

7-222
ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4 - 5581

574/2-71



В.В. Пашкевич

ОБ АСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ
ДЕЛЯЩИХСЯ ЯДЕР

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

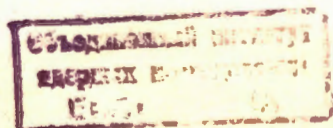
1971

P4 - 5581

В.В. Пашкевич

ОБ АСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ
ДЕЛЯЩИХСЯ ЯДЕР

Направлено в "Nuclear Physics"



S u m m a r y

The potential energy of a nucleus at large (scission) deformation is calculated by the shell-correction method due to Strutinsky. The shape of the nucleus in the zeroth-order approximation is taken to be the Cassinian ovaloid, the deviation being expanded in a series in Legendre polynomials. Asymmetric shapes of the nucleus are studied. A definition of the Woods-Saxon type nuclear potential is given. The single-particle spectrum, shell correction, liquid - drop energy and total potential energy are calculated. It is shown that the transuranium nuclei are symmetric at the first barrier and in the second minimum of the potential energy. The second saddle point is situated at large asymmetric deformation. The nuclear asymmetry near the scission point is in qualitative agreement with the experimental data on the asymmetry in the mass distribution of the fission fragments. The agreement between the theoretical results and the experimental data on the fission barriers is improved when the asymmetry is taken into account.

I. ВВЕДЕНИЕ

В теории деления большое значение имеет потенциальная энергия ядра, зависимость которой от формы его поверхности позволяет сделать как некоторые качественные выводы о процессе деления, так и получить информацию о форме и массе ядра в основном состоянии, а также о барьере деления.

Для вычисления потенциальной энергии Струтинским предложен метод $I-3/$, в котором энергия ядра представляется в виде суммы капельной энергии и оболочечной поправки. Величина и знак оболочечной поправки определяются степенью сгущения или разрежения одночастичных уровней у поверхности ферми.

Для определения одночастичного спектра тяжелых ядер при большой (делительной) деформации и гипотетических сверхтяжелых ядер приходится экстраполировать в новую область одночастичную схему уровней, более или менее хорошо известную только при равновесных деформациях и только вблизи поверхности ферми и проверенную по экспериментальным данным об основных и низколежащих возбужденных состояниях известных ядер.

При экстраполяции естественно использовать несжимаемость ядерной материи и предполагать наличие самосогласованного поля в ядре, приближением к которому является среднее поле, имеющее почти постоянное значение внутри ядра и в тонком переходном слое спадающее до нуля вне ядра. Потенциал типа Вудса-Саксона со спин-орбитальным взаимодействием, пропорциональным градиенту потенциала, является с физической точки зрения наиболее подходящим приближением.

Вычисления оболочечной поправки в эллиптически деформированном ядре на основе одночастичного спектра в потенциале типа Вудса-Саксона проводились в работе^{/4/}. Струтинский и его группа в Копенгагене^{/5/} использовали более общую форму ядра с явно выраженной шейкой при больших деформациях.

Ранее влияние оболочек на процесс деления рассматривался Игнатьюком, который вычислял оболочечные поправки в модели двух касающихся осколков^{/26/}.

В данной работе предлагается удобная параметризация формы поверхности делющегося ядра и приводятся результаты вычислений зависимости потенциальной энергии от двух параметров: от основной делительной деформации, приводящей к увеличению расстояния между центрами тяжести будущих осколков, и от асимметричной деформации, определяющей отношение масс будущих осколков.

Обсуждается положение абсолютных и условных экстремумов потенциальной энергии и их связь с асимметрией деления.

Планируется проведение более подробных расчетов.

2. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ ЯДРА

При описании деления ядер существенным фактором, определяющим объём, а иногда – и успех вычислений, является удобная параметризация формы поверхности ядра. Определение параметризации можно разбить на два этапа. Первый – выбор семейства фигур нулевого приближения, второй – описание отклонения искомой фигуры от исходной.

Для задания этого отклонения достаточно найти систему координат, в которой семейство фигур нулевого приближения являлось бы координатными поверхностями. Тогда отклонение является функцией

координат, определяющих положение точки на координатной поверхности.

В случае аксиальной симметрии отклонение есть функция одной переменной, которую можно задавать в виде разложения по ортогональным полиномам. Коэффициенты ряда являются параметрами, определяющими форму поверхности ядра. Сходимость ряда при представлении физически интересных функций существенно определяет объём вычислительной работы. Например, при вычислении седловых точек в капельной модели Коэн и Святецкий^{/6/} в качестве фигур нулевого приближения использовали сферы, а отклонение представляли в виде ряда по полиномам Лежандра, причем учитывалось 9 членов ряда, т.е. четные полиномы вплоть до 18-го порядка. Кроме очевидной громоздкости, этот метод обладает тем недостатком, что при больших деформациях, когда у ядра образуется ясно выраженная шейка, отклонение становится многозначной функцией полярного угла и ряд расходится.

В работе Ставинского, Работнова и Серёгина^{/7/} показано, что очень удобным однопараметрическим семейством кривых, довольно точно аппроксимирующим форму ядер в седловой точке, являются овалы Кассини. В данной работе овалы Кассини используются в качестве фигур нулевого приближения, отклонение от которых представляется в виде ряда по полиномам Лежандра.

Ограничимся аксиально-симметричными фигурами и в плоскости, проходящей через ось симметрии, введем координаты (R, X) такие, что координатная линия $R = \text{const}$ будет овалом Кассини, $0 < R < \infty$, а X заключено в пределах $-1 \leq X \leq 1$.

Связь (R, χ) - координат с цилиндрическими координатами (\bar{r}, \bar{z}) устанавливается с помощью соотношений

$$\begin{cases} R = [(\bar{z}^2 + \bar{r}^2)^2 - 2s(\bar{z}^2 - \bar{r}^2) + s^2]^{1/4} \\ \chi = \frac{\text{sign}(\bar{z})}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \frac{\bar{z}^2 - \bar{r}^2 - s}{[(\bar{z}^2 + \bar{r}^2)^2 - 2s(\bar{z}^2 - \bar{r}^2) + s^2]^{1/2}} \right\}^{1/2}, \end{cases} \quad (I)$$

где s - квадрат расстояния фокуса овалов Кассини от начала координат, величина, фиксированная для каждой координатной сетки. При $s = 0$ (R, χ) - координаты переходят в полярные координаты, точнее, в радиус и косинус полярного угла. При $s \neq 0$ различные координатные сетки отличаются друг от друга только масштабом.

Одна из таких координатных сеток представлена на рис. I. Координатная линия $R = \text{const}$ (овал Кассини) при $0 < R < \sqrt{s}$ представляет собой две отдельные замкнутые кривые, переходящие при $R \rightarrow 0$ в окружности с центрами в левом и правом фокусах, а при $\sqrt{s} < R < \infty$ - в единую кривую, стремящуюся при $R \rightarrow \infty$ к окружности с центром в начале координат. Координатная линия $R = \sqrt{s}$ представляет собой лемнискату Бернулли.

Координатная линия $\chi = \text{const}$ выходит при $\chi > 0$ из правого, а при $\chi < 0$ - из левого фокуса и уходит на бесконечность, приближаясь к прямой, проведенной через начало координат.

Преобразование, обратное (I), имеет вид

$$\begin{cases} \bar{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(R^4 + 2sR^2(2x^2 - 1) + s^2)^{1/2} - R^2(2x^2 - 1) - s]^{1/2}, \\ \bar{z} = \frac{\text{sign}(x)}{\sqrt{2}} [(R^4 + 2sR^2(2x^2 - 1) + s^2)^{1/2} + R^2(2x^2 - 1) + s]^{1/2}. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим кривую в плоскости (R, x) , такую, что координатные линии $x = \text{const}$ пересекают её не более, чем в одной точке. Значение R , при котором происходит пересечение, обозначим через $R(x)$. Представим функцию $R(x)$ в уравнении кривой $R = R(x)$ в виде ряда по полиномам Лежандра

$$R(x) = R_0 \left(1 + \sum_m \alpha_m P_m(x) \right). \quad (3)$$

В дальнейшем будем изучать в зависимости от параметров (s, α_m) свойства аксиально-симметричных ядер, форма поверхности которых представляет собой фигуру вращения с образующей, определяемой уравнением $R = R(x)$. В качестве меры деформации фигур нулевого приближения вместо квадрата расстояния фокуса от начала координат s удобно ввести безразмерную величину ϵ такую, что

$$s = \epsilon R_0^2.$$

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

При вычислении таких геометрических величин, как объём ядра, смещение центра тяжести, квадрупольный момент и т.п. предположим, что плотность ядра постоянна во внутренней области, ограниченной поверхностью (3), и равна нулю вне её. Кулоновский потенциал ядра вычислим в предположении, что плотность заряда пропорциональна плотности ядра.

