ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4-5586

Г.Н.Афанасьев, И.Н.Михайлов, П.П.Райчев

О ФЕРМИОННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ГРУПП В ЯДРАХ

1971

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4-5586

Г.Н.Афанасьев, И.Н.Михайлов, П.П.Райчев

О ФЕРМИОННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ГРУПП В ЯДРАХ

Направлено в ЯФ

1. Методы теории групп в последнее время широко применяются в явном или неявном виде к задачам ядерной физики [1-15]. Основой для такого применения является наличие в наблюдаемых спектрах ядер некоторых закономерностей. Например, оправданием для использования групп $SU(3)$ или $SL(3,R)$ служит наличие в ядрах мультиплетов, составленных из ротационных полосок [1-5]. Группа $SU(5)$ употребляется в сферических ядрах для описания двух-и трехфононных уровней [6-9]. Спин-изоспиновая группа $SU(4)$ применяется для описания вигнеровских супермультиплетов.

Процесс использования теории групп в ядерной физике можно условно разбить на два этапа. На первом этапе мы постулируем какую-либо симметрию в ядре (либо нарушаем ее определенным способом) и анализируем проистекающие отсюда следствия (энергетический спектр, вероятности переходов и т.д.). При этом мы отвлекаемся от реализации используемой алгебры операторов. На втором этапе мы принимаем во внимание, что реальные ядра состоят из фермионов, и выясняем, какие операторные алгебры можно построить из фермионных операторов. Анализу этих последних вопросов и посвящена данная работа.

При этом мы исключаем из рассмотрения алгебры, определяемые геометрическими размерами оболочки и числом частиц в ядре /13-14/. Построенные алгебры оказываются одними и теми же для всех ядер, и мы поэтому называем их универсальными.

2. Рассмотрим прежде всего операторы, сохраняющие число фермионов, т.е. операторы вида

$$F_i = \sum_{1,2} \langle 1 | f_i | 2 \rangle a_1^+ a_2 . \tag{2.1}$$

Здесь символы (1,2) обозначают совокупность одночастичных индексов. Последующие выводы не зависят от выбора одночастичного базиса. Ради простоты можно, например, выбрать функции гармонического сферического осциллятора. В этом случае $1 \equiv (n, \ell, m)$, где n - радиальное квантовое число, ℓ - угловой момент частицы, m - третья проекция момента.

Из (2.1) следует

$$[F_i, F_k] = \sum \langle 1 | [f_i, f_k] | 2 \rangle a_1^+ a_2 .$$

Таким образом, алгебра операторов F_i, составленных из операторов рождения и уничтожения фермионов, изоморфна алгебре операторов f_i, действующих в пространстве одночастичных функций. Изоморфизм этих алгебр отнюдь не предполагает эквивалентности представлений: как правило, операторы f_i реализуют весьма частные типы представлений, тогда как F_i могут реализовать самые общие представления алгебр. Одночастичные функции зависят только от координат трехмерного пространства x_1, x_2, x_3; поэтому операторы f_i могут зависеть только от x_i и $p_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$ или же от следующих их комбинаций:

$$\beta_0^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_3 - i p_3);$$

$$\beta_{\pm 1}^+ = \frac{1}{2i}[(x_1 \pm i x_2) - i(p_1 \pm p_2)];$$

$$\beta_\mu = (\beta_\mu^+)^+ , \quad [\beta_\mu , \beta_\nu^+] = \delta_{\mu\nu} .$$

Составим из x_i , p_k операторы углового момента

$$X_{ik} = x_i p_k - x_k p_i ,$$

$$\Lambda_0 = X_{12} = \beta_1^+ \beta_1 - \beta_{-1}^+ \beta_{-1} , \tag{2.2}$$
$$\Lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_{13} + i X_{23}) = \beta_1^+ \beta_0 + \beta_0^+ \beta_{-1} ,$$
$$\Lambda_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_{13} - i X_{23}) = \beta_0^+ \beta_1 + \beta_{-1}^+ \beta_0 .$$

Ясно, что наиболее общие функции f_i могут быть приведены к виду

$$f_m(x) f_n(p) \text{ или же } f_p(\beta^+), f_q(\beta) ,$$

где $f_m(x)$ есть многочлен степени m относительно x и т.д.

