ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4 - 6047

Д.Н. Зубарев, С.В. Тищенко

НЕЛОКАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ С ПАМЯТЬЮ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1971

Р4 - 6047

Д.Н. Зубарев, С.В. Тищенко [1]

НЕЛОКАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ С ПАМЯТЬЮ

Направлено в Physica

[1] Математический институт им. В.А. Стеклова АН СССР, Москва.

Зубарев Д.Н., Тищенко С.В. P4-6047

Нелокальные уравнения гидродинамики с памятью

На основании динамического обобщения приближения Орнштейна-Цернике получены интегродифференциальные уравнения нелокальной гидродинамики с памятью. Рассмотрен случай, когда эти уравнения можно свести к дифференциальным уравнениям более высокого порядка, чем в случае обычной гидродинамики, с дополнительными параметрами длины и времени корреляции. Аназируется также случай дальних и долгоживущих корреляций, когда уравнения переноса не сводятся к дифференциальным уравнениям.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1971

Zubarev D.N., Tishchenko S.V. P4-6047

Nonlocal Hydrodynamics with Memory

Integrodifferential equations of nonlocal hydrodynamics with memory effects based on the dynamical generalization of Ornstein-Zernike theory are obtained. The case of the reduction of these equations to the differential ones, which are of higher order than in the case of ordinary hydrodynamics and involve the correlation length and time as parameters, is considered. Likewise, the occasion of long-ranged and long-lived correlations is analysed, while the transport equations do not reduce to differential equations.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1971

1. Введение

Неравновесная статистическая термодинамика приводит к интегральным соотношениям между термодинамическими силами и потоками, т.е. к нелокальным и запаздывающим уравнениям переноса /1-5/. Ядра этих линейных интегральных соотношений (ядра переноса) зависят от разности координат и разности времен, или, в Фурье-представлении, от волнового вектора и частоты. Выражения для интегральных ядер переноса через пространственно-временные корреляционные функции очень сложны, и для случая жидкости их пока не удается вычислить исходя из первых принципов. Однако сами интегральные соотношения переноса могут служить основой для построения гидродинамических моделей.

Обычная гидродинамика исходит из предположения, что все параметры, характеризующие квазиравновесное состояние среды (температура, плотность, массовая скорость) мало меняются на длинах и временах корреляций, на которых ядра переноса существенно отличны от нуля (например, для газа - на длинах порядка длины свободного пробега и на временах порядка времени свободного пробега). При этом можно пренебречь эффектами нелокальности и запаздывания.

Однако пренебрежение нелокальностью и запаздыванием иногда не допустимо. Таков, например, случай разреженного газа, когда изменение характерных параметров на длине свободного пробега становится значительным [6]. Другим таким примером, когда явления переноса носят существенно нелокальный характер, является аномальный скин-эффект (уравнение Чемберса) [7-9]. Аналогичная ситуация имеет место также вблизи критических точек, когда масштабы корреляций аномально возрастают, и описание процессов переноса с помощью обычной гидродинамики становится непригодным [10-11].

Эффекты нелокальности и памяти можно было бы учесть, разлагая ядра переноса в ряд по малости волнового вектора и частоты, однако это дает плохое приближение, так как при разложении теряются полюса корреляционных функций. Гораздо лучшие результаты дает разложение не самих корреляционных функций, а функций им обратных (в Фурье-представлении). Такой прием используется в теории возмущений для функций Грина [12]. Непосредственное разложение последних по степеням малого параметра приводит к потере полюсов, так как эквивалентно разложению в ряд по полюсам. Поэтому степенной ряд строится не для самой функции Грина, а для обратной ее функции – массового оператора.

Подобная процедура лежит в основе приближения Орнштейна-Цернике для флуктуаций плотности [4,13], учитывающего дальние пространственные корреляции.

Целью настоящей статьи является построение аналогичного приближения для временных корреляционных функций, которое учитывало бы также и эффекты памяти [14].

В следующем разделе приводится вывод интегральных соотношений переноса в форме, удобной для дальнейшего. Раздел 3 посвящен построению асимптотического разложения для ядер переноса в Фурье-представлении. В разделе 4 ядра переноса выражаются в виде явных функций от координат и времени и рассматриваются интегро-дифференциальные соотношения переноса в двух предельных случаях: малых и больших масштабов корреляции. Для первого случая в разделе 5 интегродифференциальные уравнения сводятся к дифференциальным путем незначительной модификации использованного в разделе 3 разложения. Статья заканчивается кратким обсуждением полученных уравнений и областей их приложения.

2. Уравнения переноса для простой однокомпонентной жидкости

Пусть неравновесное состояние однокомпонентной системы бесструктурных частиц определяется средними значениями операторов плотностей энергии $P_0(\vec{x}) = H(\vec{x})$, импульса $P_1(\vec{x}) = \vec{p}(\vec{x})$ и числа частиц $P_2(\vec{x}) = n(\vec{x})$. Такому состоянию соответствует локальноравновесный статистической оператор $\rho_\ell(t)$, который реализует экстремум информационной энтропии $S(t) = -Tr\ \{\rho(t)\ell n\ \rho(t)\}$ при заданных $Tr\ \{\rho(t)\ P_m(\vec{x})\}$, $m = 0,1,2$: :

$$\rho_\ell(t) = \exp\{-S(t,0)\}\ . \tag{2.1}$$

$$S(t,0) = \Phi(t) + \sum_{m=0}^{2} \int d\vec{x}\, F_m(\vec{x},t)\, P_m(\vec{x})\ , \tag{2.1a}$$

$$\Phi(t) = \ell n\ Tr\ \exp\{-\sum_{m=0}^{2} \int d\vec{x}\ F_m(\vec{x},t)\ P_m(\vec{x})\}\ , \tag{2.1б}$$

где $F_m(x,t)$ - параметры, сопряженные к $<P_m(\vec{x})>_\ell^t \equiv Tr\ \{P_m(\vec{x})\rho_\ell(t)\}$ в силу тождеств

$$<P_m(\vec{x})>_\ell^t = -\delta\ \Phi(t)\ /\ \delta F_m(\vec{x},t)\ . \tag{2.1c}$$

Поэтому $F_m(\vec{x},t)$ можно отождествить с локальными термодинамическими величинами:

$$F_0(\vec{x},t) = 1/T(\vec{x},t)\ ; \quad F_1(\vec{x},t) = -\vec{v}(\vec{x},t)/T(\vec{x},t)\ ;$$

$$F_2(\vec{x},t) = -\nu(\vec{x},t) + mv^2(\vec{x},t)/2T(\vec{x},t)\ ,$$

где $T(\vec{x},t)$ – локальная температура, $v(\vec{x},t)$ – массовая скорость, $\nu(\vec{x},t) = \mu(\vec{x},t)/T(\vec{x},t)$, $\mu(\vec{x},t)$ – локальный химический потенциал, m – масса частицы. Локальноравновесный статистический оператор (2.1) дает нам термодинамику жидкости в каждый момент времени t, но не описывает эволюцию системы во времени, поскольку не является решением уравнения Лиувилля. Решение последнего, согласующееся с принципом возрастания энтропии, имеет вид /3,4,15/:

$$\rho(t) = \exp\left\{ -S(t,0) + \int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{\epsilon t'}\, \dot{S}(t+t',t') \right\}\ , \tag{2.2}$$

$$\dot{S}(t+t',t') = \sum_{m=0}^{2} \int d\vec{x}\, \Big\{ \dot{P}_m(\vec{x},t')\, F_m(\vec{x},t+t') + \tag{2.2a}$$

$$+ \left(P_m(\vec{x},t') - \langle P_m(\vec{x},t)\rangle^t\right) \frac{\partial F_m(\vec{x},t+t')}{\partial t} \Big\}\ ,$$

где $\dot{P}_m(\vec{x}) = (ih)^{-1}[P_m(\vec{x}), \mathcal{H}]$, $\mathcal{H}$ – оператор Гамильтона системы; аргумент t' операторов динамических переменных обозначает гейзенберговскую зависимость от времени, $\langle\ldots\rangle^t \equiv Tr\{\ldots\rho(t)\}$; $\epsilon\to+0$ после вычисления средних в статистическом пределе $V\to\infty$, $N\to\infty$, $\frac{N}{V} = const$, V – объем жидкости, N – полное число частиц в этом объеме.