Удобные выражения для указанных величин даны в работе Струтинского, Лященко и Попова^{/8/}, где была использована цилиндрическая система координат. Выражений (I-2) достаточно, чтобы по уравнению $R = R(x)$ найти в неявном виде уравнение кривой в цилиндрических координатах $\bar{r} = \bar{r}(\bar{z})$. Но при этом возникает два осложнения. Во-первых, необходимо численно решать неявное уравнение. Во-вторых, что более существенно, функция $\bar{r} = \bar{r}(\bar{z})$ при некоторых критических отрицательных значениях параметров α_m , $m = 1, 2, \dots$ становится многозначной, а вблизи этих критических значений при пересечении оси $\bar{r} = 0$ имеет большую производную $\frac{d\bar{r}}{d\bar{z}}$, что резко снижает точность вычисления интегралов при интегрировании по методу Гаусса с фиксированным числом узлов. Поэтому имеет смысл перейти к (R, x) - координатам, выбрав x в качестве независимой переменной. Выражения для обсуждаемых интегралов в (R, x) - координатной системе даны в приложении.

Очевидно, что объём фигуры вращения с образующей $R = R(x)$ меняется с изменением параметров (ϵ, α_m) . Также смещается центр тяжести при изменении α_m с нечетным m . Проведем линейное растяжение фигуры вращения и сдвиг вдоль оси \bar{z} так, чтобы объём фигуры оставался постоянным, а центр тяжести лежал в начале координат при любых значениях параметров (ϵ, α_m) . В приложении дается выражение для площади поверхности, кулоновской энергии, кулоновского потенциала и квадрупольного момента.

В качестве иллюстрации на рис.2 дана форма ядра в нулевом приближении, т.е. при $\alpha_m = 0$, $m = 1, 2, \dots$. Масштаб фигур произволен, условие сохранения объёма с изменением ϵ выполняется. Значению $\epsilon = 0$ соответствует сферическая форма ядра. При $0 < \epsilon < 0,4$ овалы Кассини весьма близки к эллипсам с отношением полуосей

$$\left(1 - \frac{2}{3}\epsilon\right) / \left(1 + \frac{1}{3}\epsilon\right).$$

С ростом ϵ от 0,5 до 1,0 появляется и становится все более тонкой шейка ядра, которая при $\epsilon = 1,0$ обращается в нуль. С дальнейшим ростом ϵ осколки удаляются друг от друга, приближаясь к сферической форме.

Более сложная, асимметричная относительно плоскости, перпендикулярной к оси симметрии, форма ядра представлена на рис.3, где на каждом отдельном рисунке изображены фигуры при фиксированном ϵ , $\epsilon = 0$ (0,25) 1,00*), и четырех значениях α_1 , $\alpha_1 = 0,0(0,1)0,3$. С изменением ϵ и α_1 сохраняется объём и остается неподвижным центр тяжести. При $\epsilon = 0$ параметр α_1 описывает дипольную деформацию сферы, которая, как известно, при малых α_1 в основном приводит к смещению центра тяжести. Поэтому с изменением α_1 и при фиксированном центре тяжести форма ядра мало меняется. При $\epsilon \neq 0$ изменение параметра α_1 уже не сводится к дипольной деформации, и форма ядра с ростом ϵ все более существенно зависит от α_1 .

С изменением α_1 меняется отношение объёмов "будущих осколков". Удобным свойством данной параметризации является то,

*) Здесь и в дальнейшем используется сокращение $X = X_i(\Delta X) X_f$, обозначающее, что X пробегает значения от X_i до X_f с шагом ΔX .

что, как видно из рисунков, при $\epsilon \approx 0,8-1,0$ "тяжелый осколок" с ростом α , все более приближается к сферической форме, а "легкий осколок" остается деформированным.

4. ЯДЕРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Удобный с вычислительной точки зрения способ задания радиальной зависимости потенциала деформированного ядра был предложен в работе^{/4/}. Он отличается от интегрального выражения Болстерли и др.^{/9/} простотой и дает близкие результаты.

Определим в точке с цилиндрическими координатами (r, z) функцию $\Phi(r, z)$

$$\Phi(r, z) = [(\bar{z}^2 + \bar{r}^2)^2 - 2\epsilon R_0^2(\bar{z}^2 - \bar{r}^2) + \epsilon^2 R_0^4]^{1/4} - R_0 [1 + \sum_m \alpha_m P_m(x)],$$

где $\bar{r} = r \cdot c$, $\bar{z} = z \cdot c + \bar{z}_m$, $R_0 = r_0 A^{1/3}$ и координата X точки связана с её цилиндрическими координатами (\bar{r}, \bar{z}) преобразованием (I). Коэффициент растяжения c и сдвиг \bar{z}_m , обеспечивающие при изменении деформации постоянство объёма и отсутствие смещения центра тяжести, определены в приложении.

Уравнение

$$\Phi(r, z) = 0 \quad (4)$$

определяет поверхность ядра в цилиндрических координатах. Тогда ядерный потенциал можно задать следующим образом^{/4/}:

$$V = V_0 \cdot [1 + \exp(\psi/\alpha)]^{-1}. \quad (5)$$

Величина Ψ , которую можно интерпретировать как приближенное выражение для расстояния от поверхности ядра, имеет вид

$$\Psi(r, z) = \Phi / |\nabla \Phi| = \Phi \cdot [(\bar{z}^2 + \bar{r}^2)^2 - 2s(\bar{z}^2 - \bar{r}^2) + s^2]^{5/4} / [c(\bar{r}^2 N_r + \bar{z}^2 N_z)^{1/2}], \quad (6)$$

где введены обозначения

$$N_r = (\bar{z}^2 + \bar{r}^2 + s) [(\bar{z}^2 + \bar{r}^2)^2 - 2s(\bar{z}^2 - \bar{r}^2) + s^2]^{1/2} + \bar{z}^2 (\bar{z}^2 + \bar{r}^2 - s) [R_0 \sum_m \alpha_m P_m'(x) / N_x],$$

$$N_z = (\bar{z}^2 + \bar{r}^2 - s) [(\bar{z}^2 + \bar{r}^2)^2 - 2s(\bar{z}^2 - \bar{r}^2) + s^2]^{1/2} - \bar{r}^2 (\bar{r}^2 + \bar{z}^2 + s) [R_0 \sum_m \alpha_m P_m'(x) / 1/x],$$

$$N_x = \frac{\text{sign}(\bar{z})}{\sqrt{2}} \left\{ [(\bar{z}^2 + \bar{r}^2)^2 - 2s(\bar{z}^2 - \bar{r}^2) + s^2]^{1/2} + (\bar{z}^2 - \bar{r}^2 - s) \right\}^{1/2}.$$

Здесь $P_m'(x)$ - производная полинома Лежандра по аргументу x .

Неявное выражение для границы ядра (4) выбрано таким образом, что при $\epsilon = 0$ и, следовательно, $s = 0$, потенциал (5) переходит в потенциал Вудса-Саксона сферического ядра.

Спин-орбитальное взаимодействие было выбрано пропорциональным градиенту потенциала (5) с параметром γ_{30} вместо γ_0 , причем $\gamma_{30} < \gamma_0$ (см. работу Роста^{10/})

$$V_{30} = \frac{2\kappa}{\hbar^2} [\vec{s} \vec{p}] \nabla v, \quad \kappa = \lambda (\hbar/2mc)^2, \quad (7)$$

где \vec{p} и \vec{s} - импульс и спин нуклона.