Если все операторы f_i содержат как x_i , так и p_k (соответственно как β_μ^+, так и β_μ), то алгебра коммутационных соотношений оказывается замкнутой при условии $m + n \leq 2$ ($p + q \leq 2$) . Если же среди функций f_i есть такие, которые зависят только от x_i (или только от p_i , или только от β_μ^+ , или только от β_μ) , то эти последние оказываются генераторами абелевой подгруппы. Полная алгебра становится неполупростой, и упомянутые ограничения отпадают. Удобно выбирать такие функции, чтобы они были неприводимыми тензорными операторами относительно группы вращений.

Кратко перечислим все алгебры, генераторы которых могут быть представлены в виде (2.1).

а) Алгебра углового момента (группа O(3))

$$L_\mu = \Sigma <1 \mid \Lambda_\mu \mid 2> a^+_1 a_2 \ .$$

б) Алгебра фононов

$$b_\mu = \Sigma <1 \mid \beta_\mu \mid 2> a^+_1 a_2 ,$$

$$b^+_\mu = \Sigma <1 \mid \beta^+_\mu \mid 2> a^+_1 a_2 \ .$$

в) Группа SU(3). Она состоит из генераторов L_μ вместе с генераторами Q_μ, ($\mu = 0, \pm 1, \pm 2$), где

$$Q_0 = \frac{1}{3} \Sigma <1 \mid (\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} - x_3^2 + \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - p_3^2) \mid 2> a^+_1 a_2 , \tag{2.3а}$$

а остальные генераторы находятся при помощи соотношений

$$Q_1 = [L_1, Q_0], \ Q_2 = [L_1, [L_1, Q_0]] ,$$
$$Q_{-\mu} = Q^+_\mu \ . \tag{2.3б}$$

Они удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[Q_1, Q_{-1}] = L_0 , [Q_2, Q_{-2}] = 4 L_0 \qquad \text{и. т.д.}$$

г) Группа SL (3, R). Она состоит из трех операторов углового момента L_μ и операторов $\tilde{\tilde{Q}}_\mu$ ($\mu = 0, \pm 1, \pm 2$) .

Здесь

$$\tilde{\tilde{Q}}_0 = \frac{1}{3} \Sigma' <1 \mid (x_1 p_1 + x_2 p_2 - 2 x_3 p_3) \mid 2> a^+_1 a_2 \ . \tag{2.4а}$$

Остальные $\tilde{\tilde{Q}}_\mu$ получаются при помощи соотношений

$$\tilde{\tilde{Q}}_1 = [L_1, \tilde{\tilde{Q}}_0], \quad \tilde{\tilde{Q}}_2 = [L_1, [L_1, \tilde{\tilde{Q}}_0]],$$
$$\tilde{\tilde{Q}}_{-\mu} = \tilde{\tilde{Q}}_\mu^+ . \qquad (2.4б)$$

В отличие от генераторов Q_μ группы $SU(3)$ генераторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\tilde{\tilde{Q}}_1, \tilde{\tilde{Q}}_{-1}] = -L_0, \quad [\tilde{\tilde{Q}}_2, \tilde{\tilde{Q}}_{-2}] = -4L_0 \qquad \text{и т.д.}$$

д) Группа $Sp(3,3)$. К этой группе можно прийти двумя способами.

Во-первых, дополняя алгебру $SL(3,R)$ операторами

$$\pi_0 = \Sigma < 1 | (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) | 2 > a_1^+ a_2 ,$$

$$[L_\mu, \pi_0] = 0 ;$$

$$\pi_0^{(2)} = \frac{1}{3} \Sigma < 1 | (p_2^2 + p_2^2 - 2p_3^2) | 2 > a_1^+ a_2 ,$$

$$\pi_{\pm 1}^{(2)} = \pm [L_{\pm 1}, \pi_0^{(2)}], \quad \pi_{\pm 2}^{(2)} = [L_{\pm 1}, [L_{\pm 1}, \pi_0^{(2)}]]; \qquad (2.5а)$$

$$\chi_0 = \Sigma < 1 | (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) | 2 > a_1^+ a_2 ,$$

$$[L_\mu, \chi_0] = 0 ;$$

$$\chi_0^{(2)} = \frac{1}{3} \Sigma < 1 \mid (x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2) | 2 > a_1^+ a_2 \;,$$

$$\chi_{\pm 1}^{(2)} = \pm [L_{\pm 1}, \chi_0^{(2)}] , \; \chi_{\pm 2}^{(2)} = [L_{\pm 1} [L_{\pm 1}, \chi_0^{(2)}]$$