Неравновесные значения термодинамических параметров $F_m(x,t)$ определяются из условий

$$\langle P_m(\vec{x})\rangle^t = \langle P_m(\vec{x})\rangle_{\ell}^t\ , \tag{2.3}$$

обеспечивающих выполнение термодинамических соотношений (2.1с) для неравновесного ансамбля (2.2).

В дальнейшем будем рассматривать эволюцию жидкости из слабонеравновесного состояния к полному равновесию, которое характеризуется равновесными значениями параметров $F_m(\vec{x},t)$:

$$\overset{0}{F}_0 = 1/T_0 \; ; \quad \overset{0}{F}_1 = -\vec{v}_0/T_0 = 0 \; ; \quad \overset{0}{F}_2 = -\nu_0 = -\mu_0/T_0 \; .$$

Исключим производные по времени от $F_m(\vec{x},t)$ из (2.2а) с помощью линеаризованных уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -h_0 \, \nabla \vec{v}(\vec{x},t) \; , \tag{2.4а}$$

$$\frac{\partial \vec{v}(\vec{x},t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p(\vec{x},t) \; , \tag{2.4б}$$

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \vec{v}(\vec{x},t) \; , \tag{2.4с}$$

где $u(\vec{x},t) \equiv \langle H(\vec{x}) \rangle_\ell^t$ – плотность внутренней энергии, $p(\vec{x},t)$ – давление, $h(\vec{x},t) = u(\vec{x},t) + p(\vec{x},t)$ – плотность энтальпии, $\rho(\vec{x},t) = m \langle n(\vec{x}) \rangle_\ell^t$. Индексом "0" обозначаются равновесные значения термодинамических величин. Чтобы в уравнениях (2.4) перейти к переменным $T(\vec{x},t)$, $\nu(\vec{x},t)$, предположим, что $u(\vec{x},t)$, $\rho(\vec{x},t)$, $p(\vec{x},t)$ в каждой точке $\vec{x}$ являются такими же функциями от $T(\vec{x})$, $\nu(\vec{x})$, как их равновесные значения от T_0, ν_0 x/. В частности:

$$\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)_\rho \delta u + \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_u \delta\rho \; , \tag{2.5}$$

---

x/ Это предположение несправедливо, например, вблизи критической точки /10/. В общем случае u, ρ и p являются нелокальными функционалами от $T(\vec{x},t)$ и $\nu(\vec{x},t)$ /5/. В настоящей работе мы этой нелокальностью пренебрегаем.

$$\delta\nu = \left(\frac{\partial\nu}{\partial u}\right)_\rho \delta u + \left(\frac{\partial\nu}{\partial\rho}\right)_u \delta\rho ,$$

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\nu \delta\nu + \left(\frac{\partial p}{\partial\nu}\right)_T \delta\nu ,$$

причем,

$$\left(\frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{T}\right)_u = -\frac{1}{m}\left(\frac{\partial\nu}{\partial u}\right)_\rho ; \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\nu = -\frac{h_0}{T_0} ; \left(\frac{\partial p}{\partial\nu}\right)_T = \frac{T_0\rho}{m} . \quad (2.5a)$$

Используя эти соотношения, получим из (2.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(\vec{x},t)}{\partial t} &= -T_0\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_\rho \nabla\vec{v}(\vec{x},t) , \\ \frac{\partial\nu(\vec{x},t)}{\partial t} &= -\frac{m}{T_0}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_u \nabla\vec{v}(\vec{x},t) , \\ \frac{\partial\vec{v}(\vec{x},t)}{\partial t} &= -\frac{h_0}{\rho_0 T_0}\nabla T(\vec{x},t) - \frac{T_0}{m}\nabla\nu(\vec{x},t) . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.2а) и используя тот факт, что $\int d\vec{x}\, P_m(\vec{x})$ – интегралы движения и что $\langle\vec{p}(\vec{x})\rangle^t_\ell = \rho(\vec{x},t)\,\vec{v}(\vec{x},t)$, получим в линейном по $\delta F_m(\vec{x},t) = F_m(\vec{x},t) - \overset{0}{F}_m$ приближении:

$$\begin{aligned} \dot{S}(t+t',t') = \int d\vec{x}\,\{ &-\dot{H}(x,t')\,\delta T(\vec{x},t+t')/T_0^2 - \\ &-\dot{\vec{p}}(\vec{x},t')\,\vec{v}(\vec{x},t+t')/T_0 + (H(\vec{x},t')-u_0)\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)\nabla\vec{v}(\vec{x},t+t')/T_0 + \\ &+(mn(\vec{x},t')-\rho_0)\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_u\nabla\vec{v}(\vec{x},t+t')/T_0 + \\ &+\vec{p}(\vec{x},t')\,\nabla\delta T(\vec{x},t+t')\,h_0/\rho_0 T_0^2\} , \end{aligned}$$

где члены с $\delta\nu$ взаимно сокращаются в силу закона сохранения числа частиц $\dot{n}(\vec{x}) = -\nabla\vec{p}(\vec{x})/m$. Теперь, выполняя интегрирование по частям в группе членов, содержащих оператор " ∇ ", и опуская поверхностные члены ($\delta F_m(\vec{x}, t) = 0$ на границе с термостатом), получим окончательно:

$$\dot{S}(t+t', t') = \sum_{m=0,1} \int d\vec{x}\; J_m(\vec{x}, t')\; \delta F_m(\vec{x}, t+t'), \tag{2.2´a}$$

где

$$J_0(x) = \dot{H}(\vec{x}) + \frac{h_0}{\rho_0}\nabla\vec{p}(\vec{x}) = \dot{H}(\vec{x}) - \frac{h_0}{\rho}m\dot{n}(\vec{x}),$$

$$J_1(x) = \dot{\vec{p}}(\vec{x}) + \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_\rho \nabla\,(H(\vec{x}) - u_0) + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_u \nabla\,(mn(\vec{x}) - \rho_0).$$

Подставляя (2.2 а) в (2.2) и разлагая экспоненту (2.2) по $\delta F_m(\vec{x}, t)$, получим в линейном приближении:

$$\rho(t) = \rho_\ell(t) + \int_{-\infty}^{0} dt'\, e^{\epsilon t'} \int_0^1 d\tau\; \rho_0^\tau\, \dot{S}(t+t', t')\, \rho_0^{-\tau}\; \rho_0, \tag{2.2´}$$

$$\rho_\ell(t) = \{1 - \int_0^1 d\tau\; \rho_0^\tau\; \delta S(t, 0)\; \rho_0^{-\tau}\}\, \rho_0, \tag{2.1´´}$$

где

$$\rho_0 = \exp\left\{-\frac{\mathcal{H} - \mu_0\mathcal{N}}{T_0}\right\} / Tr\,\exp\left\{-\frac{\mathcal{H} - \mu_0\mathcal{N}}{T_0}\right\};\quad \mathcal{N} = \int d\vec{x}\, n(\vec{x})$$

– оператор полного числа частиц; $\delta S(t, 0) =$

$$= \sum_m \int d\vec{x}\, (P_m(\vec{x}) - \langle P_m(\vec{x})\rangle)\, \delta F_m(\vec{x}, t);\quad \langle\ldots\rangle \equiv Tr\{\ldots\rho_0\}.$$

Усредняя операторы $J_m(\vec{x})$ по ансамблю (2.2´) с учетом (2.3) и уравнения Лиувилля, получим уравнения переноса:

$$\frac{\partial\langle P_m(\vec{x})\rangle_\ell^t}{\partial t} - \langle\dot{P}_m(\vec{x})\rangle_\ell^t =$$

$$= \sum_{n=0,1} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int d\vec{x}'\; \mathfrak{L}_{mn}(\vec{x} - \vec{x}', t - t')\, \delta F_m(\vec{x}', t'). \tag{2.7}$$

Ядра переноса $\mathfrak{L}_{mn}(\vec{x},t)$ выражаются через релаксационные функции

$$(J_m(\vec{x},t),\ J_n(\vec{x}',t')) \equiv \int_0^1 d\tau < J_m(\vec{x},t)\ \{ \rho_0^{\tau} J_n(\vec{x}',t')\rho_0^{-\tau} - < J_n(\vec{x}') > \} >, \qquad (2.8а)$$

при помощи формул

$$\mathfrak{L}_{mn}(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = \theta(t-t')\, e^{-\epsilon(t-t')} (J_m(\vec{x},t), J_n(\vec{x}',t')), \qquad (2.8б)$$

где

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t > 0. \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Как и всюду в этой статье, $\epsilon \to +0$ после выполнения статистического предельного перехода в средних (2.8а).