Вычисление кулоновского потенциала описано в приложении.

Величина ψ , которую можно интерпретировать как приближенное выражение для расстояния от поверхности ядра, имеет вид

$$\psi(r, z) = \varphi / |\nabla \varphi| = \\ = \varphi \cdot [(\bar{z}^2 + \bar{r}^2)^2 - 2s(\bar{z}^2 - \bar{r}^2) + s^2]^{5/4} / [c(\bar{r}^2 N_r + \bar{z}^2 N_z)^{1/2}], \quad (6)$$

где введены обозначения

$$N_r = (\bar{z}^2 + \bar{r}^2 + s) [(\bar{z}^2 + \bar{r}^2)^2 - 2s(\bar{z}^2 - \bar{r}^2) + s^2]^{1/2} + \\ + \bar{z}^2(\bar{z}^2 + \bar{r}^2 - s) [R_0 \sum_m \alpha_m P'_m(x) / N_x], \\ N_z = (\bar{z}^2 + \bar{r}^2 - s) [(\bar{z}^2 + \bar{r}^2)^2 - 2s(\bar{z}^2 - \bar{r}^2) + s^2]^{1/2} - \\ - \bar{r}^2(\bar{r}^2 + \bar{z}^2 + s) [R_0 \sum_m \alpha_m P'_m(x) / N_x], \\ N_x = \frac{\text{sign}(\bar{z})}{\sqrt{2}} \left\{ [(\bar{z}^2 + \bar{r}^2)^2 - 2s(\bar{z}^2 - \bar{r}^2) + s^2]^{1/2} + \right. \\ \left. + (\bar{z}^2 - \bar{r}^2 - s) \right\}^{1/2}.$$

Здесь $P'_m(x)$ - производная полинома Лежандра по аргументу x .

Неявное выражение для границы ядра (4) выбрано таким образом, что при $\epsilon = 0$ и, следовательно, $s = 0$, потенциал (5) переходит в потенциал Вудса-Саксона сферического ядра.

Спин-орбитальное взаимодействие было выбрано пропорциональным градиенту потенциала (5) с параметром γ_{30} вместо γ_0 , причем $\gamma_{30} < \gamma_0$ (см. работу Роста^{10/})

$$V_{30} = \frac{2\kappa}{\hbar} [\vec{s} \vec{p}] \nabla V, \quad \kappa = \lambda (\hbar/2mc)^2, \quad (7)$$

где \vec{p} и \vec{s} - импульс и спин нуклона.

Вычисление кулоновского потенциала описано в приложении.

Предположим, что такие параметры среднего поля, как глубина потенциальной ямы V_0 , ширина размытости края потенциальной ямы a , константа спин-орбитального взаимодействия K и параметры τ_0 и τ_{20} мало меняются с изменением деформации, и что при изучении зависимости полной энергии ядра от формы поверхности ядра этим изменением можно пренебречь. В качестве набора параметров, определяющих среднее поле (см. таблицу I), будем использовать параметры Госта^{/10/}, полученные из анализа экспериментальных данных о спектре одночастичных уровней в ядрах вблизи ^{208}Pb . Изотопическую зависимость глубины потенциальной ямы V_0 выберем^{/11-13/} в виде

$$V_0^{(p,n)} = V_{cp} (1 \pm c_{i20} (N-Z)/A).$$

Метод вычисления одночастичного спектра описан в работах^{/14-15/}.

5. ОБОЛОЧЕЧНАЯ ПОПРАВКА

На основе полученного одночастичного спектра вычислялись протонные и нейтронные оболочечные поправки по программе для ЭВМ, составленной Струтинским и Паули. В качестве иллюстраций на рис.5 представлена в форме топографических карт зависимость оболочечной поправки для нейтронов и для протонов от числа нуклонов и от асимметричной деформации, описываемой параметром α_1 . Значение параметра ϵ является фиксированным и равным 0,95.

Область отрицательных значений оболочечных поправок, соответствующих повышенной стабильности ядра, заштрихована. Для получения представлений о влиянии параметра α_1 на форму ядра на рис.5

тонкими линиями нанесена сетка кривых, вдоль которых объём (т.е. число нуклонов) одного из будущих осколков остается постоянным. Граница между двумя осколками определялась по минимальной площади сечения фигуры плоскостью, перпендикулярной оси симметрии. Более подробно вопрос о разделении ядра на осколки обсуждается в разделе 6.

Форма ядра, при которой вычислялись обсуждаемые оболочечные поправки, приведена на рис.4. Видно, что деформация $\epsilon = 0,95$ соответствует довольно хорошо выделившимся осколкам, соединенным тонкой шейкой, так что в оболочечной поправке следует ожидать влияния одночастичного спектра каждого из осколков в отдельности.

Конечно, это влияние затушёвывается как взаимодействием осколков через шейку, так и их деформацией. Тем не менее на рис.5 отчетливо видна глубокая долина в оболочечной поправке для протонов между линиями, соответствующими 50 и 60 протонам в тяжелом осколке. Долина следует линиям постоянного числа нуклонов, что свидетельствует о том, что именно тяжелый осколок ответственен за её образование.

Менее отчетливо выражена, но довольно заметна долина между 20 и 30 протонами в легком осколке. Глубокий минимум достигается при пересечении этих долин, т.е. в протонной системе с $Z = 78$ при деформации $\alpha_1 = 0,175$, которой соответствует разбиение на два "магических" осколка с числом протонов 24 и 54. Подчеркнем еще раз, что вводимое математическое разбиение на два осколка не является физическим делением ядра, на которое кроме обсуждаемой здесь оболочечной поправки влияет еще много факторов, в том числе капельная энергия, отличие параметров деформации, при которых про-

исходит разрыв шейки, от рассматриваемых здесь, и пр. и пр.

Долина для тяжелого осколка выражена более ясно, чем долина для легкого осколка. По-видимому, это связано с тем, что, как видно из рис.4, форма легкого осколка больше отличается от сферы и его одночастичное поле больше искажается наличием шейки, тогда как тяжелый осколок имеет более обособленную и близкую к сферической форму. Кроме того, известно, что чем больше число нуклонов, тем глубже известные магические провалы в сферических ядрах.

Аналогично, в оболочечной поправке для нейтронов видна "интерференция" долин тяжёлого (между 50 и 60, 80 и 90 и более 120 нейтронами) и лёгкого (в районе 30 и между 50 и 60 нейтронами) осколков. Таким образом, оболочечная поправка играет важную роль не только при определении равновесной деформации, существовании и положении второго минимума в потенциальной энергии ядра, но и вблизи точки разделения ядра, где она плавно переходит в наложенные оболочечные поправки для каждого из осколков в отдельности. Кроме того, близость отмеченных "магов" в осколках к известным сферическим магическим числам 28, 50, 82, 126 свидетельствует о том, что выбранное двугараметрическое семейство фигур довольно удачно аппроксимирует форму ядра. В этой параметризации можно изучать непрерывный переход от основного состояния ядра до точки разрыва на два осколка.

параметров d_m : $m = 1, 2, \dots$ происходит геометрическое разделение ядра на два осколка. При $d_m = 0$, $m = 1, 2, \dots$, $\alpha = \epsilon$.

Из рис. 6 видно, что, как это хорошо известно, в модели жидкой капли форма делящегося ядра симметрична относительно плоскости, перпендикулярной оси симметрии и проходящей через центр тяжести ядра.

Результаты вычислений полной энергии W по формуле (8) для ряда ядер представлены на рис. 7 и 8. Чтобы провести их обсуждение в физических терминах, необходимо связать используемые параметры с известными характеристиками ядра.

