^2}{2\pi} \iiint_{V} d\vec{r}_1 \delta n(\vec{r}_1) \cdot e^{i k_0 |\vec{R} - \vec{r}_1|} \cdot \frac{e}{|\vec{R} - \vec{r}_1|}, \quad (21)$$

где  $|\vec{R}-\vec{r}|$  - расстояние от точки детектирования  $\vec{R}$  до точки интегрирования  $\vec{r}$ , расположенной в элементе объема  $d\tau_q$ . При этом рассматривается случай прохождения через среду монохроматической плоской волны.

В борновском приближении можно записать полное поле (21) как:

$$\begin{aligned} e^{i\vec{k}_0\vec{r}} + u^{(s)}(\vec{r}) &= e^{i\vec{k}_0\vec{r}} (1 + \delta A) \cdot e^{i\delta\phi} \\ &= e^{i\vec{k}_0\vec{r}} (\delta A + i\delta\phi), \end{aligned} \quad (22)$$

где  $u^{(s)}(\vec{r})$  - рассеянная волна,  $\delta A$  - относительное изменение амплитуды,  $\delta\phi$  - фазовая поправка из-за неоднородностей среды.

Поскольку волны, рассеянные  $j$  и  $l$  - электронами, находящимися внутри элемента объема  $d\tau_q$ , будут почти когерентны, для нахождения поправок (22) усредним их по рассеянному полю (16) в пределах волновой зоны.

$$\begin{aligned} &\iint_{\tau_q} d\tau_q \cdot \delta n(\vec{r}) \cdot \cos \left[ \vec{k}\vec{r}_j \left( t - \frac{R}{c} \right) - \omega_0 \left( t - \frac{R}{c} \right) \right] \\ &\times \frac{\partial G}{\partial n}(\vec{r}, \vec{R}, \omega) \cdot \frac{\partial G^*}{\partial n}(\vec{r}', \vec{R}', \omega), \end{aligned} \quad (23)$$

где  $G$  - функция Грина, имеющая вид

$$G = \frac{e^{i\vec{k}_0|\vec{R}-\vec{r}|}}{|\vec{R}-\vec{r}|} \quad (24)$$

и 
$$\frac{\partial G}{\partial n} \approx \frac{i\vec{k}_0}{2\pi R^2} \cdot e^{i\vec{k}_0 R}.$$

Тогда получим, что поправка на амплитуду

$$\delta A \approx \frac{1}{2} \int \delta n(\vec{k}, \omega) \cdot d\vec{k} \cdot d\omega. \quad (25)$$

Поправку на фазу находим, воспользовавшись преобразованием Гильберта<sup>/6/</sup> и аналитичностью сигнала

$$\delta\phi = -\frac{1}{2\pi} \rho \int_0^{\infty} \frac{\delta A}{r-r'} \cdot d\tau'. \quad (26)$$

4. Рассмотрим процесс регистрации рассеянного света в точке  $\vec{R}$  детектора. Предположим, что используется одна из возможных схем голографии с опорным источником<sup>/7/</sup>. Тогда полное поле в точке  $\vec{R}$  детектора есть

$$\vec{B}(\vec{R}, t) \approx \vec{B}^{\text{опор}}(\vec{R}, t) + \vec{B}^{(s)}(\vec{R}, t), \quad (27)$$

где

$$\vec{B}^{\text{опор}}(\vec{R}, t) \approx \left( \frac{\vec{E}_0 \times \vec{R}}{R^2} \right) \cdot \cos[\vec{k} \cdot \vec{R} - \omega_0 t].$$

Средняя мощность, достигающая детектора, определяется вектором Умова-Пойнтинга:

$$\vec{P}(\vec{R}, t) d\vec{S} = \frac{c}{4\pi} |\vec{B}(\vec{R}, t)|^2 R^2 d\Omega. \quad (28)$$

Физический интерес представляет детектируемый спектр, который есть Фурье-преобразование автокорреляционной функции переменной поля:

$$I(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \frac{c}{4\pi} \langle \{\vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t+\tau)\} \rangle, \quad (29)$$

где символ  $\langle \rangle$  определяет усреднение по времени или ансамблю  $N$  рассеивателей.

