СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р4 - 5510

В.Б. Беляев, А.Л. Зубарев

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

О НЕКОТОРЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА С ПОТЕНЦИАЛАМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

1970

P4 - 5510

В.Б. Беляев, А.Л. Зубарев*

О НЕКОТОРЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА С ПОТЕНЦИАЛАМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

* Ташкентский государственный университет.

Some practical potentialities of the separable expansion of partial harmonics of the nucleon-nucleon potential $V_\ell(k,k')$ of an arbitrary form are considered here. It turned out that the most universal expansion has the following form

$$V_\ell(k,k') = \sum_{i,j=1}^{N} (\alpha^{-1})_{ij}\, P(k,s_i)\, P(k',s_j),$$

where

$\alpha_{ij} = V_\ell(s_i,s_j)$ and P is the interpolation function,

$$P(s_\mu, s_i) = V_\ell(s_\mu, s_i) \quad , \; \mu = 1,\dots N+M; \; i = 1,\dots N \; .$$

The possibility of the direct application of the formula of the mechanical quadrature to expression

$$V_\ell(k,k') = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty V(r)\, r^2 j_\ell(kr)\, j_\ell(k'r)\, dr$$

is also discussed. Such factorization appears to be the most effective for the square well potential and for potential with the infinite repulsion at the small distances.

The separable representations of potential $V_\ell(k,k')$ based on the expansions of the form

$$j_\ell(kr) = \sum_m C_m^\ell(k)\, H_m(r)$$

are discussed as well.

The proof of the uniform convergence of Beitmans' expansion

$$V(k,k') = \sum (\alpha^{-1})_{ij}\, V(k,s_i)\, V(s_j,k')$$

is given.

1. Однозначная интерпретация наблюдаемых свойств 3-нуклонных систем возможна в том случае, если при решении динамических уравнений (уравнений Фаддеева /1/ в данном случае) не привлекаются никакие дополнительные соображения о свойствах системы, т.е. при безмодельном методе решения уравнений. При этом процедура приближения должна гарантировать сходимость процесса приближения и быть достаточно универсальной для расчетов с двухчастичным взаимодействием произвольной формы.

Наиболее распространенным способом решения уравнений Фаддеева является метод сепарабельного представления 2-частичной парциальной t -матрицы:

$$t_\ell^N(k,k',z) = \sum_{i,j=1}^{N} C_{ij}^\ell(z)\,\eta_i^\ell(k)\,\eta_j^\ell(k') . \qquad (1)$$

Разложение (1) естественным образом возникает, если аппроксимировать фурье-образ потенциала выражением вида

$$V_\ell^N(k,k') = \sum_{i,j=1}^{N} d_{ij}^\ell \, \eta_i^\ell(k)\, \eta_j^\ell(k') \ . \tag{2}$$

Для получения представления (2) в настоящее время используются разложения, основанные на методах Бубнова-Галеркина [2], Гильберта-Шмидта [3] и Бейтмана [4]. В методах Бубнова-Галеркина и Гильберта-Шмидта функции $\eta_i^\ell(k)$ имеют явный вид лишь для некоторых простых потенциалов. Для большинства реалистических потенциалов они могут быть построены численно, что существенно усложняет задачу. Метод Бейтмана применим к более широкому классу потенциалов. Это разложение наиболее удобно, если $V_\ell(k,k')$ имеет явный вид, например для потенциалов, являющихся суперпозицией юкавовских потенциалов.

Однако существует набор феноменологических потенциалов, таких, как потенциал Хамада-Джонстона [5], для которых ни одна из перечисленных процедур не может быть непосредственно применена. Мы укажем ниже на некоторые другие возможности сепарабельного представления потенциала $V(k,k')$, которые позволяют легко построить функции $\eta_i(k)$ и коэффициенты d_{ij}.

Рассмотрим сначала точечную интерполяцию функции двух переменных $V(k,k')$. В этом случае интерполяционные процессы Лагранжа, Эрмита, Абеля-Гончарова, Бернштейна [6] дают

$$V^N(k,k') = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \ \ell_i^{N-1}(k)\, \ell_j^{N-1}(k') \ , \tag{2a}$$

где $\ell_i^{N-1}(k)$ – соответствующий интерполяционный полином. (Ясно, что из-за короткодействия потенциала все интегрирования можно проводить в конечных пределах). Легко видеть, что t -матрица, полученная с потенциалом (2a), содержит в первом приближении член, не зависящий от k и k', который соответствует приближению нулевого радиуса действия ядерных сил. Поэтому следует ожидать, что для достаточно протяженных потенциалов в разложении (2а) нельзя ограничиваться небольшим числом членов. С другой стороны, как видно из (2а), число членов в разложении равно числу узлов интерполяции и при небольшом числе[x/] членов в этом разложении нельзя достигнуть хорошей точности. Так, например, это разложение в случае процесса Лагранжа с $N = 4,5,6$ дает для потенциала Хюльтена (фурье-образ которого не имеет явного вида) значение

$$\chi^2 = \frac{\int |V(k,k') - V^N(k,k')|^2 \, dk \, dk'}{\int |V(k,k')|^2 \, dk \, dk'} \approx 10^{-1},$$

в то время как метод Бейтмана дает для большинства рассмотренных потенциалов $\chi^2 \approx 10^{-3}$.