При достаточно больших значениях α ($\alpha \approx 0,6-0,7$) в ядре появляется шейка, т.е. цилиндрическая координата r точки на поверхности как функция z достигает минимума при некотором $z = z^*$. Тогда возникает возможность введения новой характеристики формы, связанной с геометрическим разбиением ядра плоскостью $z = z^*$ на два осколка. Вычисляя, как для целого ядра, объём и центр тяжести осколков, введем расстояние между центрами тяжести осколков D и отношение объёмов осколков R_m . Зависимость D и R_m от параметров α и α_1 представлена на рис. 6. Видно, что с ростом α изменяется в основном расстояние между центрами тяжести осколков D при более или менее постоянном отношении масс осколков R_m . Аналогично, от α_1 зависит в основном R_m . Если бы величины D и R_m можно было определить во всей области изменения параметров α и α_1 , их (т.е. D и R_m) можно было бы принять в качестве удобных с физической точки зрения независимых переменных.

С ростом деформации α , как видно из рис. 2, 3 и 4, ядро становится все более вытянутым, что приводит к увеличению квадрупольного момента ядра Q . Зависимость Q от (α, α_1) , вычисленная по формулам (П 15), дана на рис. 5. С увеличением α_1 при фиксированном α увеличивается асимметрия ядра, форма которого становится ближе к сферической, и квадрупольный момент уменьшается, что выражается на рис. 6 в отклонении линий постоянного уровня Q вправо. В том же направлении действует замена независимой переменной ϵ на α .

Перейдем теперь к обсуждению основных результатов данной работы, представленных на рис. 7 и 8. При малых деформациях форма ядра слабо зависит от α_1 (см. рис. 3). Линии постоянного уровня полной потенциальной энергии в основном следуют линиям постоянного уровня квадрупольного момента Q , т.е. при малых α полная энергия зависит в основном от квадрупольного момента ядра.

Слабые отступления от этой зависимости, стабильность или нестабильность основного состояния относительно асимметричной деформации здесь не обсуждаются, так как хорошо известно, что в тяжелых ядрах, особенно в районе $Th - U$, большую роль играет гексадекаполярная деформация ядра^{/16/}, учет которой существенно меняет (до 2 Мэв) глубину минимума потенциальной энергии, соответствующего основному состоянию.

При деформациях $\alpha \geq 0,4-0,5$ форма ядра начинает существенно зависеть от α_1 (см. рис. 3 и 4), и линии уровня W теряют всякое сходство с линиями уровня Q .

Из рисунков видно, что седловая точка перехода из основного состояния во второй минимум W расположена у всех ядер при симметричной деформации ($\alpha_1 = 0$). Второй минимум в потенциальной энергии устойчив относительно α_1 , так что до деформации

α , соответствующей положению второго минимума, включение асимметричной деформации α_1 не дает ничего нового. Высота второго минимума над основным состоянием здесь не обсуждается, т.к. глубина основного состояния вычислена неточно (см. выше).

После второго минимума в W долина, ведущая ко второй седловой точке, резко отходит от оси $\alpha_1 = 0$ и седловая точка оказывается расположенной при значительной асимметричной деформации

Учет асимметричной деформации значительно понижает вторую седловую точку, делая её в ряде трансурановых ядер ниже первой, в согласии с экспериментальными данными. Обсуждение относительной высоты двух седловых точек проводится в работе Бьернхольма и Струтинского^{/17/}, где имеются дальнейшие ссылки на экспериментальные работы. В результате вычислений с учетом α_1 пороги деления лучше согласуются с экспериментальными значениями.

За второй седловой точкой положение условного минимума W при фиксированном α смещается с ростом α в сторону уменьшения асимметрии. Встает вопрос о сравнении получающихся в расчетах значениях асимметричной деформации с асимметрией в массовом распределении осколков. При этом возникает ряд трудностей, связанных с тем, что точный ответ можно получить только при решении динамической задачи. Не зная меры адиабатичности и инерционности коллективного движения при спуске с седловой точки по направлению к точке разрыва, можно только предполагать, что спуск при низкоэнергетическом делении проходит вблизи дна долины W .

В процессе спуска, как показано в расчетах по модели жидкой капли Струтинским, Лященко и Поповым^{/8/}, при некоторой критической деформации и еще достаточно толстой шейке, ядро становится абсолютно неустойчивым относительно разрыва на два осколка. На рис.4 изображены формы ядер, по отношению толщины шейки к расстоянию между центрами тяжести осколков близкие к критическим. Разделение ядра на осколки при достаточно толстой шейке и влияние неопределенности в положении места разрыва на зарядовые и массовые распределения осколков осуждаются в тесной связи с экспериментальными данными по делению возбужденных ядер в работах Карамяна, Оганесяна и Пустыльника^{/18/}. Так как, согласно рис.7 и 8, значение асимметрии зависит от α , то неопределенность деформации, при которой происходит разрыв, вносит неопределенность в отношение масс осколков.

Имея в виду указанные оговорки, сравним экспериментальные данные^{/19-22/} по отношению масс наиболее вероятных осколков с теоретическими значениями параметра асимметрии. На рис.9 показано положение дна долины, ведущей от второго минимума к седловой точке и, далее, к точке разрыва. Видно, что седловая точка расположена при большой асимметричной деформации, превосходящей наблюдаемую на эксперименте.

При спуске вдоль дна долины асимметрия уменьшается и в точке разрыва становится немного меньше экспериментальной. Таким образом, в процессе спуска A_{ch} меняется приблизительно от 0,5 до 0,8, что находится, ввиду указанных неопределенностей, в удовлетворительном согласии с экспериментально

наблюдаемыми значениями. В отличие от экспериментальной ситуации, для всех ядер получаются близкие значения R_m . Причину легко понять из сравнения зависимости от α_1 оболочечных поправок и капельной энергии. В районе седловой точки масштаб изменения оболочечной поправки (сравнимый с приведенным примером на рис.5 для $\alpha = 0,95$) имеет тот же порядок, что и капельная энергия (см. рис.6). В полной энергии проявляется уменьшение асимметрии при переходе к более тяжелым ядрам, в соответствии с наблюдаемой на опыте тенденцией. Вблизи точки разрыва капельная энергия более круто возрастает с ростом α_1 , подавляя заключенную в оболочечной поправке индивидуальность ядер.

В районе P_8 , где оболочечная поправка как для протонов, так и для нейтронов достигает вблизи точки разрыва глубокого минимума при значительной асимметричной деформации, имеются две седловые точки, расположенные вблизи точки разрыва, одна - при очень малой асимметрии, другая - при довольно значительной. "Симметричная" седловая точка расположена ниже "асимметричной" в согласии с экспериментальными данными по делению ядер вблизи $^{208}Pb/^{23}/$. Интересно отметить, что наблюдаемый на опыте маленький пик в массовом распределении при делении ^{209}Bi протонами с энергией $36 \text{ МэВ}^{/24/}$ расположен при $R_m = 0,5$, что по асимметрии находится вблизи верхней седловой точки ($R_m = 0,48$).

Основные результаты, полученные в данном разделе, качественно согласуются с результатами группы Струтинского в Институте Нильса Бора в Копенгагене^{/5/}, несмотря на отличие в параметриза-

ции формы поверхности ядра и используемых параметров среднего поля, что говорит о том, что основную роль в процессе деления играют не детали формы поверхности, а такие характеристики, как расстояние между центрами тяжести осколков, толщина шейки и отношение объёмов будущих осколков.

Тот факт, что вторая седловая точка расположена при асимметричной деформации ядра, получен также Мёллером и Нильссоном^{/25/}. В качестве среднего поля этими авторами был использован бесконечный осцилляторный потенциал с обычными поправками, пропорциональными $\bar{e}^2 - \bar{e}^2$, значение которых при таких больших деформациях неочевидно.

7. ДЕФОРМАЦИИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

До сих пор были изложены результаты исследования зависимости W от двух параметров α и α_1 . Из оставшихся параметров наиболее важен α_4 , как это отмечалось в предыдущем разделе. Он влияет как на форму ядра в основном состоянии, так и на деформацию осколков перед разлётом. Как показывают предварительные расчеты, учет α_4 приводит к стабильности основного состояния относительно α_1 , слабо меняет картину в районе второго минимума и понижает второй барьер для симметричного деления ($\alpha_1=0$), так что энергетический выигрыш от включения α_1 при $\alpha_4 \neq 0$ несколько уменьшается.