Рассмотрим пространственно-временные преобразования Фурье уравнений (2.7)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t} \left\{ \frac{\partial < P_m(\vec{k}) >_{\ell}^{t}}{\partial t} - < \dot{P}_m(\vec{k}) >_{\ell}^{t} \right\} = \qquad (2.7')$$

$$= \sum_{n=0,1} \mathfrak{L}_{mn}(\vec{k},\omega)\, F_n(\vec{k},\omega),$$

где

$$\mathfrak{L}_{mn}(\vec{k},\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d\vec{x}\, e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{x}}\ \mathfrak{L}_{mn}(\vec{x},t), \qquad (2.7'а)$$

$$P_m(\vec{k}) = \int d\vec{x}\, e^{-i\vec{k}\vec{x}} (P_m(\vec{x}) - < P_m(\vec{x}) >) \quad \text{и т.д.} \qquad (2.7'б)$$

В силу пространственной изотропии интегральные ядра $\mathfrak{L}_{mn}(\vec{k},\omega)$ можно представить в виде:

$$\mathfrak{L}_{00}(\vec{k},\omega) = k^2 L_{00}(\vec{k},\omega),$$

$$\mathfrak{L}_{01}^{a}(\vec{k},\omega) = i k_a L_{01}(\vec{k},\omega), \quad \mathfrak{L}_{10}^{a}(\vec{k},\omega) = i k_a L_{10}(\vec{k},\omega), \qquad (2.9)$$

$$\mathfrak{L}_{11}^{a\beta}(\vec{k},\omega) = k_a k_\beta L_{11}(\vec{k},\omega) + (\delta_{a\beta} k^2 - k_a k_\beta) L_{22}(\vec{k},\omega),$$

где $L_{nn}(\vec{k}, \omega)$ – скалярные функции, зависящие только от величины волнового вектора $\vec{k}$, но не от его направления.

Теперь идентифицируем выражения, входящие в уравнения (2.7′), (2.7), сравнивая их с уравнениями гидродинамики, обобщением которых они являются. Поскольку интегральные члены в (2.7) ответственны за диссипативные процессы, а левые части этих уравнений соответствуют обратимым движениям, то естественно потребовать, чтобы при $\mathfrak{L}_{mn}(\vec{k},\omega)\equiv 0$ временные компоненты (2.7′) в длинноволновом пределе совпадали с $\vec{k}$ – представлением уравнений Эйлера (2.4). Тогда для малых $\vec{k}$

$$\begin{aligned} &< \dot{H}(\vec{k}) >'_{\ell} = -i\vec{k}\; h_0 \vec{v}(\vec{k},t)\;; \\ &< \dot{\vec{p}}(\vec{k}) >'_{\ell} = -i\vec{k}\; p(\vec{k},t)\;, \end{aligned} \tag{2.10}$$

или, в $\vec{x}$ – представлении

$$< \dot{H}(\vec{x}) >'_{\ell} \simeq h_0 \;\nabla \vec{v}(\vec{x},t)\;, \quad < \dot{\vec{p}}(\vec{x}) >'_{\ell} \simeq \nabla p(\vec{x},t)\,. \tag{2.10a}$$

Далее, так как длинноволновая и низкочастотная асимптотика (2.7′) должна соответствовать уравнениям Навье–Стокса, получаем для малых $\vec{k}$ и ω :

$$\begin{aligned} &\mathfrak{L}_{00}(\vec{k},\omega) \simeq k^2 T_0^2 \lambda\;; \quad \mathfrak{L}_{01}(\vec{k},\omega) \simeq 0\;; \quad \mathfrak{L}_{10}(\vec{k},\omega) \simeq 0\;; \\ &\mathfrak{L}_{11}^{\alpha\beta}(\vec{k},\omega) \simeq k_\alpha k_\beta T_0 \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right) + \left(\delta_{\alpha\beta} k^2 - k_\alpha k_\beta\right) T_0\, \eta\;, \end{aligned} \tag{2.11}$$

где λ – коэффициент теплопроводности, ζ – объемная, а η – сдвиговая вязкости. Таким образом, ядра перекрестных процессов переноса $\mathfrak{L}_{01}(\vec{k},\omega)$ и $\mathfrak{L}_{10}(\vec{k},\omega)$ асимптотически малы по сравнению с $\mathfrak{L}_{00}(\vec{k},\omega)$ и $\mathfrak{L}_{11}(\vec{k},\omega)$ при $\vec{k}\to 0,\ \omega\to 0$, то-есть

$$\lim_{\omega\to 0,\,\vec{k}\to 0} \mathfrak{L}_{01}(\vec{k},\omega)/\mathfrak{L}_{00}(\vec{k},\omega) = 0 \qquad \text{и т.д.}$$

В дальнейшем мы не будем учитывать в (2.7) эти перекрестные члены.

Подставим теперь соотношения (2.10а) в (2.7) и исключим плотность энергии $u(\vec{x},t)$ и давление $p(\vec{x},t)$ с помощью уравнений состояния (2.5), а $\partial\rho(\vec{x},t)/\partial t$ – с помощью уравнения непрерывности (2.4с). Наконец, учитывая (2.9) и отделяя потенциальную $\nabla\cdot\vec{v}(\vec{x},t)$ и вихревую $\nabla\times\vec{v}(\vec{x},t)$ компоненты поля скоростей $\vec{v}(\vec{x},t)$, получим линеаризованные уравнения переноса в окончательном виде:

$$c_v\frac{\partial T}{\partial t}+T_0\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\nabla\vec{v}=\frac{1}{T_0^2}\int_{-\infty}^{+\infty}dt'\int d\vec{x}'L_{00}(\vec{x}-\vec{x}',t-t')\nabla^2T(\vec{x}',t'), \qquad (2.12a)$$

$$\rho_0\frac{\partial\nabla\vec{v}}{\partial t}+\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T\nabla^2\rho+\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho\nabla^2T= \qquad (2.12)$$

$$=\frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{+\infty}dt'\int d\vec{x}'\;L_{11}(\vec{x}-\vec{x}',t-t')\,\nabla^2\nabla\vec{v}(\vec{x}',t'),$$

$$\rho_0\frac{\partial\nabla\times\vec{v}}{\partial t}=\frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{+\infty}dt'\int d\vec{x}'\,L_{22}(\vec{x}-\vec{x}',t-t')\,\nabla^2\nabla\times\vec{v}(\vec{x}',t'), \qquad (2.12c)$$

где

$$L_{mn}(x,t)=\frac{1}{V}\sum_{\vec{k}}e^{i\vec{k}\vec{x}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\;e^{-i\omega t}L_{mn}(\vec{k},\omega);$$

c_v – теплоемкость при постоянном объеме, отнесенная к единичному объему.