Покажем, что для функции двух переменных, тем не менее, существуют точечные интерполяционные формулы, в которых увеличение числа узлов может не увеличивать числа членов разложения. Действительно, рассмотрим разложение Бейтмана:

$$V^N(k,k') = \sum_{i,j=1}^{N} (d^{-1})_{ij} \, V(k,s_i) \, V(s_j,k'), \qquad (3)$$

$$d_{ij} = V(s_i, s_j)$$

и заменим функции $V(k, s_i)$ интерполирующими функциями $P(k, s_i)$, которые совпадают с $V(k,s_i)$ в точках $s_1, \ldots, s_N, s_{N+1}, \ldots, s_{N+M}$. Тогда выражение

[x/] Как известно, число одномерных интегральных уравнений, которые возникают при факторизации, пропорционально N, поэтому возможности ЭВМ приводят к ограничению значения N.

$$V^N(k,k') = \sum_{i,j=1}^{N} (d^{-1})_{ij}\, P(k,s_i)\, P(s_j,k') \qquad (4)$$

совпадает с фурье-образом потенциала в точках

$$V^N(s_i,s_j) = V(s_i,s_j)\,, \qquad 1 \le i \le N\ ;$$

$$V^N(s_j,s_i) = V(s_j,s_i)\,, \qquad 1 \le j \le N + M\ .$$

Для потенциала Хюльтена разложение (4) с $N = 4$ и $M = 11$ дает значение $\chi^2 \approx 10^{-3}$, т.е. не хуже, чем в методе Бейтмана. Таким образом, разложение (4) дает универсальный способ факторизации парного потенциала произвольной формы.

Укажем еще на некоторые возможности получения сепарабельного представления фурье-образа потенциала. ℓ – гармоника фурье-образа потенциала $V(r)$ имеет вид:

$$V_\ell(k,k') = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty j_\ell(kr)\, j_\ell(k'r)\, V(r)\, r^2\, dr\ . \qquad (5)$$

Наиболее прямым способом факторизации является применение к выражению (5) формул механических квадратур:

$$V_\ell^N(k,k') = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{N} j_\ell(kr_i)\, j_\ell(k'r_i)\, r_i^2\, V(r_i)\, \Delta_i\ , \qquad (6)$$

где r_i , Δ_i – узлы и веса.

Очевидно, что выражение (6) в первом приближении соответствует δ – образному потенциалу $V(r) = c\,\delta(r-r_1)$. Разложение (6) с $N = 4$ для потенциала Хюльтена дает значение $\chi^2 \approx 10^{-2}$, что значительно хуже точности, полученной с использованием разложения (4). Однако для прямоугольной ямы точность разложения (6) с $N = 4$ оказывается достаточной ($\chi^2 \approx 10^{-3}$). Как показано в /7/, для потенциала " hard core " разложение (6) наиболее удобно, поскольку при любом N приближенная фаза рассеяния совпадает с точной.

Другая возможность сепарабельного представления потенциала заключается в разложении $j_\ell(kr)$ по полной системе функций $\beta_i(r)$. В этом случае выражение (2) принимает вид:

$$V_\ell^N(k,k') = \sum_{i,j=1}^{N} \left(\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \beta_i(r)\,\beta_j(r)\,V(r)\,r^2\,dr\right) a_i^\ell(k)\,a_j^\ell(k').$$

Например, разлагая $j_0(kr)$ в ряд по полиномам Эрмита, для $V_0(k,k')$ получаем разложение:

$$V_0(k,k') = \frac{\pi}{4}\sum_{m,n=0}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{k^{2n}\,k'^{2m}\,e^{-\frac{1}{4}(k^2+k'^2)}\,a_{mn}}{2^{4(m+n)+2}\,n!\,m!\,\Gamma(n+3/2)\Gamma(m+3/2)},$$

$$a_{mn} = \int_0^\infty V(x)\,H_{2n+1}(x)\,H_{2m+1}(x)\,dx,$$

обладающее тем свойством, что при $k = k' = 0$ точный и приближенный потенциалы совпадают.

