СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р4 - 6083

Н.А.Торопков

ЧАСТОТНЫЙ СПЕКТР СВЕТА, РАССЕЯННОГО ЭЛЕКТРОНАМИ В ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОМ РАВНОВЕСИИ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

1971

P4 - 6083

Н.А.Торопков

ЧАСТОТНЫЙ СПЕКТР СВЕТА, РАССЕЯННОГО ЭЛЕКТРОНАМИ В ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОМ РАВНОВЕСИИ

Торопков Н.А. P4-6083

Частотный спектр света, рассеянного электронами в термодинамическом равновесии

В предположении, что электроны в облаке находятся в термодинамическом равновесии с максвелловским распределением скоростей, получен частотный спектр рассеянного света. Спектр центрирован около частоты падающей волны со смещением, обусловленным эффектом Допплера.

Сообщения Объединенного института ядерных исследований

Дубна, 1971

Toropkov N.A. P4-6083

Frequency Spectrum of the Light Scattered by Electrons in Thermodynamical Equilibrium

Under the assumption, that the electrons in the cloud are in the thermodynamical equilibrium with the Maxwellian velocity distribution, the frequency spectrum of scattered light was obtained. The spectrum is centered near the frequency of the incident wave with the drift, which is due to the Doppler effect.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.

Dubna, 1971

Теория рассеяния электромагнитных волн в плазме и электронным облаком была развита в ряде работ[4-6]. Однако экспериментальная регистрация спектра рассеянных волн без использования интерференционно-голографических методов затруднительна. В работах[7] разработана методика и проведено систематическое исследование лазерной искры с использованием для диагностики плазмы двухдлинноволновой голографии.

В данной работе в предположении, что электроны в облаке находятся в термодинамическом равновесии с максвелловским распределением скоростей, рассмотрена задача о зависимости фурье-преобразования нормированной автокорреляционной функции от спектра рассеянного света и получены соотношения для фазы и модуля автокорреляционной функции.

Если монохроматическая световая плоская волна $\vec{E}_0 e^{i\omega_0 t}$ рассеивается облаком электронов, находящимся в термодинамическом равновесии, то в точке детектора $\vec{R}$ рассеянное магнитное поле с учетом запаздывания есть

$$\vec{B}(\vec{R}, t) \sim -\frac{e^2}{mc^2}\left(\frac{\vec{E}_0 \times \vec{R}}{R^2}\right) \cos\left[\vec{k}\vec{r}_j\left(t - \frac{R}{c}\right) - \omega_0\left(t - \frac{R}{c}\right)\right]. \quad (1)$$

Детектором регистрируется мощность излучения, определяемая вектором Умова- Пойнтинга:

$$\vec{P}(\vec{R}, t)\,\vec{ds} = \frac{c}{4\pi} \left|\vec{B}(\vec{R}, t)\right|^2 R^2 \, d\Omega . \quad (2)$$

Найдем спектр рассеянного излучения, воспользовавшись теоремой Винера-Хинчина:

$$I(\vec{k},\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{i\omega\tau} \langle \vec{B}(\vec{R},t)\, \vec{B}(\vec{R}_j\ t+\tau)\rangle , \tag{3}$$

где $\vec{r}_j$ – радиус-вектор положения рассеивающего электрона, $\vec{k}$ – волновой вектор рассеянной волны, $\tau = t_1 - t_2$ учитывает запаздывание, символ $<\quad>$ использован для обозначения усреднения во времени или по ансамблю электронов в облаке, которые в макрослучае эквивалентны. Используя (1)-(3), получим

$$I(\vec{k},\omega) = A\,\frac{1}{2\pi N}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{i\omega\tau} \sum_{j,e}^{N} \cos[\vec{k}\vec{r}_e(t) - \omega_0 t]\cos[\vec{k}\vec{r}_j(t+\tau) - \omega_0(t+\tau)] \tag{4}$$

$$A = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{e^2}{mc}\right)^2 \left|\frac{\vec{E}_0\times\vec{R}}{R^2}\right|^2 .$$