При выводе (2.12а) использовалось термодинамическое тождество:

$$T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho=h-\rho\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)_T.$$

Уравнения (2.12) формально содержат эффекты нелокальности и запаздывания. Однако если интегральные ядра $L_{mn}(\vec{x},t)$ быстро затухают на масштабах, на которых термодинамические силы мало меняются, то, выполняя интегрирование в правых частях (2.12), получим уравнения Навье-Стокса с кинетическими коэффициентами L_{mn}:

$$L_{mn} = \lim_{\epsilon \to +0} \lim_{\vec{k} \to 0} \lim_{V \to \infty} L_{mn}(\vec{k}, \omega = 0) = \tag{2.13а}$$

$$= \lim_{\epsilon \to +0} \lim_{\vec{k} \to 0} \lim_{V \to \infty} \int_0^\infty dt\, e^{-\epsilon t} \int_V d\vec{x}\, e^{-i\vec{k}\vec{x}} L_{mn}(\vec{x}, t) . \tag{2.13б}$$

Предельные переходы в (2.13 а,б) не перестановочны.

Учитывая (2.9) и (2.11), находим

$$L_{00} = T_0^2 \lambda ; \qquad L_{01} = L_{10} = 0 ;$$
$$L_{11} = T_0 \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) ; \qquad L_{22} = T_0\, \eta . \tag{2.13}$$

В следующем разделе мы учтем эффекты нелокальности и запаздывания (т.е. вклад в $L_{nn}(\vec{x}, t)$) коротковолновых и высокочастотных гармоник) на основе простой модели для ядер переноса.

3. Построение асимптотического приближения для интегральных ядер переноса

Перейдем к нашей задаче - построению приближения для интегральных ядер $L_{nn}(\vec{x}, t)$, эффективно учитывающего нелокальность и запаздывание в процессах переноса. Из соображений удобства будем исходить из симметризованных корреляционных функций:

$$\Psi_{mn}(\vec{x}-\vec{x}', t-t') = \langle \{ J_m(\vec{x}, t),\ J_n(\vec{x}', t') - \langle J_n(\vec{x}') \rangle \} \rangle , \tag{3.1}$$

где

$$\{ J_m , J_n \} \equiv \frac{1}{2} (J_m J_n + J_n J_m) .$$

На основании флуктуационно-диссипационной теоремы /16,4/ компоненты Фурье $\Psi_{mn}(\vec{k}, \omega)$ этих функций связаны с $\mathfrak{L}_{mn}(\vec{k}, \omega)$ соотношениями

$$Re\, \mathfrak{L}_{mn}(\vec{k}, \omega) = \frac{T_0}{h\omega}\, th \frac{h\omega}{2T_0}\, \Psi_{mn}(\vec{k}, \omega) , \tag{3.2}$$

поскольку $\mathfrak{L}_{mn}(\vec{k},\omega)$ и $\Psi_{mn}(\vec{k},\omega)$ - симметричные матрицы. Для операторов J_m, J_n одинаковой четности относительно обращения времени функция $\Psi_{mn}(\vec{k},\omega)$ в отсутствие магнитного поля является четной по ω /16/:

$$\Psi_{mn}(\vec{k},\omega) = \Psi_{mn}(\vec{k},-\omega), \tag{3.3}$$

а в силу пространственной изотропии:

$$\begin{aligned} &\Psi_{00}(\vec{k},\omega) = k^2\, \mathfrak{F}_{00}(\vec{k},\omega); \\ &\Psi_{11}^{\alpha\beta}(\vec{k},\omega) = k_\alpha k_\beta \mathfrak{F}_{11}(\vec{k},\omega) + (\delta_{\alpha\beta} k^2 - k_\alpha k_\beta)\mathfrak{F}_{22}(\vec{k},\omega), \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $\mathfrak{F}_{mn}(\vec{k},\omega)$ зависят только от величины волнового вектора $\vec{k}$ (т.е. от k^2).

Формулы (3.4) являются определением функций $\mathfrak{F}_{nn}(\vec{k},\omega)$, которые связаны с $Re\, L_{nn}(\vec{k},\omega)$ так же, как функции $\Psi_{nn}(\vec{k},\omega)$ с $Re\, \mathfrak{L}_{mn}(\vec{k},\omega)$, то-есть соотношениями (3.2). Поэтому

$$\lim_{\omega\to 0} \lim_{\vec{k}\to 0} \mathfrak{F}_{nn}(\vec{k},\omega) = 2L_{nn}, \tag{3.5}$$

если кинетические коэффициенты (2.13) существуют.

Введем прямую корреляционную функцию $\mathfrak{M}_{nn}(\vec{k},\omega)$ согласно определению /14/:

$$\mathfrak{M}_{nn}(\vec{k},\omega)\, \mathfrak{F}_{nn}(\vec{k},\omega) = 1. \tag{3.6}$$

Из определения (3.6) и свойств (3.3)-(3.5) получаем

$$\mathfrak{M}_{nn}(\vec{k},\omega) = \mathfrak{M}_{nn}(\vec{k},-\omega) = \mathfrak{M}_{nn}(-\vec{k},\omega), \tag{3.7а}$$

$$\lim_{\omega\to 0} \lim_{\vec{k}\to 0} \mathfrak{M}_{nn}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{2} L_{nn}^{-1}. \tag{3.7б}$$

Последнее равенство имеет смысл, если L_{nn} отличны от нуля. Сначала будем предполагать, что $L_{nn} < \infty$, а значит предел (3.7б) отличен от нуля. Случай $L_{nn} \to \infty$ будет рассмотрен особо.

Для пояснения физического смысла $\mathfrak{M}_{nn}(k,\omega)$ приведем здесь простые и довольно наглядные соображения. Выделим в левой части (3.6) сингулярный член, представив матрицы $\mathfrak{M}(\vec{k},\omega)$ и $\mathfrak{F}(\vec{k},\omega)$ в виде:

$$\mathfrak{M}(\vec{k},\omega) = \{1-m(\vec{k},\omega)\}\cdot\frac{1}{2}L^{-1},$$

$$\mathfrak{F}(\vec{k},\omega) = 2L\cdot\{1+f(\vec{k},\omega)\}.$$

Точка означает свертку по одной паре индексов. Для $m(\vec{k},\omega)$ и $f(\vec{k},\omega)$ уравнение (3.6) имеет вид

$$f(\vec{k},\omega) = m(\vec{k},\omega) + m(\vec{k},\omega)\,f(\vec{k},\omega). \tag{3.8}$$

Это соотношение в переменных $\vec{x}$, t имеет форму интегрального уравнения Орнштейна-Цернике /4,13/, но в отличие от последнего связывает функции, зависящие как от пространственных координат, так и от времени:

$$f(\vec{x},t) = m(\vec{x},t) + \int d\vec{x}' \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, m(\vec{x}-\vec{x}',t-t')\, f(\vec{x}',t'). \tag{3.8a}$$

Уравнение (3.8а) можно рассматривать как разложение корреляционной функции $f(\vec{x},t)$ на сумму функции от точки $m(\vec{x},t)$ и интегрального члена. Функцию $m(\vec{x},t)$ можно интерпретировать как прямую корреляционную функцию, которая описывает корреляции, возникающие из-за непосредственного взаимодействия молекул. Поэтому $m(\vec{x},t)$ отлична от нуля в малой области $\vec{x}$ и t (порядка радиуса и времени взаимодействия соответственно). Интегральный член в (3.8а) описывает корреляции, возникающие из-за взаимодействия двух молекул через окружающие их частицы и, вообще говоря, содержит дальние и долгоживущие корреляции.

Таким образом, согласно (3.8), мы можем выделить длинноволновую и низкочастотную часть корреляционной функции $f(\vec{k},\omega)$ в виде отдельного слагаемого $m(\vec{k},\omega)$. Если $m(\vec{x},t)$ предполагается известной, то коротковолновая и высокочастотная часть спектра флуктуаций определяется из (3.8а) самосогласованным образом.

