

СЗЗ 3.4

202/21-71

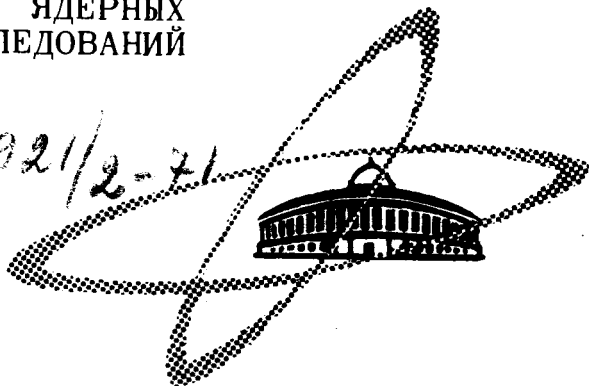
М-69

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P 4-6035

3921/2-71



ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

И.Н. Михайлов, Е.Наджаков,
Й. Пиперова, Б.Петров

ИНТЕНСИВНОСТИ ПЕРЕХОДОВ В ^{16}O

1971

P4-6035

И.Н. Михайлов, Е.Наджаков,
Й. Пиперова, Б.Петров

ИНТЕНСИВНОСТИ ПЕРЕХОДОВ В ^{16}O

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Введение

$SU(3)$ группа помогает при классификации состояний легких ядер. Классификация при этом производится по энергетическим уровням. Использование данных по вероятностям переходов для аналогичных целей затруднено тем, что в литературе отсутствует в достаточном объеме информация о структуре матричных элементов генераторов неприводимых представлений группы в "физическом базисе".

В настоящей работе представлен алгоритм расчёта приведенных матричных элементов генераторов группы для произвольных мультиплетов и приведены численные расчёты для одного из них.

Данная информация использована для параметризации оператора электрического перехода \hat{Q}_{EL} в мультиплете ${}^{16}0$.

§1. Полиномиальный базис представления группы $SU(3)$

В работе в существенной мере использованы результаты, полученные в^{1/}, где дан алгебраический способ построения неприводимых представлений группы $U(3)$. Базисные векторы этих представлений выражаются полиномами из операторов рождения осцилляторных квантов a_{ms}^+ ($m=1,0,1; s=1,2,\dots,N$).

Из генераторов группы $U(3)$, $C_m^m = \sum_{s=1}^N a_{ms}^+ a_{ms}^m$, замкнутых между собой относительно коммутации

$$[C_m^{m'}, C_m^{m''}] = C_m^{m''} \delta_m^{m'} - C_m^{m'} \delta_m^{m''}, \quad (1.1)$$

можно образовать тензоры Рака ранга 2, 1 и 0

$$Q_m = \sqrt{5} \sum_{m''} (-1)^{m''} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ m'' & m & -m \end{pmatrix} C_m^{m''}, \quad -2 \leq m \leq 2 \quad (1.2)$$

$$L_q = \sqrt{6} \sum_{m''} (-1)^{m''} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m'' & q & -m \end{pmatrix} C_m^{m''}, \quad -1 \leq q \leq 1 \quad (1.3)$$

$$H_0 = \sum_q C_q^q, \quad (1.4)$$

которые также являются полным набором генераторов группы $U(3)$. Обычно компоненты симметрического тензора Q_m отождествляются с пятью компонентами оператора квадрупольного момента. Операторы L_q представляют собой генераторы группы $R(3)$ и, следовательно, могут быть отождествлены с компонентами углового момента. Такой выбор генераторов группы $U(3)$ соответствует редукции $U(3) \supset R(3)$. Если ограничимся группой $SU(3)$, чьи неприводимые представления обозначаются индексами $[k_1, k_2]$ ($k_1 = h_1 - h_3$, $k_2 = h_2 - h_3$), и введем символы

$$\Delta_m^s \equiv a_{ms}^+; \quad \Delta_{mm}^{ss'} \equiv a_{ms}^+ a_{m's}^+, -a_{m's}^+, a_{ms}^+; \quad (1.5)$$