Вводя  $\sigma_T = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2 \beta$  — томсоновское сечение рассеяния,  $\Gamma_0 = \frac{c}{4\pi} E_0^2$  — интенсивность падающей волны и  $N$  — число рассеивателей, запишем (29) в виде:

$$I(\vec{k}, \omega) d\omega d\Omega = NI_0 \cdot \sigma(\vec{k}, \omega) d\Omega \cdot d\omega,$$

где

$$\sigma(\vec{k}, \omega) = \sigma_T \cdot F(\vec{k}, \omega) \quad (30)$$

и  $F(\vec{k}, \omega)$  определяет суммарный спектр опорной волны, рассеянной и интерференционного члена

$$F(\vec{k}, \omega) = aF^{\text{опор}}(\vec{k}, \omega) + F^{(s)}(\vec{k}, \omega) + bF^{\text{инт}}(\vec{k}, \omega). \quad (31)$$

$$a = \frac{1}{\sigma_T N}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{\sigma_T}}$$

Рассмотрим каждый член суммы (31).

А. Спектр точечного опорного источника

$$F(\vec{k}, \omega) \cong \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \cos [\vec{k} \vec{r}(t) - \omega_0(t)] \times$$

$$\times \cos [\vec{k} \vec{r}(t+\tau) - \omega_0(t+\tau)] \quad (32)$$

$$\cong \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \cos [\vec{k} \{ \vec{r}(t) - \vec{r}(t+\tau) - \omega_0 t \}].$$

Поскольку положение опорного источника стационарно во времени, то  $\vec{r}(t) = \vec{r}(t+\tau)$  и

$$F(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i(\omega - \omega_0)\tau} = \delta(\omega - \omega_0). \quad (33)$$

Б. Спектр интерференционного члена:

$$\begin{aligned} F(\vec{k}, \omega) &\cong \frac{1}{2\pi N} \cdot 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \sum_{j=1}^N \cos[\vec{k} \vec{r}_j(t) - \omega_0(t)] \times \\ &\quad \times \cos\{\vec{k} \vec{r}_j(t+\tau) - \omega_0(t+\tau)\} \\ &= \frac{2}{N} \delta(\omega - (\omega_0 - k v_e)) \sum_{j=1}^N \cos\left[n_0 k_0 \frac{R}{R} \vec{r}_j - (n_0 + \delta_0) k_0 \frac{R}{R} \vec{r}_j\right] \end{aligned} \quad (34)$$

Если  $\vec{S}$  - радиус-вектор точки детектирования  $\vec{R}$  в плоскости голограммы, то, заменяя сумму по  $j$  на интеграл по конфигурационному пространству, получим

$$\begin{aligned} F(\vec{k}, \omega) &= \frac{2}{N} \left\{ \sum_j \cos\left[-\delta n \cdot k_0 \frac{r^S}{R} \cos\theta\right] \right\} \delta(\omega - (\omega_0 - k v_e)) \\ &\cong \delta(\omega - (\omega_0 - k v_e)) \cdot \frac{2}{N} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-i \frac{k r^S \cos\theta}{R}} r dr d\theta. \end{aligned} \quad (35)$$

Окончательно получаем

$$F(\vec{k}, \omega) \approx 2 \frac{Ra}{\delta n k_0 s} \delta(\omega - (\omega_0 - kv_e)) J_1\left(\frac{\delta n k_0 a s}{R}\right); \quad (37)$$

где  $a$  - эффективный размер области рассеяния,

$J_1(x)$  - бesselова функция /8/. Из свойств бesselовых функций имеем, что сдвиг интерференционных полос определяемый, как величина  $\rho = s^{-1}$

$$\begin{aligned} \rho &\approx \frac{\delta n k_0 a}{3.83 R} \approx \frac{\frac{N e^2}{m \omega_0^2} \cdot k_0 a}{3.83 R} = \frac{A \lambda \cdot a N}{3.83 R} \\ &\approx 1 \cdot 10^{-13} \left(1 - \frac{kv_e}{\omega_0}\right) \frac{N \lambda a}{R}, \end{aligned} \quad (38)$$

где  $R$  - расстояние от опорного источника до плоскости голограммы,  $N$  - плотность рассеивателей,  $\lambda$  - длина волны,  $A$  - численный коэффициент.