и

$$C = \Sigma < 1 \mid (x.p + p.x) | 2 > a_1^+ a_2 \;. \tag{2.5б}$$

Во-вторых, к этой группе можно прийти, дополняя генераторы группы SU (3) операторами

$$B_0 = \Sigma < 1 \mid (\beta_0^{+2} - 2 \beta_1^+ \beta_{-1}) | 2 > a_1^+ a_2 \;,$$

$$[L_\mu, B_0] = 0 \;,$$

$$B_0^{(2)} = \frac{1}{6} \Sigma < 1 \mid (\beta_1^+ \beta_{-1}^+ + \beta_0^{+2}) | 2 > a_1^+ a_2 \;, \tag{2.6а}$$

$$B_{\pm 1}^{(2)} = [L_{\pm 1}, B_0^{(2)}] , B_{\pm 2}^{(2)} = [L_{\pm 1}, [L_{\pm 1}, B_0^{(2)}]] ,$$

$$C_1 = \Sigma < 1 \mid (x^2 + p^2) | 2 > a_1^+ a_2$$

и эрмитово сопряженными к ним.

е) Группа O(4). Кроме операторов углового момента, имеем еще операторы K_0, $K_{\pm 1}$.

$$K_0 = \frac{p_{-1} L_1 - L_{-1} p_1}{i\sqrt{-p^2}},$$

$$K_1 = \frac{p_0 L_1 - L_0 p_1}{i\sqrt{-p^2}}, \quad K_{-1} = (K_1)^+$$

(вектор Рунге-Ленца).

ж) Группа O(3,1).

$$K_0 = \frac{p_{-1} L_1 - L_{-1} p_2}{i\sqrt{p^2}},$$

$$K_1 = \frac{p_0 L_1 - L_0 p_1}{i\sqrt{p^2}}, \quad K_{-1} = (K_1)^+ .$$

Нам кажется O(3,1), представления которой содержат все значения углового момента, большие некоторого ℓ_0, точно по одному разу, является одним из наиболее подходящих кандидатов для описания ротационных мультиплетов.

Мы перечислим все полупростые группы, генераторы которых представимы в виде (2.1) (исключая расширения $SU(3) \to SU(3,1)$, которые даны в /17/). Генераторы абелевых подгрупп, входящих в неполупростые группы, суть функции только x_i (или p_i, или β^+_μ, или β_μ). Удобно выбрать такие их комбинации, которые являются тензорными операторами как относительно трехмерных вращений, так и относительно унитарных преобразований в трехмерном пространстве.

Пусть $T^{n\ell}_m(x)$ - одна из компонент тензорного оператора, зависящего, к примеру, только от x_i:

$$T^{n\ell}_m(x) = r^\ell \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) L^{\ell+1/2}_n(r^2)\, Y_{\ell m}(\theta,\phi),$$

где L^k_n - полиномы Лагера, а $Y_{\ell m}$ - сферические функции. Тогда фермионная реализация операторов $T^{n\ell}_m(x)$ имеет вид

$$T^{n\ell}_m = \Sigma\,(n_1\ell_1 m_1\, n\ell m\,|\,n_2\,\ell_2\,m_2)\, a^+(n_1\ell_1 m_1)\, a^+(n_2\ell_2\,m_2),$$

где $(n_1\ell_1 m_1\, n\,\ell\, m\,|\,n_2\ell_2 m_2)$ - коэффициент векторного сложения, возникающий при редукции двух наиболее симметричных представлений $SU(3)$ (или, что в данном случае одно и то же, - коэффициенты Броди-Мошинского).

Наиболее важной из неполупростых групп для нас является неоднородная группа вращения $IO(3)$, которая, кроме генераторов трехмерных вращений L_μ, содержит генераторы сдвигов вдоль координатных осей p_k.

3. Включим теперь в рассмотрение операторы, меняющие число фермионов. Положим

$$F_i = \Sigma <1 \mid f_i \mid 2> a_1^+ a_2 \ ,$$

$$G_i = \Sigma <1 \mid g_i \mid 2> a_1^+ a_2^+ \ ,$$

$$H_i = \Sigma <1 \mid g_i^+ \mid 2> a_1 a_2 \ .$$

Имеем:

$$[F_i \ , G_j] = 2 \Sigma <1 \mid g_i \ f_j \mid 2> a_1^+ a_2^+ \ ,$$

$$[G_i \ , H_k] = 4 \Sigma <1 \mid g_i g_k^+ \mid 2> a_1^+ a_2 - 2 \Sigma <1 \mid g_i g_k^+ \mid 1> .$$

Если, как и ранее, мы предположим, что f_i образуют замкнутую алгебру, то совокупность операторов F_i , G_j , H_k будет замкнута, если произведения $f_i g_k$ входят в совокупность операторов g_k , а произведения $g_i \ g_k^+$ входят в совокупность f_k . Ясно, что это возможно только для тривиальных операторов типа матриц Паули, операторов инверсии(пространства, времени) и т.д.