Роль параметра α_2 невелика, так как он сильно скоррелирован с α .

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ядро симметрично на первом барьере и во втором минимуме полной потенциальной энергии. Асимметрия становится существенной в районе второй седловой точки, которая т.о. соответствует асимметричной форме ядра. Учет оболочечных поправок приводит к тому, что еще до точки разрыва условный минимум в потенциальной энергии при фиксированном расстоянии между центрами тяжести будущих осколков лежит при отличной от нуля асимметричной деформации ядра.

С ростом расстояния между центрами тяжести будущих осколков отношение масс осколков резко нарастает на участке от второго минимума до второй седловой точки, а за ней плавно уменьшается, достигая в районе точки разрыва ядра приблизительно экспериментальных значений.

Оставшееся различие между теоретическими и экспериментальными величинами может быть связано как с принципиальными вопросами - необходимостью решения динамической задачи, так и техническими трудностями - отсутствием вариаций деформации будущих осколков.

Итак, показано, что ядро в процессе деления имеет отличную от нуля асимметричную деформацию, что несомненно важно как при качественном понимании асимметрии в массовом распределении осколков, так и с принципиальной точки зрения.

Автор сердечно благодарен В.М.Струтинскому за многочисленные полезные дискуссии. Автор признателен также членам группы В.М.Струтинского в Институте Нильса Бора в Копенгагене за предоставление результатов их расчетов до опубликования.

Автор благодарен В.Г.Соловьеву за постоянное внимание и интерес к работе, Д.А.Арсеньеву, П.Е.Воротникову, А.В.Игнатьку, Ю.А.Музычке и Б.И.Пустыльнику за стимулирующие дискуссии. Постоянные консультации с И.Н.Силиным способствовали повышению общего уровня программ, используемых в вычислениях. Расчет оболочечных поправок проводился по программам, составленным Струтинским и Паули. Автору приятно отметить неоценимую помощь операторов под руководством Л.С. Первушовой в проведении расчетов на БЭСМ-6.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычисление ряда величин удобно, с точки зрения экономии времени на ЭВМ, проводить групповым методом вместе с вычислением объёма фигуры и её центра тяжести.

Представим подинтегральные выражения, зависящие явно от r и z , с помощью уравнений (3) и (2) как функции X . Используя выражения

$$d\bar{z} = \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial R} \frac{dR}{dx} \right) dx,$$

$$d\bar{r} \frac{d\bar{r}}{d\bar{z}} = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{r}}{\partial R} \frac{dR}{dx} \right) dx,$$

где $\frac{dR}{dx}$ получено дифференцированием уравнения (3) и

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \sqrt{2} |x| R^2 (\pm P) P^{-1} [P + R^2 (2x^2 - 1) + 3]^{-1/2}, \quad (\text{П.1})$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} = \sqrt{2} x R^2 (\pm P) P^{-1} [P - R^2 (2x^2 - 1) - 3]^{-1/2}, \quad (\text{П.2})$$

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sign}(x) R [R^2 + (2x^2 - 1)(\pm P)] P^{-1} [P + R^2 (2x^2 - 1) + 3]^{-1/2}, \quad (\text{П.3})$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial R} = \frac{1}{\sqrt{2}} R [R^2 + (2x^2 - 1)(3 - \rho)] \rho^{-1} [\rho - R^2(2x^2 - 1) - 3]^{-1/2} \quad (П.4)$$

$$\rho = [R^4 + 2sR^2(2x^2 - 1) + s^2]^{1/2} \quad (П.5)$$

перейдем к (R, x) - координатам в выражениях для:

1) объема

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \pi \int_{\bar{z}_\Lambda}^{\bar{z}_\Pi} \bar{r}^2(\bar{z}) d\bar{z} = \frac{4}{3} \pi R_0^3 c^3 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \pi \int_{-1}^1 dx \times [R^3 \{ R^3 + [R(2x^2 - 1) - 2x(1 - x^2) \frac{dR}{dx}] (3 - \rho) \} \times \\ &\times [\rho + R^2(2x^2 - 1) + s]^{-1/2} \rho^{-1} \end{aligned} \quad (П.6)$$

2) центра тяжести

$$\begin{aligned} \bar{z}_m &= \pi \int_{\bar{z}_\Lambda}^{\bar{z}_\Pi} \bar{z} \bar{r}^2(\bar{z}) d\bar{z} / \bar{V} = \\ &= \frac{1}{2} \pi \int_{-1}^1 dx \times R^3 \times \left\{ R^3 + [R(2x^2 - 1) - 2x(1 - x^2) \frac{dR}{dx}] (3 - \rho) \right\} \rho^{-1} / \bar{V}, \end{aligned} \quad (П.7)$$

3) величины \bar{Q} , пропорциональной квадрупольному моменту,

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= R_0^{-5} \int_{\bar{z}_n}^{\bar{z}_n} \bar{r}^2 (4\bar{z}^2 - \bar{r}^2) d\bar{z} = \\ &= \frac{R_0^{-5}}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^1 dx R^3 |x| [3p + 5R^2(2x^2 - 1) + 53] [p + R^2(2x^2 - 1) + 3]^{-1/2} p^{-1} \cdot \\ &\cdot \left\{ R^3 + [R(2x^2 - 1) - 2x(1 - x^2)] \frac{dR}{dx} \right\} / (3 - p) \}, \quad (П.8) \end{aligned}$$

4) кулоновского погенциала

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma, z') &= \pi \rho_0 \int_{z_n}^{z_n} M^{-1}(a, b) \left[f + g \frac{d\gamma(z)}{dz} \right] dz = \\ &= \pi \rho_0 \int_{-1}^1 dx M^{-1}(a, b) \left[\left(f \frac{\partial z}{\partial x} + g \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) + \left(f \frac{\partial z}{\partial R} + g \frac{\partial \gamma}{\partial R} \right) \frac{dR}{dx} \right], \quad (П.9) \end{aligned}$$

где

$$f = \gamma^2(z) + \gamma' \gamma(z) - \frac{1}{2} Q(a, b)$$

$$g = (z' - z) \gamma(z),$$

$$a(\gamma, z) = \sqrt{(\gamma' + \gamma)^2 + (z' - z)^2},$$

$$b(\gamma, z) = \sqrt{(\gamma - \gamma')^2 + (z' - z)^2},$$

$$\rho_0 = 3(z - 1)e / (4\sqrt{R_0^3}),$$

$$\gamma = \bar{r}/c, \quad z = (\bar{z} - \bar{z}_n)/c, \quad (П.10)$$

и предполагается, что \bar{z} и \bar{r} выражены через x и $R(x)$

по формулам (2); остальные величины в интеграле (П9) и способ их

вычисления подробно описаны в работе Струтинского, Лященко и Попова /8/;

5) кулоновской энергии (в единицах кулоновской энергии равновеликой сферы)

$$\begin{aligned}
 B_c &= \frac{3}{8\pi} \rho_0^{-1} R_0^{-5} \int_{z_A}^{z_n} \varphi_3 \left(r^2 - \frac{1}{2} z \frac{dr^2}{dz} \right) dz = \\
 &= \frac{3\sqrt{2}}{8\pi} \rho_0^{-1} R_0^{-5} c^{-3} \int_{-1}^1 dx \varphi_3 |x| R^3 \left\{ R [R^2 + s(2x^2 - 1)] - \right. \\
 &\left. - 2x(1-x^2)s \frac{dR}{dx} \right\} [p + R^2(2x^2 - 1) + s]^{-1/2} p^{-1}, \quad (\text{П.11})
 \end{aligned}$$

где

$$\varphi_3 = \varphi_3 \left[r(R(x), x), z(R(x), x) \right];$$

6) площади поверхности (в единицах площади поверхности равновеликой сферы)

$$\begin{aligned}
 B_s &= \frac{1}{2} R_0^{-2} \int_{z_A}^{z_n} r \left[1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \right]^{1/2} dz = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} R_0^{-2} c^{-2} \int_{-1}^1 dx R \left[p - R^2(2x^2 - 1) - s \right]^{1/2} \left[R^2 + (1-x^2) \left(\frac{dR}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot \\
 &\cdot (1-x^2)^{-1/2} p^{-1/2}. \quad (\text{П.12})
 \end{aligned}$$

В предыдущих выражениях

$$\bar{z}_A = - \left[s + R_0^2 \left(1 + \sum_m (-1)^m \alpha_m \right)^2 \right]^{1/2} = z_A c + \bar{z}_m,$$

$$\bar{z}_n = \left[s + R_0^2 \left(1 + \sum_m \alpha_m \right)^2 \right]^{1/2} = z_n c + \bar{z}_m.$$

Величины V , z_m и Q для нормированной кривой имеют вид

$$V = \bar{V} / c^3 = \frac{4}{3} \pi R_0^3, \quad (\text{П.13})$$

$$z_m = 0, \quad (\text{П.14})$$

$$Q = e^{-5} (\bar{Q} - 4 \bar{z}_m^2 R_0^{-5} \sqrt{V/\pi}). \quad (\text{П.15})$$

Таблица I.