Основываясь на этих эвристических соображениях, будем предполагать, что функции $\mathfrak{M}_{nn}(\vec{x},t)$ быстро убывают в пространстве и во времени, так что существует достаточное для наших целей количество моментов:

$$\mathfrak{M}_{nn}\{q,s\} = \int d\vec{x} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, |\vec{x}|^{q} t^{s}\, \mathfrak{M}_{nn}(\vec{x},t),$$

где q, s – четные неотрицательные числа.

Тогда вблизи точки $\vec{k}=0$, $\omega=0$ функции $\mathfrak{M}_{nn}(\vec{k},\omega)$ представимы отрезком ряда Тейлора по степеням $\vec{k}$ и ω. В силу (3.7а,б) этот ряд имеет вид

$$\mathfrak{M}_{nn}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{2} L^{-1}_{nn} + a_n\omega^2 + b_n k^2 + \dots, \tag{3.9}$$

где

$$\frac{1}{2} L^{-1}_{nn} = \mathfrak{M}_{nn}\{0,0\}; \qquad a_n = -\frac{1}{2!}\mathfrak{M}_{nn}\{0,2\};$$
$$b_n = -\frac{1}{3!}\mathfrak{M}_{nn}\{2,0\}, \dots \tag{3.9a}$$

Ограничимся в (3.9) членами до второго порядка по $\vec{k}$ и ω и перепишем выражение для $\mathfrak{M}_{nn}(\vec{k},\omega)$ в виде

$$\mathfrak{M}_{nn}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{2} L^{-1}_{nn} (1 + r_n^2\omega^2 + \ell_n^2 k^2). \tag{3.10}$$

Тогда уравнение (3.6) сводится к уравнению

$$(1 + r_n^2\omega^2 + \ell_n^2 k^2)\, \mathcal{F}_{nn}(\vec{k},\omega) = 2L_{nn}. \tag{3.11}$$

Неотрицательность коэффициентов в (3.10) вытекает из условия существования кинетических коэффициентов (2.13), т.е. из предположения о сходимости соответствующих интегралов:

$$L_{nn} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d\vec{x}\, L_{nn}(\vec{x},t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d\vec{x}\, \mathcal{F}_{nn}(\vec{x},t) < \infty . \qquad (3.12)$$

В самом деле, вычисляя $\mathcal{F}_{nn}(\vec{x},t)$ из (3.11), нетрудно убедиться, что если хотя бы один из коэффициентов при k^2 или ω^2 в (3.11) отрицателен, то интегралы (3.12) не существуют.

Итак, для корреляционных функций флуктуаций $\mathcal{F}_{nn}(\vec{x},t)$ мы сконструировали асимптотическое при $|\vec{k}| \ll 1/\ell_n$, $\omega \ll 1/\tau_n$ выражение (3.11). В рамках данной модели пространственно-временное затухание корреляций характеризуется двумя параметрами: ℓ_n – длиной и τ_n – временем корреляции. Эти параметры и кинетические коэффициенты выражаются через моменты исходных интегральных ядер $L_{nn}(\vec{x},t)$:

$$L_{nn} = L_{nn}\{0,0\}\ ; \qquad \ell_n^2 = L_{nn}\{2,0\} / 6L_{nn}\{0,0\}\ ;$$

$$\tau_n^2 = L_{nn}\{0,2\} / 2L_{nn}\{0,0\} - h^2/12T_0^2 . \qquad (3.13)$$

В этом легко убедиться, дифференцируя (3.11) по $\vec{k}$ и ω с использованием (3.2) и переходя к пределу $\vec{k}\to 0$, $\omega\to 0$ в окончательных результатах.

В рамках нашего подхода моменты (3.13) являются параметрами теории. Разложение (3.9) можно интерпретировать как асимптотическое приближение по моментам ядер переноса (2.8б) или релаксационных функций (2.8а). При этом, если считать отличным от нуля только нулевой момент $L_{nn}\{0,0\}$, то получим обычные уравнения гидродинамики с формулами Кубо для кинетических коэффициентов: $L_{nn} = L_{nn}\{0,0\}$. В настоящей работе мы ограничимся обобщением гидродинамики, основанном на трех моментах (3.13) интегральных ядер (2.8), что позволяет учитывать эффекты памяти и нелокальности.

В заключение параграфа заметим, что для дальних и долгоживущих корреляций моменты ядер переноса могут стать неопределенными или обращаться в бесконечность. При этом обобщенные формулы Кубо (3.13) теряют смысл. В этом случае удобно пользоваться определением параметров через моменты (3.9а) прямых корреляционных функций (3.6).

4. Обобщение уравнений гидродинамики

В этом разделе на основе рассмотренного в предыдущем параграфе приближения для ядер переноса $L_{nn}(\vec{k},\omega)$ мы получим интегродифференциальные уравнения для температуры T и скорости $\vec{v}$, которые обобщают уравнения Навье-Стокса.

Прежде всего найдем выражение для симметризованной корреляционной функции $\mathcal{F}_{nn}(\vec{x},t)$. Совершая обратное преобразование Фурье над функциями $\mathcal{F}_{nn}(\vec{k},\omega)$, найденными из (3.11), получим

$$\mathcal{F}_{nn}(\vec{x},t) = \frac{L_{nn}}{2\pi^2 \ell_n^3 r_n} z_n^{-1} K_1(z_n); \quad z_n \equiv \left(\frac{|\vec{x}|^2}{\ell_n^2} + \frac{t^2}{r_n^2}\right)^{1/2}, \tag{4.1}$$

где $K_1(z) = \int_0^\infty dt\ \mathrm{ch}\,t\ e^{-z\,\mathrm{ch}\,t}$ – функция Макдональда. Подчеркнем, что выражение (4.1) справедливо для неограниченной среды, тогда как уравнение (3.11) носит локальный характер и может быть использовано для нахождения $\mathcal{F}_{nn}(\vec{x},t)$ с учетом граничных условий.

Найдем теперь выражение для интегральных ядер переноса $L_{nn}(\vec{x},t)$, принимая во внимание соотношение (3.2):

$$L_{nn}(\vec{k},t) = \theta(t)\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\omega\ \cos\omega t\ \mathrm{Re}\,L_{nn}(\vec{k},\omega) =$$

$$= \theta(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ e^{-i\omega t}\ \frac{2T_0}{h\omega}\ \mathrm{th}\frac{h\omega}{2T_0}\ \mathcal{F}_{nn}(\vec{k},\omega) = \tag{4.2а}$$

$$= \theta(t)\int_{-\infty}^{+\infty} dt'\ \Gamma(t-t')\ \mathcal{F}_{nn}(\vec{k},t'), \tag{4.2б}$$

где [16]

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}\, \frac{2T_0}{h\omega}\, th\, \frac{h\omega}{2T_0} =$$

$$= \frac{2T_0}{h\omega}\, \ell n\, cth\, \frac{\pi |t|\, T_0}{h}\,. \tag{4.3}$$

Здесь (4.2а) следует из четности $Re\, L_{nn}(\vec{k}, \omega)$ по ω и (3.2), а (4.2б) - из теоремы о свертке. Совершая в (4.2б) преобразование Фурье по $\vec{k}$, получаем окончательно для ядер переноса

$$L_{nn}(\vec{x}, t) = \frac{L_{nn}\,\theta(t)}{2\pi^2 \ell_n^3 r_n} \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, \Gamma(t-t')\, \frac{K_1\left(\sqrt{\left(\frac{|\vec{x}|}{\ell_n}\right)^2 + \left(\frac{t'}{r_n}\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{|\vec{x}|}{\ell_n}\right)^2 + \left(\frac{t'}{r_n}\right)^2}}\,. \tag{4.4}$$

Уравнениями динамики жидкости в данном случае являются интегродифференциальные уравнения (2.12) с ядрами (4.4). Заметим, что в пределе классической статистики

$$\lim_{\frac{h\omega}{T_0}\to 0} \frac{2T_0}{h\omega}\, th\, \frac{h\omega}{2T_0} = 1\,, \qquad \lim_{\frac{h}{T_0|t|}\to 0} \Gamma(t) = \delta(t)\,,$$

и вместо (4.4) получаем

$$L_{nn}(\vec{x}, t) = \theta(t)\, \mathcal{F}_{nn}(\vec{x}, t)\,. \tag{4.5}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать область столь высоких температур и столь низких частот $(h\omega / T_0 \ll 1)$, что квантовыми эффектами можно пренебрегать и пользоваться формулой (4.5).