4. Посмотрим, к чему приведет учет спина и изоспина фермионов. Любой оператор F может быть представлен в виде

$$F = F^{(0,0)} + F^{(1,0)} + F^{(0,1)} + F^{(1,1)} .$$

Индексы (σ , τ) обозначают неприводимое представление относительно вращения в спиновом и изоспиновом пространствах, по которому преобразуются операторы $F^{(\sigma,\tau)}$. Например, $F^{(0,0)}$ содержит в себе все функции, рассмотренные в п.2. Операторы $F^{(0,1)}$ содержат операторы вида

$$F_k^{(0,1)} = \Sigma < 1 \mid f\ \tau_k \mid 2 > a_1^+ a_2 \ , \qquad (4.1)$$

где τ_k – одна из изоспиновых матриц Паули, индексы (1,2) включают спин-изоспиновые переменные, а f – набор тензорных операторов, состоящих из координат и импульсов, который был рассмотрен ранее (п.2). Если в качестве f взять скалярную функцию (не зависящую от координат и импульсов), то мы получаем вигнеровскую группу $SU(4)$ для операторов $F^{(\lambda,\mu)}$. Дополняя $SU(4)$ операторами G, H (п.3) и выбирая в качестве g_i оператор обращения и спин-изоспиновые матрицы Паули, мы приходим к группе $O(8)$ /12/.

5. Особенно привлекательной в вышеприведенном перечне операторов является возможность строить операторы фононов из фермионов. Эти фононы удобно взять в качестве "кирпичиков" для построения замкнутой алгебры операторов. Легко видеть, что из таких фононов можно построить те же алгебры, что и упомянутые выше с тем, однако, ограничением, что мы получаем только наиболее симметричные представления алгебр. Например, построим из фононов генераторы $SU(3)$ и $SL(3,R)$. Генераторы группы "углового момента" равны

$$L_0 = b_1^+ b_1 - b_{-1}^+ b_{-1} \ , \quad L_1 = b_1^+ b_0 + b_0^+ b_{-1} \ , \qquad (5.1)$$

$$L_{-1} = (L_{+1})^+ \ .$$

Группа $SU(3)$ получается, если дополнить (5.1) оператором

$$Q_0 = \frac{1}{3}(b_1^+ b_1 + b_{-1}^+ b_{-1} - 2 b_0^+ b_0)$$

и всеми теми операторами, которые находятся коммутацией Q_0 с L_k и эрмитовым сопряжением.

К группе $SL(3,R)$ приходим, вводя операторы

$$\tilde{\tilde{Q}}_0 = \frac{1}{3i}[b_1^+ b_{-1}^+ + (b_0^+)^2 - b_1 b_{-1} - b_0^2] = \frac{2}{3}(x_1 p_1 + x_2 p_2 - 2 x_3 p_3),$$

$$\tilde{\tilde{Q}}_1 = [L_1, \tilde{\tilde{Q}}_0] = \frac{1}{i}(b_1^+ b_0^+ + b_0 b_{-1}) = \frac{i}{\sqrt{2}}[x_3(p_1 + i p_2) + p_3(x_1 + i x_2)],$$

$$\tilde{\tilde{Q}}_2 = [L_1, \tilde{\tilde{Q}}_1] = \frac{1}{i}[(b_1)^2 - (b_{-1})^2] = \frac{1}{i}(x_1 + i x_2)(p_1 + i p_2).$$

Операторы Казимира для $SU(3)$ и $SL(3,R)$ в данном случае определяются собственным значением операторов

$$C = b_\mu^+ b_\mu \quad \text{для} \quad SU(3),$$

$$\tilde{\tilde{C}} = xp = \frac{1}{2i}[b_0^2 - 2 b_1 b_{-1} - (b_0^+)^2 \; 2 b_1^+ b_{-1}] \quad \text{для} \quad SL(3,R).$$