$$s = \sum_m (-1)^m \Delta_m^1 \Delta_{-m}^1; \quad w_+ = \sum_m (-1)^m \Delta_{1m}^{12} \Delta_{-m}^1;$$

$$v = \frac{1}{2} \sum_{mm'} (-1)^{m+m'} \Delta_{mm}^{12} \Delta_{-m-m'}^{12},$$

то полиномиальный базис, соответствующий редукции $SU(3) \supset R(3)$, можно записать в следующем виде

$$|k_1 k_2 q \lambda \mu\rangle = \sqrt{\frac{(\lambda + \mu)!}{(\lambda - \mu)! (2\lambda)!}} (L_1)^{\lambda - \mu} |k_1 k_2 q \lambda \lambda\rangle \quad (1.6)$$

$$|k_1 k_2 q \lambda \lambda\rangle = w_+^\gamma (\Delta_1^1)^{\xi + 2q} (\Delta_{10}^{12})^{\eta - 2q} s^{3-q} v^q, \quad (1.7)$$

где для чётных $(k_1 - \lambda)$

$$\begin{aligned} \gamma &= 0, \quad \xi = -k_2 + \lambda, \quad \eta = k_2, \\ \xi &= \frac{1}{2}(k_1 - \lambda), \end{aligned} \quad (1.8)$$

а q принимает целые значения, ограниченные неравенствами

$$0 \leq 2q \leq k_2, \quad k_2 - \lambda \leq 2q \leq k_1 - \lambda. \quad (1.9)$$

Если $(k_1 - \lambda)$ нечётное, то

$$\begin{aligned} \gamma &= 1, \quad \xi = -k_2 + \lambda, \quad \eta = k_2 - 1, \\ \xi &= \frac{1}{2}(k_1 - \lambda - 1) \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$0 \leq 2q \leq k_2 - 1, \quad k_2 - \lambda \leq 2q \leq k_1 - \lambda - 1. \quad (1.11)$$

Из генераторов (1.2) и (1.3) построим эрмитовские операторы

$$\Omega = \sum_{\nu \rho m} \sqrt{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \nu & \rho & m \end{pmatrix} Q_m L_\nu L_\rho \quad (1.12)$$

и

$$M_m = \sum_{\mu\nu} (-1)^{1-m} \sqrt{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \mu & \nu & -m \end{pmatrix} Q_\mu L_\nu. \quad (1.13)$$

Оператор Ω /2/ является скаляром для данного $SU(3)$ мультиплетта и имеет смысл проекции тензора квадрупольного момента на направленные углового момента.

Далее находим действие операторов Q_2 и M_1 на полиномы $|k_1 k_2 q \lambda \lambda\rangle$

$(k_1, -\lambda)$ чётное

$$Q_2 |k_1 k_2 q \lambda \lambda\rangle = -2 \left\{ \frac{1}{2} (k_1, -\lambda - 2q) |k_1 k_2 q \lambda + 2 \lambda + 2\rangle + q |k_1 k_2 q - \lambda + 2 \lambda + 2\rangle \right\} \quad (1.14)$$

$$M_1 |k_1 k_2 q \lambda \lambda\rangle = -2 \sqrt{\frac{3}{5}} \left\{ \frac{1}{2} (-k_2 + 2q) (k_1, -\lambda - 2q) |k_1 k_2 q \lambda + 1 \lambda + 1\rangle + q (\lambda - k_2 + 2q) |k_1 k_2 q - 1 \lambda + 1 \lambda + 1\rangle \right\} \quad (1.15)$$