Рассмотрим теперь два предельных случая:

(I) $|\vec{x}| \gg \ell_n$, $t \gg r_n$; в этом случае в пределе $\ell_n \to 0$, $r_n \to 0$ уравнения переноса сводятся к уравнениям Навье-Стокса;

(II) $L_{nn} \to \infty$; этот случай имеет место вблизи критической точки [17] и ни в каком приближении не сводится к гидродинамике.

(I) Пользуясь асимптотикой $K_1(z)$ при $z \gg 1$:

$$K_1(z) \sim (\pi / 2z)^{1/2} \exp(-z)\,,$$

находим для интегральных ядер:

$$L_{nn}(\vec{x},t) = \frac{L_{nn}\,\theta(t)}{(2\pi \ell_n^2)^{3/2}\, \tau_n} z_n^{-3/2} e^{-z_n} . \tag{4.6}$$

При этом уравнения переноса (2.12) имеют вид (для краткости выпишем их в случае несжимаемой жидкости $\nabla \vec{v}(\vec{x},t) = 0$):

$$c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{t} \frac{dt'}{\tau_0} \int \frac{d\vec{x}'}{\ell_0^3} \frac{\exp\{-\sqrt{\frac{R^2}{\ell_0^2} + \frac{(t-t')^2}{\tau_0^2}}\}}{(\frac{R^2}{\ell_0^2} + \frac{(t-t')^2}{\tau_0^2})^{3/4}} \nabla^2 T(\vec{x}',t'),$$

(4.7)

$$\rho_0 \frac{\partial \nabla\times\vec{v}}{\partial t} = \frac{\eta}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{t} \frac{dt'}{\tau_2} \int \frac{d\vec{x}'}{\ell_2^2} \frac{\exp\{-\sqrt{\frac{R^2}{\ell_2^2} + \frac{(t-t')^2}{\tau_2^2}}\}}{(\frac{R^2}{\ell_2^2} + \frac{(t-t')^2}{\tau_2^2})^{3/4}} \nabla^2\nabla \times\vec{v}(\vec{x}',t'),$$

$$R = |\vec{R}| \equiv |\vec{x} - \vec{x}'| .$$

Если пренебречь запаздыванием, уравнения (4.7) можно свести к уравнениям

$$c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{4\pi \ell_0^2} \int d\vec{x}' \frac{\exp\{-R/\ell_0\}}{R} \nabla^2 T(x',t) ,$$

(4.7a)

$$\rho_0 \frac{\partial \nabla\times v}{\partial t} = \frac{\eta}{4\pi \ell_2^2} \int d\vec{x}' \frac{\exp\{-R/\ell_2\}}{R} \nabla^2 \nabla\times\vec{v}(\vec{x}',t),$$

которые по форме напоминают уравнения Чемберса для аномального скин-эффекта /7/ и Пиппарда для сверхпроводящего образца /18/, устанавливающие нелокальную связь между током и приложенным полем. Например, соотношение Чемберса имеет вид:

$$\vec{j}(\vec{x}) = \frac{3\sigma}{4\pi\ell} \int d\vec{x}' \frac{\vec{R}(\vec{R}\,\vec{\mathcal{E}}(\vec{x}'))}{R^4} e^{-R/\ell} , \tag{4.8}$$

где $\vec{j}(\vec{x})$ – плотность тока, $\vec{\mathcal{E}}(\vec{x})$ – напряженность электрического поля, ℓ – длина корреляции, σ – проводимость. Существование столь непосредственной аналогии уравнений (4.7а) с соотношениями Чемберса (4.8) дает нам основание надеяться, что уравнения (4.7а) имеют столь же важное прикладное значение, как и (4.8) (например, в теории пограничного слоя).

В другом крайнем случае, когда в (4.7) можно пренебречь нелокальностью, получаем уравнения с памятью

$$c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\tau_0} \int_{-\infty}^{t} dt' \exp\left\{ - \frac{t-t'}{\tau_0} \right\} \nabla^2 T(\vec{x}, t') , \tag{4.7б}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \nabla \times \vec{v}}{\partial t} = \frac{\eta}{\tau_2} \int_{-\infty}^{t} dt' \exp\left\{ - \frac{t-t'}{\tau_2} \right\} \nabla^2 \nabla \times \vec{v}(\vec{x}, t') .$$

Оба уравнения (4.7б) одного типа, поэтому исследуем первое из них – уравнение переноса температуры. Дифференцируя его по времени, получим волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau_0} \frac{\partial T}{\partial t} = u_T^2 \nabla^2 T , \tag{4.9}$$

и, следовательно, конечную скорость распространения возмущений температуры: $u_T = \sqrt{\lambda / c_v \tau_0}$. Такое уравнение было впервые получено и исследовано Каттанео /19/ и неоднократно применялось в различных задачах (напр., /20,21/). Наконец, в пределе $\ell_n \to 0$, $\tau_n \to 0$ уравнения (4.7) переходят в обычные уравнения Навье-Стокса.

(*II*) Рассмотрим теперь случай, когда $L_{nn}\{q, s\} \to \infty$, $q, s = 0,2$ так, что $\mathfrak{M}_{nn}\{0,0\} \to 0$;

$$\mathfrak{M}_{nn}\{0,2\} \to -2!\, a_n \neq 0 ; \qquad \mathfrak{M}_{nn}\{2,0\} \to -3!\, b_n \neq 0 .$$

Учитывая, что при этом $z_n = \sqrt{\mathfrak{M}_{nn}\{0,0\}/b_n} \times (c_n^2 t^2 + |\vec{x}|^2)^{1/2} \to 0$, где

$c_n^2 = b_n / a_n$, и используя асимптотику функции Макдональда: $K_1(z) \simeq z^{-1}$, $0 < z \ll 1$, получим следующие выражения для интегральных ядер

$$L_{nn}(\vec{x}, t) = \frac{\theta(t)}{4\pi^2 c_n a_n} (c_n^2 t^2 + |\vec{x}|^2)^{-1} . \tag{4.10}$$

Тот же результат мы получим, положив $L_{nn}^{-1} = 0$ в разложении (3.9).

Эти выражения свидетельствуют о чрезвычайно медленном затухании корреляций во времени и в пространстве для случая (II), который может иметь место вблизи критической точки /17/. Если пренебречь запаздыванием ($a_n = 0$), то вместо (4.10) получим известные формулы Орнштейна-Цернике /4,13/:

$$L_{nn}(x) \equiv \int_0^\infty L_{nn}(\vec{x}, t)\, dt = \frac{1}{4\pi b_n} |\vec{x}|^{-1} , \tag{4.10a}$$

из которых следует, что радиус корреляции ℓ_n возрастает до бесконечности. В общем случае (4.10) приближение к критической точке характеризуется также резким возрастанием времен корреляции τ_n – так называемое критическое замедление /17/. При выводе (4.10) мы предполагали, что отношение ℓ_n / τ_n остается конечным. Это предположение, разумеется, не может быть строго обосновано, а наша интерпретация случая (II) является лишь попыткой качественной трактовки критических явлений. При этом данный подход позволяет сделать интересные выводы относительно протекания процессов переноса в критической области. В силу (4.10) уравнения переноса (2.12) имеют вид:

$$c_v \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \nabla \vec{v} = \frac{1}{4\pi^2 a_0 c_0 T_0^2} \int_{-\infty}^{t} dt' \int d\vec{x}' \frac{\nabla^2 T(\vec{x}', t')}{c_0^2 (t-t')^2 + R^2},$$

$$\rho_0 \frac{\partial \nabla \vec{v}}{\partial t} + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \nabla^2 \rho + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \nabla^2 T =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 a_1 c_1 T_0} \int_{-\infty}^{t} dt' \int d\vec{x}' \frac{\nabla^2 \nabla \vec{v}(\vec{x}',t')}{c_1^2 (t-t')^2 + R^2}, \qquad (4.11)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \nabla \times \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi^2 a_2 c_2 T_0} \int_{-\infty}^{t} dt' \int d\vec{x}' \frac{\nabla^2 \nabla \times \vec{v}(\vec{x}',t')}{c_2^2 (t-t')^2 + R^2}.$$