Выражение (38) позволяет по числу интерференционных полос на голограмме при известных  $a$ ,  $R$  и  $\lambda$  определять давление газа.

### В. Спектр рассеянного поля

$$\begin{aligned} F^{(*)}(\vec{k}, \omega) &= \frac{1}{2\pi N} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \sum_{j,e}^N \cos[\vec{k} \vec{v}_j(t) - \omega_0(t)] \\ &\times \cos[\vec{k} \vec{v}_e(t+\tau) - \omega_0(t+\tau)]. \end{aligned} \quad (39)$$

Член с суммой по  $j = \ell$  будет определять частотный сдвиг, обусловленный движением рассеивателей, и член  $j \neq \ell$  будет зависеть от пространственного Фурье-преобразования флуктуации плотности рассеивателей. Поскольку  $\vec{r}_j$  является стационарным за интервал времени, сравнимый с оптическим периодом  $10^{-15}$  сек, то

$$F(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi N} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \sum_{j,\ell} \cos \{ \vec{k} \cdot [\vec{r}_j(t) - \vec{r}_\ell(t+\tau)] - \omega_0\tau \}. \quad (40)$$

Рассмотрим член суммы с  $j = \ell$ , тогда спектр будет определяться фурье-преобразованием автокорреляционной функции с учетом движения. Если уравнение движения

$$\vec{r}_j = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$

, тогда

$$F(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i(\omega - (\omega_0 + \vec{k}\vec{v}_e))\tau} d\tau \quad (41)$$

$$= \delta(\omega - (\omega_0 + \vec{k}\vec{v}_e)).$$

Для известного распределения скоростей спектр будет повторять это распределение, однако будет центрирован около частоты  $\omega_0$  [9].

Член суммы с  $j \neq \ell$  сводится с учетом того, что плотность

$$n(\vec{r}, t) = \sum_{j=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_j(t))$$

и

$$n(\vec{k}, t) = \sum_j \exp \{ i\vec{k}\vec{r}_j(t) \} \quad (42)$$

к

$$F(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi N} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega_0)t} n(\vec{k}, t) n^*(\vec{k}, t+\tau),$$

который легко сводится к флуктуации  $\delta n(\vec{k}, t)$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. R.J.Glauber. Phys.Rev. 131, 2766, 1963.
2. R.J. Glauber. Phys.Rev.Letters, 10, 83, 1963.
3. E. Wolf. Proc. Phys. Soc., 80, 1269, 1969.
4. N.A. Торопков. Preprint JINR, P-5401, 1970.
5. В.Гайтлер. Квантовая теория излучения. ИИЛ.Москва, 1956.
6. G.G, Nussenzweig. J. Math. Phys., 8, 561, 1967.
7. Дж.Струок. Введение в когерентную оптику и голографию. МИР. Москва, 1967.
8. А.Н.Карамзина и Э.Л.Чистова. Таблицы функций Бесселя от мнимого аргумента и интегралов от них. Изд-во АН СССР, Москва, 1958.
9. Н.А.Торопков. Препринт ОИЯИ, P4-6083, Дубна, 1971.  
J.P.Doucherty and D.T.Farley. Proc.Roy.Soc. A259, 79, 1960.  
M.N.Rosenbluth and N.Rostoker. Phys.Fluids. 5, 776, 1962.
10. А.Н.Зайдель и др. ЖЭТФ, 38, 1406, 1968.  
Г.В.Островская и др. ЖЭТФ, 40, 1067, 1970; 41, 1072, 1970; 40, 660, 1970.  
Абрикосова Н.Н. и Скрышник И.С. ЖЭТФ, 59, 59, 1970.
11. Niland R.A. Phys. Letters A32, 280, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел  
12 октября 1971 года.