$(k_1, -\lambda)$ нечётное

$$Q_2 |k_1 k_2 q \lambda \lambda\rangle = -2 \left\{ \frac{1}{2} (k_1, -\lambda - 2q - 1) |k_1 k_2 q \lambda + 2 \lambda + 2\rangle + q |k_1 k_2 q - 1 \lambda + 2 \lambda + 2\rangle \right\} \quad (1.16)$$

$$M_1 |k_1 k_2 q \lambda \lambda\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}} \left\{ [\lambda + 2 + 2q(-k_2 + \lambda + 2q + 1) + (k_1, -\lambda - 2q - 1)(k_2 - 2q)] |k_1 k_2 q \lambda + 1 \lambda + 1\rangle - (k_1, -\lambda - 2q - 1)(k_2 - 2q - 1) |k_1 k_2 q + 1 \lambda + 1 \lambda + 1\rangle - 2q(-k_2 + \lambda + 2q) |k_1 k_2 q - 1 \lambda + 1 \lambda + 1\rangle \right\}.$$

Для оператора Ω в общем случае можно написать

$$\Omega |k_1 k_2 q \lambda \mu\rangle = \sum_q \beta_{qq} |k_1 k_2 q \lambda \mu\rangle, \quad (1.18)$$

где отличные от нуля коэффициенты β_{qq} , определяются формулами/2/

$(k_1 - \lambda)$ чётное

$$0 \leq 2q \leq k_2, \quad k_2 - \lambda \leq 2q \leq k_1 - \lambda$$

$$\beta_{q-1q} = -2q(\lambda - k_2 + 2q)(\lambda - k_2 + 2q - 1)$$

$$\beta_{q+1q} = (k_2 - 2q)(k_2 - 2q - 1)(k_1 - \lambda - 2q)$$

$$\beta_{qq} = (k_2 - 2q)^2(k_1 + 1) + (k_2 - 2q)(\lambda - k_2 + 2q)(\lambda + 4q + 1) + \quad (1.19)$$

$$+ (k_2 - 2q) + k_2\lambda - \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + \frac{3}{2})\lambda(\lambda + 1)$$

$(k_1 - \lambda)$ нечётное

$$0 \leq 2q \leq k_2 - 1, \quad k_2 - \lambda \leq 2q \leq k_1 - \lambda - 1$$

$$\beta_{q-1q} = -2q(\lambda - k_2 + 2q)(\lambda - k_2 + 2q - 1)$$

$$\beta_{q+1q} = (k_2 - 2q - 1)(k_2 - 2q - 2)(k_2 - \lambda - 2q - 1)$$

(1.20)

$$\beta_{qq} = (k_2 - 2q - 1)[(2k_1 + 2\lambda + 3) + (k_2 - 2q - 1)(k_1 - 1) + (\lambda - k_2 + 2q)(\lambda + 4q)] +$$

$$+ (k_1 + 1) + (k_2 - 1)(\lambda - 1) - \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + \frac{3}{2})\lambda(\lambda + 1).$$

§2. Построение базиса унитарного неприводимого представления группы $SU(3)$

Полиномы $|k_1 k_2 q \lambda \mu\rangle$ образуют полную, но не ортонормированную по q систему и являются базисом неунитарного неприводимого представления $[k_1, k_2]$ группы $SU(3)$. Из линейных комбинаций этих полиномов можно построить собственные функции оператора Ω (1.12), которые являются базисом унитарного неприводимого представления группы $SU(3)$. Для этого нужно найти линейные комбинации

$$|k_1 k_2 \omega \lambda \mu\rangle = \sum_q a_q^\omega |k_1 k_2 q \lambda \mu\rangle, \quad (2.21)$$

удовлетворяющие уравнению

$$\Omega |k_1 k_2 \omega \lambda \mu\rangle = \omega |k_1 k_2 \omega \lambda \mu\rangle. \quad (2.22)$$

В^{2/} показано, что все собственные значения ω оператора Ω различны (при фиксированных λ и μ) и могут быть найдены из уравнений

$$\det(\beta_{qq'} - \omega \delta_{qq'}) = 0. \quad (2.23)$$

Из (2.22) и условия нормировки собственных функций $|k_1 k_2 \omega \lambda \lambda\rangle$

$$\langle k_1 k_2 \omega \lambda \lambda | k_1 k_2 \omega' \lambda \lambda \rangle = \delta_{\omega \omega'} \quad (2.24)$$

$$= \sum_{qq'} a_q^\omega a_{q'}^{\omega'} \sum_{\sigma\tau} \langle \sigma\tau(k_1 k_2) q \lambda \rangle \langle \sigma\tau(k_1 k_2) q' \lambda \rangle$$