Параметры среднего поля /10/

	Протоны	Нейтроны
r_0 (ф.м)	1,275	1,347
r_{20} (ф.м)	,932	1,28
a (ф.м)	0,700	0,700
λ	17,8	31,5
V_{cp} (МэВ)		49,65
c_{120}		0,862

Рис. I. Криволинейная система ортогональных (R, χ) -координат. Линии $R = \text{const}$ представляют собой овалы Кассини, линии $\chi = \text{const}$ начинаются в левом (при $\chi < 0$) или правом (при $\chi > 0$) фокусах и уходят на ∞ .

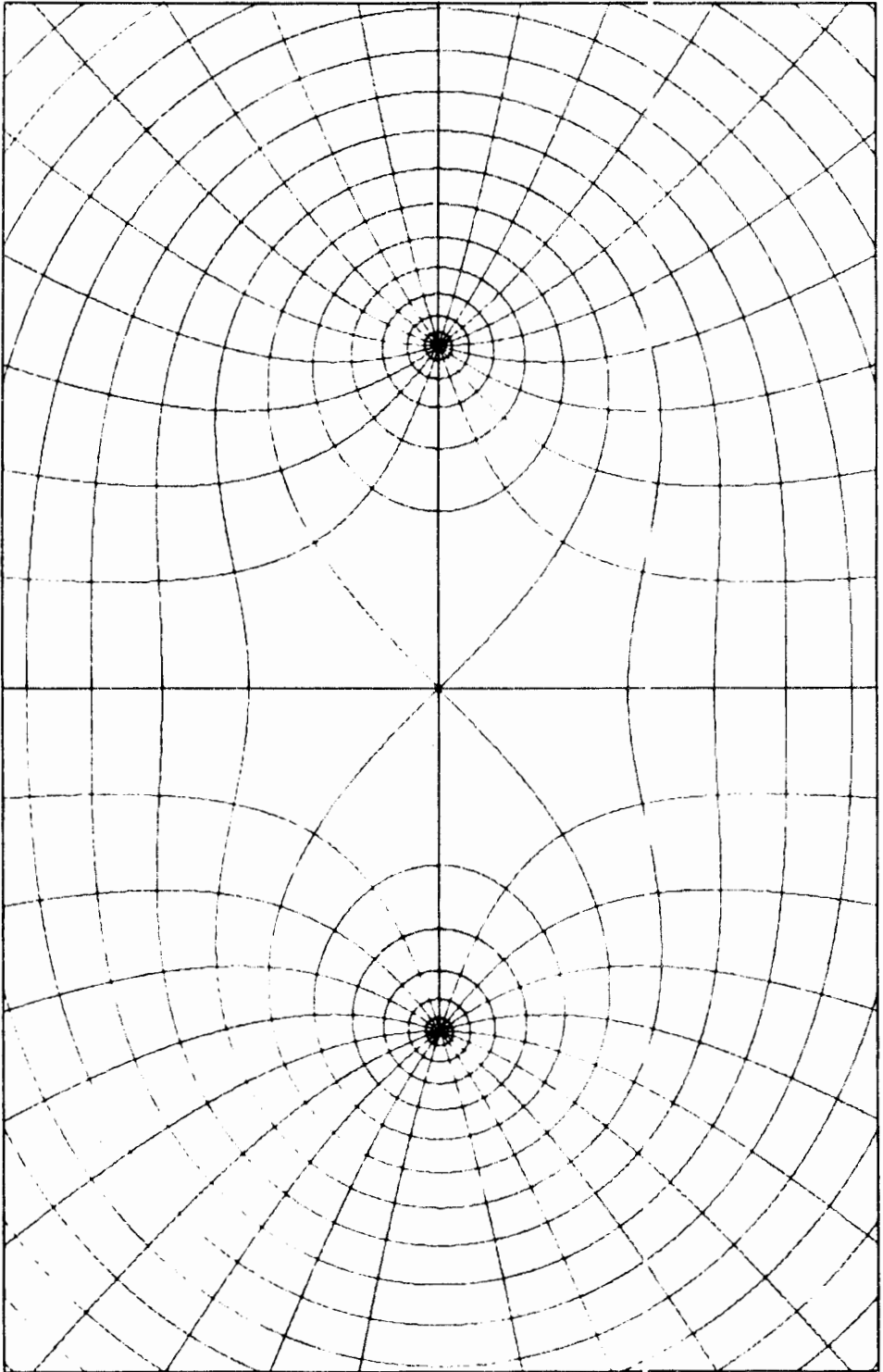


Figure 1

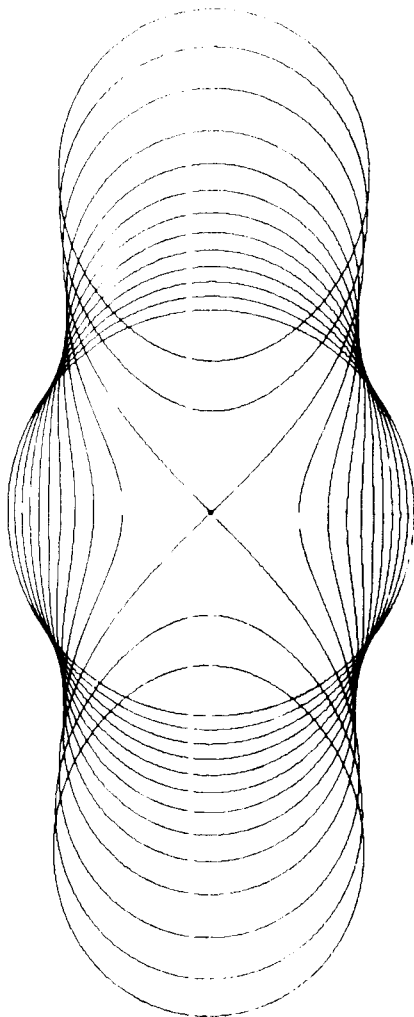


Рис.2. Овалы Кассини - однопараметрическое семейство кривых, удобных для аппроксимации формы поверхности ядра. Объём сохраняется. Параметр \in меняется от 0 (сфера) с шагом 0,1 до 1,2 ($\in = 1,1$ и 1,2 соответствует разделившимся осколкам). При $\in = 1,0$ (лемниската Бернулли) кривая имеет точку самопересечения в центре симметрии.