6. Покажем, что включение взаимодействия между фононами, не нарушающего числа фермионов, приводит к эллиотовской ротационной полоске. В самом деле, имеем

$$V = \sum_{\substack{L=0,2\\M}} G_L [b^+ b^+]\,[b b]_M^L = \qquad (6.1)$$

$$= \sum_{\substack{L'=0,1,2\\M}} F_{L'} [b^+ b]_M^{L'} [b^+ b]_M^{L'}.$$

Константы $F_{L'}$ равны

$$F_{L'} = \sum_{L=0,2} (2L+1) G_L W(1LL'; 11),$$

т.е.

$$F_0 = \frac{1}{3}(G_0 + 5 G_2), \quad F_1 = \frac{1}{3}(G_0 - \frac{5}{2} G_2),$$

$$F_2 = \frac{1}{3}(G_0 + \frac{1}{2} G_2).$$

Заметим, что (6.1) есть инвариантная квадратичная комбинация генераторов группы $SU(3)$. Квадратичная скалярная комбинация квадрупольных компонент может быть выражена через оператор Казимира второго порядка $SU(3)$ (который для данной реализации определяется в виде $C = b^+_\mu b_\mu$) и квадрат углового момента. Таким образом, взаимодействие (6.1) приводит к эллиотовскому спектру. Конечно, полученная таким образом вращательная полоса оказывается конечной.

Бесконечную ротационную полосу можно получить, если включить квадрупольно-квадрупольное взаимодействие, используя квадрупольные операторы $SL(3, \mathbb{R})$.

$$V = -\kappa \tilde{\tilde{Q}},$$

$$\tilde{\tilde{Q}}^2 = 3\tilde{\tilde{Q}}_0^2 + \tilde{\tilde{Q}}_1 \tilde{\tilde{Q}}_{-1} + \tilde{\tilde{Q}}_{-1} \tilde{\tilde{Q}}_1 + \frac{1}{2}(\tilde{\tilde{Q}}_2 \tilde{\tilde{Q}}_{-2} + \tilde{\tilde{Q}}_{-2} \tilde{\tilde{Q}}_2).$$

С другой стороны,

$$\tilde{\tilde{Q}}^2 = \frac{4}{3}\tilde{\tilde{C}}^2 + L^2 .$$

Вибрационный спектр получается, если в гамильтониане оставить только оператор числа фононов $C = b_\mu b_\mu$. Добавляя к такому гамильтониану квадрупольное взаимодействие, составленное из компонент $\tilde{\tilde{Q}}_\mu$ группы $SL(3,R)$, и варьируя отношение между вибрационной и квадрупольной константами, мы можем получить непрерывный переход от чисто вибрационного спектра к чисто вращательному, не ограниченному по угловым моментам, спектру. Отметим два обстоятельства. При равной нулю константе квадрупольного взаимодействия мы получаем чисто вибрационный спектр, т.е. равноотстоящие мультиплеты $SU(3)$. Экспериментально наблюдаемые мультиплеты, однако, содержат угловые моменты, отличные от мультиплетов $SU(3)$. Например, $(\lambda, 0)$ – -мультиплет $SU(3)$ – содержит значения углового момента $\ell = \lambda, \lambda-2, \ldots, 0$ (или 1). Пусть по какой-то причине в нижней части энергетического спектра реализуются только мультиплеты с четными λ. В этом случае мы должны были бы наблюдать мультиплеты

$$\lambda = 0, \quad \ell = 0,$$
$$\lambda = 2, \quad \ell = 0, 2,$$
$$\lambda = 4, \quad \ell = 0, 2, 4,$$
$$\lambda = 6, \quad \ell = 0, 2, 4, 6$$

и т.д.

При переходе от вибрационных мультиплетов $SU(3)$ к бесконечной ротационной полоске становятся "плохими" как квантовые числа $SU(3)$, так и квантовые числа $SL(3,R)$. При этом сохраняют смысл квантовые числа $Sp(3,3)$. Таким образом, четко прослеживается роль $Sp(3,3)$ как группы динамической симметрии данной системы /3/, осуществляющей переход от вибрационного к ротационному спектру. Аналогичное рассмотрение для квадрупольных фононов дано в /8/.

7. Применимость каждой из вышеперечисленных алгебр к конкретным случаям определяется динамикой системы, в частности видом взаимодействия между нуклонами. В связи с этим возникает два вопроса:

а) какие из перечисленных алгебр могут быть группами динамической симметрии ядра?

б) исчерпывают ли эти алгебры известные или предполагаемые симметрии в ядрах?