Подчеркнем, что термодинамические производные в левых частях уравнений (4.11) следует заменить зависящими от двух пространственных точек интегральными ядрами, которые свертываются с соответствующими пространственными или временными производными от термодинамических параметров /10,11/, поскольку вблизи критической точки термрдинамика становится нелокальной. Однако мы этого явно не делаем, так как нас интересуют лишь правые части в (4.11). Замечательным свойством уравнений (4.11) является отсутствие кинетических коэффициентов в уравнениях переноса. Процессы переноса теперь характеризуются парами a_n и c_n и являются существенно нелокальными. Ядра переноса очень медленно убывают в пространстве и во времени, так что интегралы от них по всему пространству $\vec{x}, t$ расходятся (в соответствии с предположением, что $L_{nn}\{0, 0\} \to \infty$). По этой причине локальные и кратковременные возмущения температуры $T(\vec{x}, t)$ и массовой скорости $\vec{v}(\vec{x}, t)$ вызывают потоки в областях пространства, размеры которых значительно превосходят размеры зоны локализации возмущений, а время, в течение которого эти потоки существуют, гораздо больше продолжительности возмущения. Иными словами, точечные и мгновенные неоднородности (т.е. неоднородности типа $(F_m - F_m^0)\delta(\vec{x})\delta(t)$) вызывают долгоживущие возбуждения практически полного объема системы. Это своеобразное явление, по-видимому, связано с приближением системы к границе устойчивости по мере ее приближения к критической точке.

5. Дифференциальные уравнения переноса

В настоящее разделе мы попытаемся свести интегро-дифференциальные уравнения предыдущего параграфа к системе дифференциальных уравнений, поскольку такое описание жидкой среды часто оказывается более удобным.

Прежде всего рассмотрим уравнение для корреляционной функции флуктуаций $\mathcal{F}_{nn}(\vec{x}, t)$. Совершая в (3.11) обратное преобразование Фурье, найдем, что при $|\vec{x}| \gg \ell_n$, $t \gg r_n$ функции $\mathcal{F}_{nn}(\vec{x}, t)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению:

$$\left(1 - r_n^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \ell_n^2 \nabla^2\right) \mathcal{F}_{nn}(\vec{x}, t) = 2L_{nn}\, \delta(\vec{x})\, \delta(t) \quad . \qquad (5.1)$$

Отметим, что уравнения (3.11) и (5.1) эквивалентны лишь в случае безграничной среды при известных ограничениях на класс функций $\mathcal{F}_{nn}(\vec{x}, t)$. В частности, корреляционные функции должны удовлетворять принципу ослабления корреляций:

$$\lim_{|\vec{x}| \to \infty} \mathcal{F}_{nn}(\vec{x}, t) = \lim_{t \to \infty} \mathcal{F}_{nn}(\vec{x}, t) = 0 \ .$$

Если эти условия выполняются, то решением (5.1) является функция (4.1). Однако при наличии границ выполнение обратного преобразования Фурье требует, как уже отмечалось, учета граничных условий - например, задания условий отражения на границе, как это делалось в работах по аномальному скин-эффекту /8,9/. При этом уравнение (3.11) не сводится к дифференциальному, а вид функции (4.1) несколько изменяется. В настоящей работе мы этими вопросами заниматься не будем.

Обратимся к уравнению (5.1), которое является обобщением известного дифференциального уравнения Орнштейна–Цернике /4,13/ на корреляционные функции флуктуаций, зависящие от времени. Если в (5.1) перейти к пределу $r_n \to 0$ и проинтегрировать обе части по времени, найдем, что спектральная плотность корреляционной функции $\mathcal{F}_{nn}(\vec{x}, t)$ при нулевой частоте, т.е. функция координат $f_n(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \ \mathcal{F}_{nn}(\vec{x}, t)$ удовлетворяет уравнению Орнштейна–Цернике.

Следующим этапом является получение дифференциальных уравнений переноса из уравнений (2.12). Это можно было бы попытаться сделать исходя из (5.1) и используя связь (4.5) функций $L_{nn}(\vec{x}, t)$ и $\mathcal{F}_{nn}(\vec{x}, t)$. Однако при этом мы вынуждены были бы делать малообоснованные в рамках исходной модели приближения.

Мы изберем другой путь. Именно, модифицируем нашу модель так, чтобы она приводила к простому дифференциальному уравнению для $L_{nn}(\vec{x}, t)$, позволяющему свести (2.12) к дифференциальным уравнениям. Для этой цели определим прямую корреляционную функцию $M_{nn}(\vec{k}, \omega)$ несколько иначе, чем в §3:

$$M_{nn}(\vec{k}, \omega)\ L_{nn}(\vec{k}, \omega) = 1 \ . \tag{5.2}$$

Функции $M_{nn}(\vec{k}, \omega)$ являются комплекснозначными; они, как и ранее, зависят только от k^2 в силу пространственной изотропии, но не являются четными по ω, так как множитель $\theta(t)$ нарушает симметрию релаксационных функций относительно t. Общий вид разложения $M_{nn}(\vec{k}, \omega)$ по степеням k и ω дается рядом:

$$M_{nn}(\vec{k}, \omega) = L^{-1}_{nn} + a_n\, \omega + b_n\, k^2 + \dots \ . \tag{5.3}$$

Учитывая, что (напр., /16/)

$$Re\ L_{nn}(\vec{k}, \omega) = Re\ L_{nn}(\vec{k}, -\omega) \ ,$$

$$Im\ L_{nn}(\vec{k}, \omega) = -Im\ L_{nn}(\vec{k}, -\omega) \ ,$$

находим, что b_n – вещественно, а a_n – чисто мнимо. Далее, ограничиваясь в (5.3) лишь выписанными членами, получим из (5.2) уравнение для $L_{nn}(\vec{k},\omega)$

$$(1 - i\tau_n\,\omega + \ell_n^2\,k^2)\,L_{nn}(\vec{k},\omega) = L_{nn}\;. \tag{5.4}$$

Положительность b_n следует из условия (3.12), а знак $Im\ a_n$ – из принципа причинности: в самом деле, чтобы $L_{nn}(\vec{x},t)$ обращалось в нуль при $t < 0$, необходимо, чтобы полюс $L_{nn}(\vec{k},\omega)$ (или нуль $M_{nn}(\vec{k},\omega)$) был расположен в нижней полуплоскости комплексной плоскости ω. Параметры L_{nn} и ℓ_n выражаются через моменты интегральных ядер $L_{nn}(\vec{x},t)$ формулами (3.13), а τ_n – формулой

$$\tau_n = L_{nn}\{0,1\}\,/\,L_{nn}\{0,0\}\;. \tag{5.5}$$

Уравнение (5.4) с уже упоминавшимися оговорками эквивалентно следующему дифференциальному уравнению:

$$D_n\,L_{nn}(\vec{x},t) = L_{nn}\,\delta(\vec{x})\,\delta(t)\;, \tag{5.6}$$

где D_n – дифференциальный оператор:

$$D_n \equiv 1 + \tau_n\,\partial/\partial t - \ell_n^2\,\nabla^2. \tag{5.6a}$$

Уравнение (5.6) так же, как и (5.1), является динамическим обобщением уравнения Орнштейна-Цернике.