находим искомые коэффициенты a_q^ω . При этом в (2.24) нами использована реляция

$$|k_1 k_2 q \lambda \lambda\rangle = \sum_{\sigma\tau} \langle \sigma\tau(k_1 k_2) q \lambda \rangle |k_1 k_2 \sigma\tau = \frac{\lambda}{2}\rangle, \quad (2.25)$$

где функции $|k_1 k_2 \sigma \tau r = \frac{\lambda}{2}\rangle$ являются базисом унитарного неприводимого представления $[k_1, k_2]$ редукции $SU(3) \supset SU(2)$. Коэффициенты связи даются формулой (4.13) в статье^{1/}.

Полиномы

$$|k_1 k_2 \omega \lambda \lambda\rangle = \sum_q \sum_{\sigma \tau} a_q^\omega \langle \sigma \tau (k_1 k_2) q \lambda \rangle |k_1 k_2 \sigma \tau r = \frac{\lambda}{2}\rangle \quad (2.26)$$

вместе с полиномами, полученными из (2.26) действием оператора $(L_+)^{\lambda-\mu}$ (см. (1.6)), образуют базис унитарного неприводимого представления $[k_1, k_2]$ редукции $SU(3) \supset R(3)$.

Интересно найти приведенные матричные элементы оператора квадратного момента (1.2) в так построенном ортонормированном базисе. Это можно сделать, используя теорему Вигнера-Эккарта^{3/} и определенные в первом параграфе операторы Ω и M . Получены следующие выражения для приведенных матричных элементов^{x/}

$$\langle \omega' \lambda + 2 || Q || \omega \lambda \rangle = \frac{\langle \omega' \lambda + 2 \lambda + 2 | Q_2 | \omega \lambda \lambda \rangle}{\begin{pmatrix} \lambda + 2 & 2 & \lambda \\ -\lambda - 2 & 2 & \lambda \end{pmatrix}} \quad (2.27)$$

$$\langle \omega' \lambda + 1 || Q || \omega \lambda \rangle = \frac{\langle \omega' \lambda + 1 \lambda + 1 | M_1 | \omega \lambda \lambda \rangle}{\sqrt{3\lambda(\lambda+1)(2\lambda+1)} \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 1 & \lambda \\ -\lambda - 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda + 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 2 \end{Bmatrix}} \quad (2.28) \quad \gg \gg$$

^{x/} Здесь опущены индексы $[k_1, k_2]$, так как они фиксированы для данного неприводимого представления.

$$\langle \omega \lambda \| Q \| \omega \lambda \rangle = \frac{\omega \lambda \delta \omega \omega'}{\sqrt{5} \lambda (\lambda + 1) \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{Bmatrix}} \quad (2.28)$$

где обыкновенные матричные элементы в (2.27) и (2.28) получаются при помощи разложения (2.21) и формулы (1.14) - (1.17).

83. Расчёт мультиплета [6, 2]

Конкретные расчёты мы провели на примере мультиплета [6, 2] группы $SU(3)$, который связывается со спектром $1^6 0 / 4/$.

При редукции $SU(3) \supset R(3)$ согласно ^{/5/} в этом мультиплете появятся следующие угловые моменты

$$\begin{aligned} \lambda = 0, 2, 4 & \quad K = 0 \\ \lambda = 2, 3, 4, 5, 6 & \quad K = 2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Следуя описанной в параграфах 1 и 2 процедуре построения базисных полиномов $|k_1 k_2 \omega \lambda \mu\rangle$ для случая мультиплета [6, 2] получаем

$$|\omega_6'' 66\rangle = \frac{1}{\sqrt{2016}} |066\rangle \quad \omega_6'' = -35 \quad (3.31)$$