Если $I_0 = \frac{c}{4\pi} E_0^2$ – интенсивность падающей волны, $\sigma_T = (\frac{e^2}{mc^2})^2 \sin^2\beta$ – томсоновское сечение рассеяния /1/ электромагнитных волн свободным электроном, β – угол между $\vec{E}_0$ и $\vec{R}$ и $\sin^2\beta$ зависит от поляризации падающего излучения , то

$$I(\vec{k},\omega)\, d\Omega\, d\omega = N I_0 \sigma_T F(\vec{k}\omega)\, d\Omega\, d\omega . \tag{5}$$

Воспользовавшись тем, что $\vec{r}_j$ является стационарным за интервал времени, сравнимый с оптическим периодом ~ 10^{-15}сек, получим, что

$$F(\vec{k},\omega) = \frac{1}{2\pi N}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{i\omega\tau} \sum_{j,e}^{N} \cos \vec{k}\,[\vec{r}_e(t) - \vec{r}_j(t+\tau) - \omega_0\tau] . \tag{6}$$

Отметим, что вклад в $F(\vec{k},\omega)$ члена $j \neq e$ при малых плотностях незначителен.

Допустим, что движение отдельных электронов можно описать как

$$\vec{r}_j(t) = \vec{r}_{0j} + \vec{u}_0 t , \tag{7}$$

где начальные скорости распределены согласно распределению Максвелла

$$f(u) = \frac{1}{\pi^{1/2}\,\bar{u}} \exp\left\{-\left(\frac{u-\bar{u}}{\bar{u}}\right)^2\right\} . \tag{8}$$

Подставляя (7) в выражение (5) и рассматривая вклад с $j = e$, получим, что спектр $F(\vec{k}, \omega)$:

$$F(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi N} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \; e^{i\omega\tau} \sum_{1}^{N} \cos[\vec{k}\vec{u}_0 \tau + \omega_0 \tau] =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \delta[\omega - (\vec{k}\vec{u}_0 + \omega_0)] \qquad (9)$$

равен временному фурье-преобразованию автокорреляционной функции [2].

Используя теорему об аналитичности сигнала, получим для корреляционной функции, измеряемой на опыте,

$$\Gamma(\tau) = \langle E_2^*(t) \; E_1(t+\tau) \rangle$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \exp[i\{\omega_1(t+\tau) - \omega_2 t\}] \langle \tilde{E}_2(\omega_2) \tilde{E}_1(\omega_1) \rangle \, d\omega_1 d\omega_2 = \qquad (10)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\{-i[\omega_1 \tau + (\omega_1 - \omega_2)t]\} \langle \tilde{E}_2(\omega_2) \tilde{E}_1(\omega_1) \rangle \, d\omega_1 \, d\omega_2 .$$

Условие стационарности за интервал времени, сравнимый с периодом оптических колебаний, требует, чтобы

$$\langle \tilde{E}_2(\omega_2) \tilde{E}_1(\omega_1) \rangle = \delta(\omega_1 - \omega_2) \tilde{\Gamma}_{12}(\omega_1) , \qquad (11)$$

где $\delta(\omega)$ – дельта-функция Дирака. Как следствие получим

$$\Gamma_{12}(\tau) = \int_0^\infty e^{-i\omega\tau} \tilde{\Gamma}_{12}(\omega) \, d\omega , \qquad (12)$$

которая является аналитическим сигналом

$$\tilde{\Gamma}_{12}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{i\omega\tau} \, \Gamma_{12}(\tau) \, d\tau . \qquad (13)$$

В интерференционных измерениях определяется степень когерентности $|\gamma_{12}(\tau)|$. Однако представляющая физический интерес функция спектрального распределения $\tilde{\Gamma}_{12}(\omega)$ относится к фурье-преобразованию $\gamma_{12}(\tau)$, а не к $|\gamma_{12}(\tau)|$. $\Gamma_{12}(\tau) = \gamma_{12}(\tau)\ \Gamma(0)$.