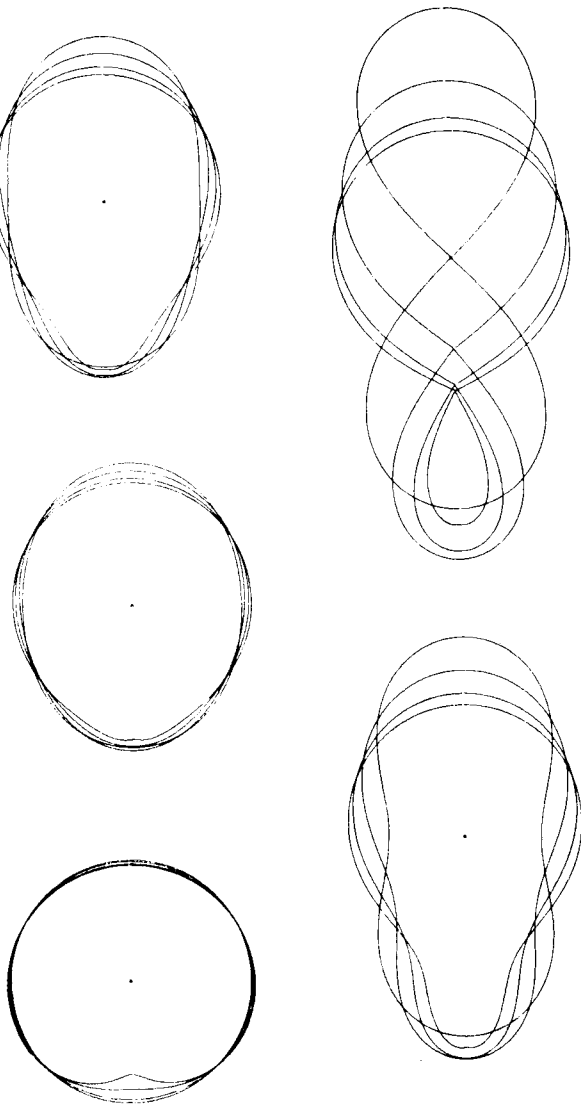


Рис.3. Овалы Кассини, возмущенные "дипольной" ($\alpha_1 \neq 0$) деформацией. Рисункам в верхнем ряду (слева направо) соответствует $\alpha_1 = 0, 0,25$ и $0,50$, и в нижнем ряду $\alpha_1 = 0,75$ и $1,00$. На каждом рисунке кривые, соответствующие $\alpha_1 = 0, 0,1, 0,2, 0,3$, пересекают горизонтальную ось симметрии справа от начала координат в точках, расстояние которых от начала координат максимально при $\alpha_1 = 0$ и уменьшается с ростом α_1 . Начало координат отмечено крестом.

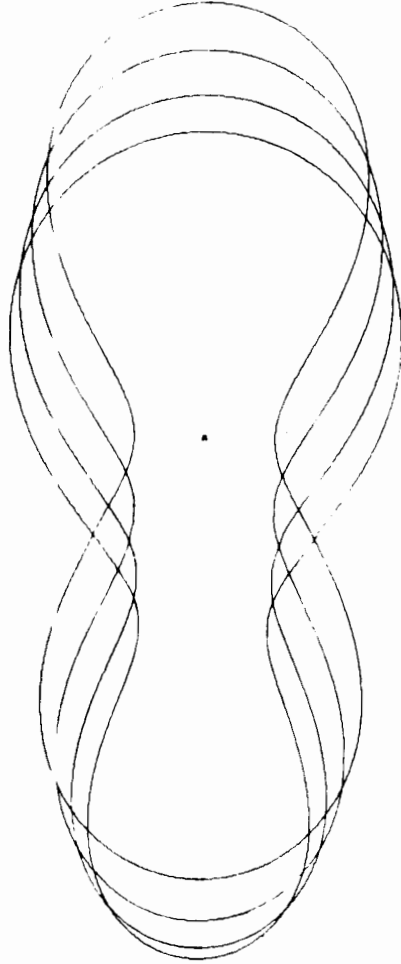


Рис.4.То же, что и на рис.3, при $\epsilon = 0,95$.

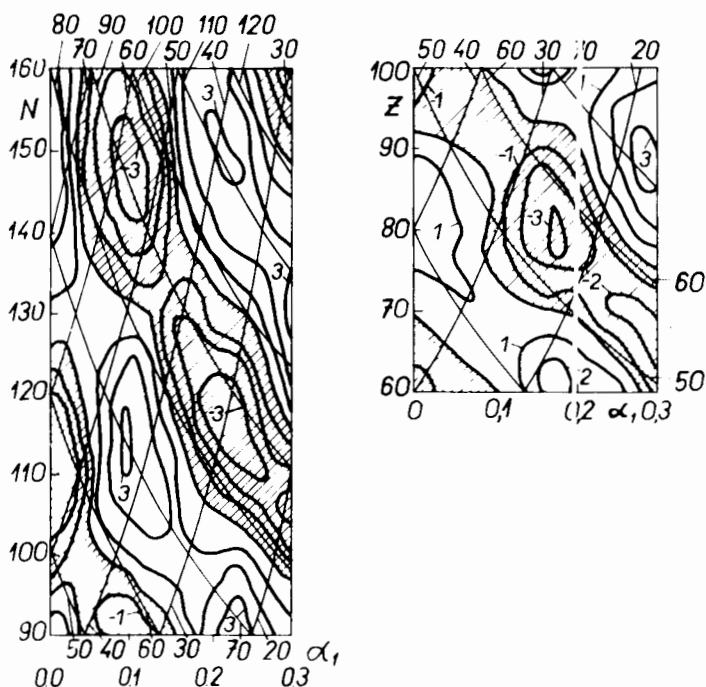


Рис.5. Оболочечная поправка для нейтронов (слева) и протонов (справа). Зависимость от "дипольной" деформации α_1 и числа нуклонов представлена в виде топографической карты. Линии уровня оболочечной поправки (толстые кривые) проведены с интервалом в 1 Мэв. Области, где оболочечная поправка отрицательна, заштрихованы. Тонкими линиями нанесены кривые, вдоль которых постоянно число нуклонов в легком (линии, идущие вправо-вверх) и тяжелом (линии, идущие влево вверх) осколках. Числа, кратные 10, в верхнем и (только у нейтронов) нижнем горизонтальных рядах означают число нуклонов в осколках. Числа в правых вертикальных рядах означают полное число нуклонов.

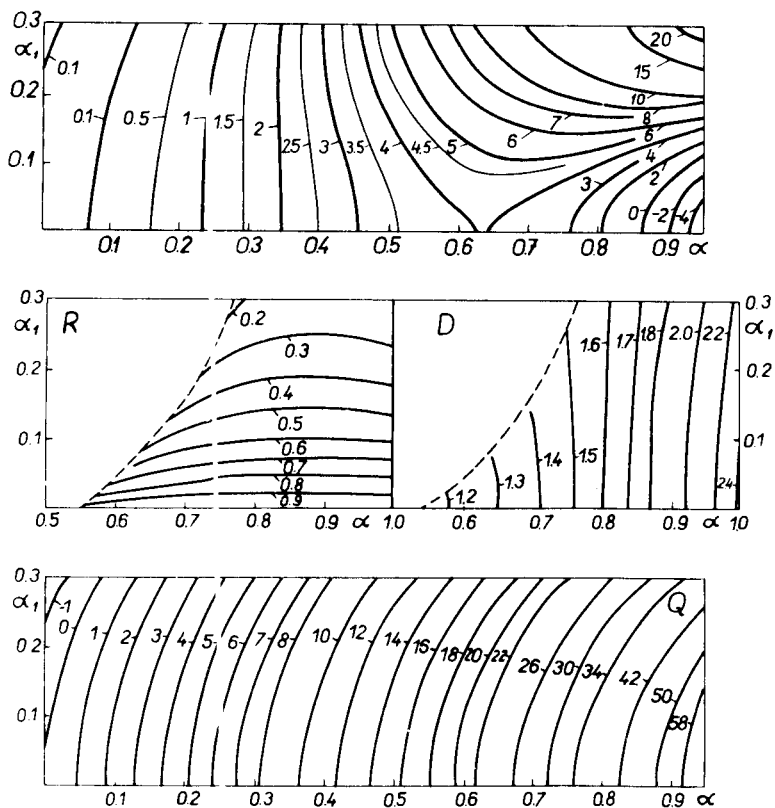


Рис.6. Зависимость от параметров α и α_1 , данная в форме топографических карт, следующих величин. Вверху - энергия ядра ^{236}U (в МэВ) в модели жидкой капли, определенная уравнением (9). В середине слева - отношение объёмов легкого к тяжелому осколку. В середине справа - расстояние между центрами тяжести осколков. В качестве единицы измерения выбран радиус равновеликой сферы R_0 . Внизу - величина, пропорциональная квадрупольному моменту ядра Q (определение дано в приложении). Цифры при линиях уровня увеличены в 10 раз.