$$|\omega_5'' 55\rangle = \frac{1}{\sqrt{1512}} |055\rangle \quad \omega_5'' = -39$$

$$|\omega_4' 44\rangle = \frac{1}{\sqrt{3036}} \{ 0,5 |044\rangle - |144\rangle \} \quad \omega_4' = -\frac{160}{3}$$

$$|\omega_4'' 44\rangle = \frac{1}{\sqrt{231840}} \{ 12 |044\rangle - |144\rangle \} \quad \omega_4'' = -\frac{22}{3}$$

$$|\omega_3'' 33\rangle = \frac{1}{\sqrt{2160}} |033\rangle, \quad \omega_3'' = 0$$

$$|\omega_2' 22\rangle = \frac{1}{\sqrt{39179 - 2485\sqrt{193}}} \left\{ \frac{15 - \sqrt{193}}{8} |022\rangle - |122\rangle \right\}, \quad \omega_2' = -\sqrt{193}$$

$$|\omega_2'' 22\rangle = \frac{1}{\sqrt{39179 + 2485\sqrt{193}}} \left\{ \frac{15 + \sqrt{193}}{8} |022\rangle - |122\rangle \right\}, \quad \omega_2'' = \sqrt{193}$$

$$|\omega_0' 00\rangle = \frac{1}{\sqrt{23520}} |100\rangle, \quad \omega_0' = 0.$$

где полиномы $|\varrho \lambda \lambda\rangle$ - базис неунитарного представления (см. (1.7)), а ω'' соответствует максимальному значению ω для данного углового момента.

Легко проверить, используя явный вид коэффициентов $\langle \sigma(62) \varrho \lambda \rangle$, что полиномы $|\omega \lambda \lambda\rangle$ вместе с полиномами, полученными действием оператора $(L_{\bar{7}})^{\lambda-\mu}$ на (3.31), образуют ортонормированную систему базисных функций унитарного представления [6, 2] группы $SU(3)$. Полнота системы доказана в [2].

Получены следующие приведенные матричные элементы оператора квадрупольного момента:

$$a) \langle \omega' \lambda \parallel Q \parallel \omega' \lambda' \rangle$$

$\lambda \backslash \lambda'$	0	2	4
0	0		
2	4,71122	6,77882	
4		5,36016	9,98700

δ) $\langle \omega^{\lambda} \lambda \parallel Q \parallel \omega^{\lambda'} \lambda' \rangle$

$\lambda \backslash \lambda'$	2	3	4	5	6
2	6,77882				
3	7,44909	0			
4	5,2959I	7,89496	I,3732I		
5		5,54977	4,32988	5,34790	
6			7,39683	6,96659	3,71320

ε) $\langle \omega^{\lambda} \lambda \parallel Q \parallel \omega^{\lambda'} \lambda' \rangle$

$\lambda \backslash \lambda'$	0	2	4
2	2,9I052	0	I,I0I1I
3		4,60I92	-2,I7798
4		4,5029I	0
5			6,75664
6			2,938I0

84. Параметризация электромагнитных переходов в ^{16}O

Проанализируем теперь вероятность $E2$ -переходов в ^{16}O . Наблюдаемые на опыте ротационные полосы мы идентифицируем как расцепленный [6,2] мультиплет $SU(3)$ группы. Предположим сначала, что оператор, вызывающий электрические переходы внутри мультиплета, пропорционален \hat{Q} . Приведенные вероятности для такого оператора равны

$$B(E2; \omega_i \lambda_i \rightarrow \omega_f \lambda_f) = a^2 \frac{|\langle \omega_i \lambda_i || \hat{Q} || \omega_f \lambda_f \rangle|^2}{2\lambda_i + 1} \quad (4.32)$$