Здесь уместно сравнить приближенные выражения для $L_{nn}(\vec{k},\omega)$, которые мы принимаем в (5.4):

$$L_{nn}(\vec{k},\omega) = \frac{L_{nn}}{1 + \ell_n^2 k^2 - i\,\tau_n\,\omega}\;, \tag{5.4a}$$

с теми, которые следуют из (3.11)[x/] и (3.2):

$$L_{nn}(\vec{k},\omega) = \frac{L_{nn}}{1 + \ell_n^2 k^2 - i\tau_n\,\omega\sqrt{1 + \ell_n^2 k^2}}\;. \tag{3.11a}$$

[x/] Выражение (3.11a) для $L_{nn}(\vec{k},\omega)$ можно получить, восстанавливая $Im\ L_{nn}(\vec{k},\omega)$ с помощью соотношений Крамера-Кронига (напр., /4/) по найденной из (3.11) и (3.2) $Re\ L_{nn}(\vec{k},\omega)$.

Обе формулы (5.4а) и (3.11) совпадают при $\ell_n = 0$ (или в пределе $\vec{k} \to 0$) и соответствуют в этом случае максвелловской релаксационной функции с временем релаксации τ_n. Это время для процессов переноса импульса может быть выражено через высокочастотные модули упругости. Действительно, введем в согласии с определением Цванцига-Маунтена /22/ высокочастотные модули сдвига G_∞ и объемной упругости K_∞ :

$$K_\infty + \frac{4}{3} G_\infty = T_0^{-1} \lim_{\vec{k}\to 0} \lim_{\omega\to\infty} \omega \, Im\, L_{11}(\vec{k},\omega) , \tag{5.7}$$

$$G_\infty = T_0^{-1} \lim_{\vec{k}\to 0} \lim_{\omega\to\infty} \omega \, Im\, L_{22}(\vec{k},\omega) .$$

Вычисляя предел в правой части этих равенств, выразим τ_1 и τ_2 через отношение вязких и упругих постоянных:

$$\tau_1 = \frac{\zeta + 4/3\,\eta}{K_\infty + 4/3\, G_\infty} ; \qquad \tau_2 = \frac{\eta}{G_\infty} . \tag{5.8}$$

Асимптотические формулы (5.4а) и (3.11а) совпадают друг с другом также при $\tau_n = 0$ и при этом соответствуют приближению Орнштейна-Цернике. В общем случае ($\ell_n \neq 0$, $\tau_n \neq 0$) (5.4а) и (3.11а) приводят, разумеется, к различным выражениям для интегральных ядер $L_{nn}(x,t)$.

Теперь мы используем уравнение (5.6) для получения дифференциальных уравнений переноса. Подействуем на обе части уравнений (2.12) дифференциальным оператором D_n (5.6а), учитывая (5.6):

$$D_0 \left\{ c_v \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \nabla \vec{v} \right\} = \lambda \nabla^2 T , \tag{5.9}$$

$$D_1 \left\{ \frac{\partial \nabla \vec{v}}{\partial t} + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T \nabla^2 \rho + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \nabla^2 T \right\} = \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right) \nabla^2 \nabla \vec{v} , \tag{5.9б}$$

$$D_2 \ \rho_0 \frac{\partial \nabla\times\vec{v}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \ [\nabla \times \vec{v}\ ] \quad , \tag{5.9с}$$

и дополним (5.7а,б,с) уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \ \nabla \vec{v} \ . \tag{5.9д}$$

Уравнения (5.9) представляют собой замкнутую систему дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию простой однокомпонентной жидкости с эффектами нелокальности и памяти и содержат кроме кинетических коэффициентов λ, η, ζ шесть дополнительных параметров: времена τ_0, τ_1, τ_2 и длины ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 корреляций. В случае газа все τ_n – порядка времени свободного пробега, все ℓ_n – порядка длины свободного пробега, а отношение ℓ_n/τ_n – порядка средней тепловой скорости молекул. Поэтому для газа, в действительности, имеется один дополнительный параметр. Для жидкости эти параметры могут сильно различаться, поэтому мы вправе предполагать их независимыми и даже некоторые из них положить равными нулю. Тогда система уравнений (5.9) может значительно упроститься.

Заключение

В настоящей работе получены уравнения переноса, обобщающие обычную гидродинамику на меньшие мастабы длин и времен. При этом мы остаемся в рамках гидродинамического подхода, т.е. описания жидкости небольшим числом термодинамических параметров: температурой, плотностью и массовой скоростью. Такое обобщение гидродинамики позволяет изучать процессы, в которых существенны пространственная и временная дисперсии кинетических коэффициентов, например, распространение гиперзвука, неупругое рассеяние нейтронов и света.

Представляет также интерес рассмотрение классических задач, для которых неприменимы уравнения Навье-Стокса, например, исследование структуры сильных ударных волн, когда скорость и температура существенно меняются на длине свободного пробега. Обычно для решения подобных задач используется уравнение Больцмана /6/.

С другой стороны, известны асимптотические парадоксы обычной гидродинамики /23/, которые свидетельствуют о том, что уравнения Навье-Стокса неадекватно описывают течения с малыми кинетическими коэффициентами. Другим парадоксом является бесконечная скорость распространения малых возмущений температуры и вихря скорости в среде, подчиняющейся уравнениям обычной гидродинамики /21/. Полученные в настоящей работе уравнения позволяют устранить эти парадоксы, в частности, приводят к конечной скорости распространения малых возмущений. Эти вопросы будут рассмотрены в наших последующих работах.

Наконец, рассмотренный случай неограниченного возрастания кинетических коэффициентов может служить (в комбинации со скэйлингом) основой для описания процессов переноса вблизи критической точки.

Литература

1. Green M.S. J.Chem.Phys., 20 (1952) 1281; 22 (1953) 398.
2. McLennan J.A. Adv.Chem.Phys., 5 (1963) 261.
3. Zubarev D.N. Soviet Phys. Doklady 6 (1962) 776; 10 (1966) 452, 526, 850.
4. Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика, Москва, 1971.
5. Grossmann S., Z.Physik 233 (1970) 74.
6. Mott-Smith H., Phys.Rev., 82 (1951) 885.

7. Chambers R.Q. Proc.Roy.Soc., A215 (1952) 481.
8. Sondheimer E.H. Proc.Roy.Soc., A224 (1954) 260.
9. Pippard A.B. Proc.Roy.Soc., A224 (1954) 273.
10. Fixman M. J.Chem.Phys. 33 (1960) 1357; 47 (1967) 2808.
11. Felderhof B.U. J.Chem.Phys. 44 (1966) 602.
12. Тябликов С.В. Методы квантовой теории магнетизма, Москва, 1965.
13. Fisher M.E. J.Math.Phys., 5 (1964) 944.
14. Zubarev D.N. and Tishchenko S.V. Phys.Lett., 33A (1970) 444.
15. Зубарев Д.Н., Калашников В.П. ТМФ, 1, 137 (1969).
16. Kubö R. Lectures in Theoretical Physics, v. 1, New York, 1959.
17. Halperin B.I. and Hohenberg P.C. Phys.Rev.Lett., 19 (1967) 700; Phys.Rev., 177 (1969) 952.
18. Pippard A.B. Proc.Roy.Soc., A152 (1953) 24.
19. Cattaneo C. Atti del Seminario matematico e fisico della Universita do Modena, 3 (1948) 3; Compt.rend.Acad.sci., 246 (1958) 3154.
20. Brown J.B., Chung D.Y., Matthews P.W. Phys.Lett., 21 (1966) 241.
21. Weymann H.D. Amer.J.Phys., 35 (1967) 488.
22. Zwanzig R. and Moubtain R., J.Chem.Phys., 43 (1965) 4464.
23. Anderson G.D. and Band W. Amer.J.Phys., 30 (1962) 831.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 сентября 1971 года.