Определим, согласно Нуссенцвейгу/3/, в общем случае $\gamma_{12}(\tau)$ как

$$\gamma_{12}(\tau) = \exp(i\phi_{12}(\tau))\ |\gamma_{12}(\tau)| . \tag{14}$$

Из нормированной функции взаимной когерентности следует, что $\gamma_{12}(\tau)$ является аналитичным сигналом, свойства которого можно использовать для определения фазовой функции $\phi_{12}(\tau)$. Если допустить, что $\gamma_{12}(\tau)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости в общем случае комплексной плоскости τ, тогда

$$\ln \gamma_{12}(\tau) = \ln |\gamma_{12}(\tau)| + i\phi_{12}(\tau) \tag{15}$$

остается аналитическим сигналом. Отсюда, используя преобразования Гильберта, можно найти $\phi_{12}(\tau)$:

$$\phi_{12}(\tau) = \frac{1}{\pi}\, P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|\gamma_{12}(\tau')|}{\tau - \tau'}\, d\tau' . \tag{16}$$

Поскольку распределение скоростей электронов, находящихся в термодинамическом равновесии, удовлетворяет распределению Максвелла (8), то для нахождения вида рассеянного спектра заменим сумму в выражении (9) на интеграл по конфигурационному пространству скоростей для компоненты скорости вдоль $\vec{k}$. Тогда

$$F(\vec{k},\omega) = \frac{1}{\pi^{1/2}\, k\bar{u}} \exp\left\{ -\left(\frac{\omega-\omega_0}{k\bar{u}}\right)^2 \right\} , \tag{17}$$

где средняя скорость распределения Максвелла

$$\bar{u} = \left(\frac{2k\,T_e}{m}\right)^{1/2} , \tag{18}$$

T_e – температура электронов в облаке, K – постоянная Больцмана, m – масса электрона.

Из выражения (17) видно, что спектр рассеянного излучения центрирован около ω_0 – частоты падающей волны, смещенной с учетом сдвига частоты, обусловленного эффектом Допплера.

Используя (3), (10), (11), (12), как следствие получим, что измеряемая из интерферограммы функция $|\gamma(\omega)|$ есть

$$|\gamma(\omega)| = \frac{1}{\Gamma(0)} \frac{1}{\pi^{1/2} k\bar{u}} e^{-\left(\frac{\omega-\omega_0}{k\bar{u}}\right)^2} . \qquad (19)$$

Фаза определяется из формулы (16)

$$\phi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \left[-\frac{\omega-\omega_0}{(k\bar{u})^2} - \frac{\ln\left[\Gamma(0)\pi^{1/2} k\bar{u}\right]}{\omega-\omega'} \right], \qquad (20)$$

где $\vec{k}$ – волновой вектор рассеянной волны и пределы интегрирования по ω, дающие вклад в интерференцию, ограничены шириной линии излучения $\Delta\omega$, $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega$, $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega'$.

Автор благодарен Г.И. Макаренко и А.Ф. Писареву за замечания.

Л и т е р а т у р а

1. А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. М., "Наука", 1968 г.
2. Л. Шварц. Математические методы для физических наук. Мир, Москва, 1965 г.
3. G. Nussenzweig. J.Math.Phys., 8, 561, 1967.
4. J.P. Doucherty and D.T. Farley. Proc.Roy.Soc., A259, 79, 1960.
5. E.E. Salpeter. Phys.Rev., 120, 1528, 1960.
6. В.Л. Гинзбург. Распространение электромагнитных волн в плазме. Наука. Москва, 1967.
7. А.Н. Зайдель и др. ЖТФ 38, 1406, 1968.
   I.I. Komissarova et al. Int.Conference on Phenimena in Ionized Gases. 9-th. Bucharest, Romania, 1969.
   Г.В. Островская и др. 40, 1072, 19705; 40, 660, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 октября 1971 года.