Экспериментально найдены ^{/6/} следующие вероятности переходов:

$$B(E2; \omega_2' 2 \rightarrow \omega_0' 0) = 40 e^2 fm^4 \quad (4.33a)$$

$$B(E2; \omega_4' 4 \rightarrow \omega_2' 2) = 117 e^2 fm^4 \quad (4.33b)$$

Если из (4.33a) определим параметр $a (a = 3,00180 e fm^2)$ и с этим значением вычислим (4.33b), то получим $B(E2; \omega_4' 4 \rightarrow \omega_2' 2) = 28,7509 e^2 fm^4$. Отсюда ясно, что выбор оператора электрического перехода в виде $\hat{Q}_{El} = a \hat{Q}$ не является достаточно хорошим. Простейшее обобщение этого оператора состоит в добавлении члена пропорционального $\hat{Q} \hat{I}^2$, т.е. предполагается, что

$$\hat{Q}_{El} = a \hat{Q} + b (\hat{Q} \hat{I}^2 + \hat{I}^2 \hat{Q}) \quad (4.34)$$

Из данных (4.33a) и (4.33b) находим параметр a и b

$$a = 2,08610 e fm^2$$

$$b = 0,15261 e fm^2$$

и предсказываем следующие вероятности переходов

$$B(E2; \omega_6''6 \rightarrow \omega_5''5) = 638,13862 \cdot 2f m^4$$

$$B(E2; \omega_6''6 \rightarrow \omega_4'4) = 88,55157 \cdot 2f m^4$$

$$B(E2; \omega_6''6 \rightarrow \omega_4''4) = 561,24830 \cdot 2f m^4$$

$$B(E2; \omega_5''5 \rightarrow \omega_4'4) = 391,82975 \cdot 2f m^4$$

$$B(E2; \omega_5''5 \rightarrow \omega_4''4) = 160,91147 \cdot 2f m^4$$

$$B(E2; \omega_5''5 \rightarrow \omega_3''3) = 202,09644 \cdot 2f m^4$$

$$B(E2; \omega_4'4 \rightarrow \omega_3''3) = 15,48790 \cdot 2f m^4$$

$$B(E2; \omega_4'4 \rightarrow \omega_2'2) = 1,52388 \cdot 2f m^4$$

$$B(E2; \omega_4''4 \rightarrow \omega_3''3) = 336,41534 \cdot 2f m^4$$

$$B(E2; \omega_4''4 \rightarrow \omega_2'2) = 82,57016 \cdot 2f m^4$$

$$B(E2; \omega_4''4 \rightarrow \omega_2''2) = 114,21374 \cdot 2f m^4$$

$$B(E2; \omega_3''3 \rightarrow \omega_2'2) = 70,66899 \cdot 2f m^4$$

$$B(E2; \omega_3''3 \rightarrow \omega_2''2) = 185,16390 \cdot 2f m^4$$

$$B(E2; \omega_2''2 \rightarrow \omega_0'0) = 15,26596 \cdot 2f m^4$$

Авторы выражают благодарность Г.Ц. Афанасьеву и Г. Керчеву за полезные обсуждения.

Литература

1. M.Moshinsky. Rev.Mod.Phys., 34 (1962), N.4, p.813.
2. V.Bargmann, M.Moshinsky. Nucl.Phys., 18, (1960) 697;
Nucl.Phys., 23, (1961) 177.
3. А. Эдмондс. Сборник "Деформация атомных ядер", ИЛ, Москва (1958).
4. I.N.Mikhailov, E.Nadjakov. Pr. E4-4884 (1970).
5. J.P.Elliott. The Nuclear Shell Model in "Selected Topics in Nuclear Theory", IAEA, Vienna, 1963.
6. G.E.Brown, A.M.Green. Nucl.Phys., 75, (1966) 401.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 сентября 1971 года.

Михайлов И.Н., Наджаков Е., Пиперова И., Петров Б.

P4-6035

Интенсивности переходов в ^{16}O

Группа $SU(3)$ применяется для анализа вероятностей $E2$ -переходов в ^{16}O .

Сообщения Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1971

Mikhailov I.N., Nadzhakov E., Piperova I., Petrov B. P4-6035

Intensities of Transitions in ^{16}O

$SU(3)$ group is used for the analysis of the probabilities of $E2$ -transitions in ^{16}O .

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1971