Что касается первого вопроса, то хорошо бы иметь некоторый принцип, который позволял бы из совокупности алгебр отобрать некоторые. Можно, например, требовать, чтобы динамическая группа содержала некоторые очевидные группы, относительно которых должен быть инвариантен гамильтониан всякой замкнутой системы частиц. К ним относятся прежде всего группа поворотов и трансляции в трехмерном пространстве. Такие операции содержатся в группе $I\ O(3)$. Эта группа, будучи неполупростой, непосредственно в рассматриваемых алгебрах не содержится, однако может быть вложена в них при тривиальном их расширении. Наконец, желательно, чтобы динамическая группа содержала операторы, осуществляющие переходы между различными состояниями системы. Единственной группой, содержащей переходы как между вибрационными, так и между ротационными уровнями, является $Sp(3,3)$.

Отметим также, что в перечне алгебр мы не обнаруживаем ортогональной группы (3A-3) измерений (группы симметрии A невзаимодействующих частиц) и унитарной группы той же размерности (группы симметрии A частиц, взаимодействующих по осцилляторному закону /14/). Точно так же нет в нашем списке группы $SU(2j+1)$, являющейся группой симметрии невзаимодействующих нуклонов, находящихся на j - оболочке /16/. Отсутствие таких алгебр в нашем перечне является следствием того, что указанные группы не являются универсальными.

Отметим, также, что спектры ряда сферических ядер указывают на наличие слабо расщепленных мультиплетов SU (5). Возникает вопрос о фермионной реализации генераторов этой алгебры. Генераторы SU (5) в приведенном перечне отсутствуют . Если серьезно верить в существование SU (5) - симметрии для ряда ядер, то выходом из подобной ситуации было бы построение в духе работы /13/ цепочки приближенных с неточными коммутационными соотношениями алгебр. Если бы для некоторых ядер оказалось бы, что коэффициенты перед генераторами высших по сравнению с SU (5) алгебр малы, то мы получили бы приближенную SU (5) алгебру операторов.

Еще один путь введения точных, но не универсальных алгебр намечен в работе /4/. Операторы, принадлежащие этим алгебрам, определены в пространстве фиксированного числа собственных состояний ядра, и их реализация в терминах операторов рождения и уничтожения нуклонов должна быть весьма сложной и различной для различных ядер и даже для разных состояний одного и того же ядра.

Авторы благодарны проф. В.Г. Соловьеву за интерес и внимание к работе. Один из авторов (П.Р.) выражает благодарность академику Н.Н. Боголюбову за гостеприимство в ОИЯИ и МАГАТЭ - за финансовую поддержку.

Литература

1. J.P. Elliot. Proc.Roy.Soc., A245, 128 (1958).
2. L. Weaver, L.C. Biedenharn. Phys.Lett., 32B, 326 (1970).
3. Г.Н. Афанасьев. Препринт ОИЯИ, Р4-4860, Дубна, 1970.
4. И.Н. Михайлов, Е. Наджаков. Изв. АН СССР, 34, 2088 (1970).
5. В.В. Ванагас, Р.К. Калинаускас. ЯФ, 11, 63 (1970).
6. G. Gneuss, U.Mosel, W.Greiner. Phys.Lett., 31B, 269 (1970); ibidem 30, 397 (1969).

7. M. Jean, L. Wilets. Phys.Rev., 102, 788 (1956).
8. Г.Н. Афанасьев. Препринт ОИЯИ, Р4-5008, Дубна, 1970.
9. M. Sakai. Nucl.Phys., A104, 301 (1967).
10. E.P. Wigner. Phys.Rev., 51, 106 (1937); ibidem, 51, 947 (1937).
11. L.A. Radicatti. Phys.Rev.Lett., 6, 332 (1963).
12. B. Bremond. Nucl.Phys., A113, 257 (1965).
13. A. Arima. Suppl. of the Prog. of Theor.Phys. Extra Number, 481 (1968).
14. M. Fabre. Preprint Institut de Physique Nucleare, IPNO/TH 182, Orsay, 1970.
15. Y. Shono. Progr.Theor.Phys., 31, 990 (1964).
16. G. Racah. Group Theory and Spectoscopy Reprint of Lectures delivered at the Inst. for Adv. Study, Princeton, 1951;

Препринт ОИЯИ, Р-1864, Дубна, 1964.
17. R.C. Hwa, J. Nuyts. Phys.Rev., 145, 1188 (1966).

Рукопись поступила в издательский отдел
5 февраля 1971 года.