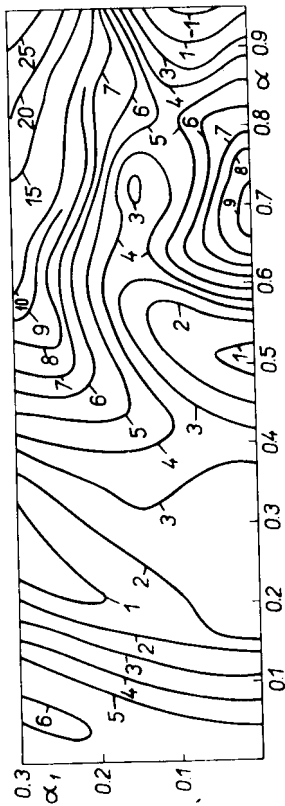
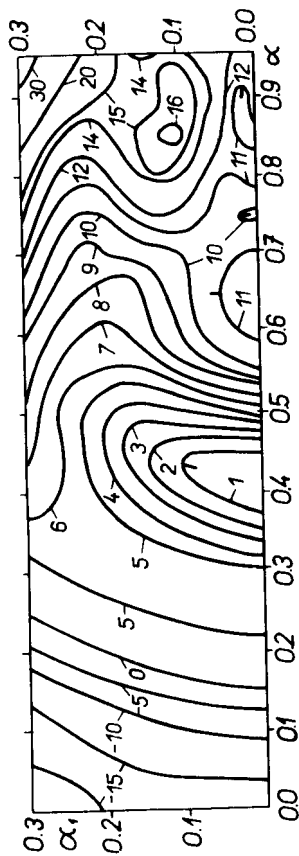


Рис. 1. Зависимость от параметров α_1 и α λ , для ^{208}Pb (вверху) и ^{230}Th (внизу).

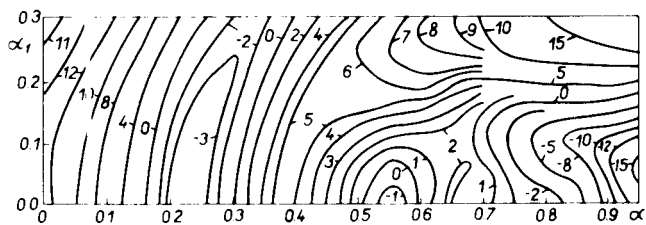
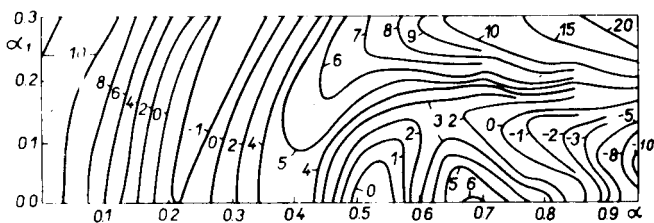
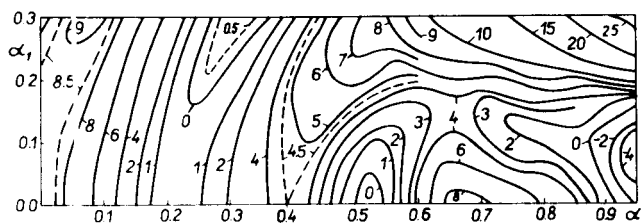


Рис.8. То же, что на рис.7, для ^{236}Pu - сверху, ^{240}Pu - в середине, ^{252}Cf - внизу.

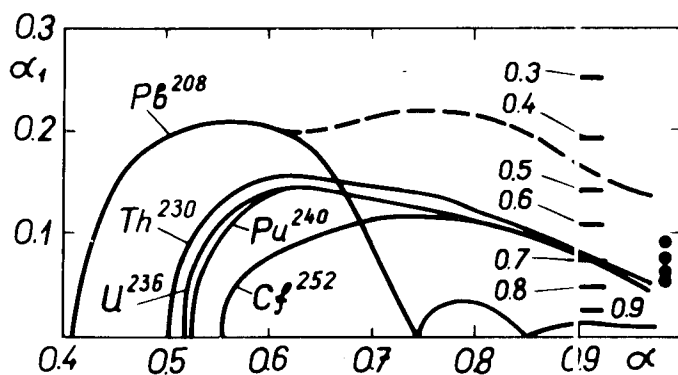


Рис.9. Положение дна долин, ведущих от второй седловой точки к разрыву и ко второму минимуму. Для ^{208}Pb имеется две долины, более высоко расположенная отмечена пунктиром. При $\alpha_1 = 0,9$ дана шкала отношения масс легкого к тяжелому осколку. Точками отмечены экспериментальные отношения масс легкого к тяжелому осколку в наиболее вероятном делении ядер Th^{232} , U^{235} , Pu^{239} и Cf^{252} , сверху - вниз, соответственно /19-22/.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.М.Струтинский. Ядерная физика, 3, 614 (1966).
2. V.M.Strutinsky. Nucl.Phys., A95, 420(1967).
3. V.M.Strutinsky. Nucl.Phys., A122, 1 (1968).
4. В.В.Нашкевич. Сообщение ОИЯИ, Р4-4383, Дубна, 1969 г.
5. M.Brack, J.Damgaard, H.C.Pauli, A.Stenholm-Jensen,
V.M.Strutinsky and C.Y.Wong. Nucl. Phys. (to be published).
6. S.Cohen and W.J.Swiatecki. Annals of Physics, 22, 406 (1963).
7. В.С.Ставинский, Н.С.Работнов, А.А.Серёгин. Ядерная физика,
7, 1051 (1968).
8. V.M.Strutinsky, N.Ya.Lyashchenko and N.A.Popov. Nucl.Phys., 46,
639 (1963).
9. M.Bolsterli, E.O.Fiset and J.R.Nix.
Труды Второго симпозиума по физике и химии деления, Вена,
1969 г.
10. E.Rost. Phys.Letters, 26B, 184 (1968).
11. П.Э.Немировский. Современные модели атомного ядра, Атомиз-
дат, 1960.
12. П.Э.Немировский, В.А.Чепурнов. Ядерная физика, 3, 998 (1966).
13. В.А.Чепурнов. Ядерная физика, 6, 955 (1967).

14. В.В.Пашкевич, В.М.Струтинский. Ядерная физика, 9, 56 (1969).
15. J.Damgaard, H.C.Pauli, V.V.Pashkevich and V.M.Strutinsky. Nucl.Phys., A135, 432 (1969).
16. Ф.А.Гареев, С.П.Иванова, В.В.Пашкевич. Ядерная физика, II, 1200 (1970).
17. S.Bjornholm, V.M.Strutinsky. Nucl.Phys., A136, 1 (1969).
18. С.А.Карамян, Ю.Ц.Оганесян, Б.И.Пустыльник. Ядерная физика, II, 982 (1970).
19. H.R. von Gunten. Actinides Review, 1, 275 (1969).
20. Е.П.Стейнберг, Л.Е.Гленденин. Материалы Международной конференции по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1959), Т.7, М., Госхимиздат, 1958, стр.11.
21. H.W. Schmitt, J.H.Neiler and F.J.Walter. Phys.Rev. 141, 1146 (1966).
22. W.E. Nerviik. Phys.Rev., 119, 1685 (1960).
23. A.W.Fairhall, R.C.Jensen, F.F.Neusil. Proc. of the Second U.N. Intern. Conf. on the Peaceful Use of Atomic Energy, Geneva, 1958, Vol. 15, p. 452.
24. T.T.Sugihava et al. Phys.Rev., 121, 1179 (1961).
25. P.Möller, S.G.Nilsson. Phys.Letters, 31B, 283 (1970).
26. А.В.Игнатьев. Ядерная физика, 7, 1043 (1968).

Рукопись поступила в издательский отдел
19 января 1971 года.