Рассматривая различные процедуры сепарабельного представления потенциала, следует иметь в виду, что они могут иногда приводить к одинаковым разложениям. Например, для S -гармоники потенциала прямоугольный ямы имеем:

$$V_0(k,k') = \frac{1}{kk'}\int_0^1 \sin(kr)\,\sin(k'r)\,dr.$$

Введем

$$V_1\ (k,k') = 2\int_0^1 \sin(kr)\ \sin(k'r)\,dr\ . \tag{7}$$

Разложим $\sin(kr)$ в ряд по синусам:

$$\sin(kr) = \sum_{n=1}^{\infty} V_1\ (k, n\pi)\ \sin(n\pi r)\ . \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), получим:

$$V_1\ (k,k') = \sum_{n,m} V_1\ (k,n\pi)\ V_1(m\pi, k')\ V_1(n\pi\ ,\ m\pi)\ ,$$

но $V_1\ (n\pi\ ,\ m\pi) = \delta_{nm}$, следовательно,

$$V_1\ (k,k') = \sum_{n,m} V_1(k, n\pi)\ V_1\ (m\pi, k')\ d^{-1}_{nm}\ ,$$

$$d_{nm} = V_1\ (n\pi\ ,\ m\pi)\ .$$

Таким образом, мы получили, что разложение Бейтмана с узлами $s_i = i\pi$ для потенциала прямоугольной ямы эквивалентно факторизации, основанной на разложении (8).

2. Как было показано выше, разложение (4) является обобщением разложения Бейтмана на случай потенциалов, не имеющих фурье-образа в явном виде. В связи с этим заметим, что разложение Бейтмана реализует интерполяционный процесс, сходимость которого зависит от системы узлов s_i . Существуют другие интерполяционные процессы (например, процесс Лагранжа), не дающие равномерной сходимости для непрерывной функции при любой системе узлов /8/. Покажем, что для разложения Бейтмана справедлива следующая

Теорема. Существует система узлов, для которой:

1) если функция $V(x,y)$ непрерывна на конечном отрезке $[a,b]$, то разложение (3) сходится к $V(x,y)$ равномерно на $[a,b]$;
2) если $V(x,y)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, тогда разложение (3) сходится к $V(x,y)$ почти во всех точках отрезка $[a,b]$;
3) если $V(x,y)$ интегрируема на $[a,b]$ и в точке (x_0, y_0) непрерывна, то в этой точке разложение (3) сходится к $V(x_0,y_0)$.

Доказательство. Докажем теорему для отрезка $[0,1]$. Очевидно, что переход к любому конечному отрезку тривиален. Введем систему точек $a_i = \frac{i-1}{2^{m-1}}$, $1 \le i \le 2^{m-1}$, m –целое, и рассмотрим отрезки $\ell_{mi} = [\frac{i-1}{2^{m-1}}, \frac{i}{2^{m-1}})$ (конечно, в случае $i = 2^{m-1}$ отрезок $\ell_{m,2^{m-1}}$ надо считать замкнутым также справа). Легко видеть, что

$$\ell_{m,1} + \ell_{m,2} + \ldots + \ell_{m,2^{m-1}} = [0,1].$$

Введем кусочно-постоянную функцию

$$\Psi(x,y) = b_{ij} \quad \text{при} \quad \begin{matrix} x \subseteq \ell_{mi}, & 1 \le i \le 2^{m-1}, \\ y \subseteq \ell_{mj}, & 1 \le j \le 2^{m-1}, \end{matrix} \tag{9}$$

где b_{ij} равно среднему значению $V(x,y)$ при $x \subseteq \ell_{mi}$, $y \subseteq \ell_{mj}$.
Построим систему узлов s_i:

$$V(s_i, s_j) = b_{ij}, \quad \begin{matrix} s_i \subseteq \ell_{mi}, \\ s_j \subseteq \ell_{mj}. \end{matrix} \tag{10}$$

(Очевидно, что условие (10) всегда выполняется, если m достаточно велико).

Тогда нетрудно видеть,что

$$\Psi^m(x,y) \equiv \sum_{i,j=1}^{2^{m-1}} (d^{-1})_{ij}\, \Psi^m(x,s_i)\, \Psi^m(s_j,y), \tag{11}$$

$$d_{ij} = V(s_i, s_j).$$

С другой стороны, $\Psi^m(x,y)$ является отрезком ряда Фурье-Хаара для функции $V(x,y)$, и все утверждения теоремы о сходимости $\Psi^m(x,y)$ к $V(x,y)$ справедливы /9/. А так как правая часть (11) стремится к разложению Бейтмана для $V(x,y)$, то все утверждения теоремы справедливы для разложения Бейтмана.

При доказательстве теоремы мы предполагали существование матрицы $(d^{-1})_{ij}$. Если для построенной системы узлов матрицы $(d^{-1})_{ij}$ не существует, то, переходя к обобщенным системам функций Хаара /9/, можно всегда построить конечную матрицу $(d^{-1})_{ij}$. Как видно из теоремы, равномерная сходимость разложения Бейтмана для потенциала (а, следовательно, и для t -матрицы) не зависит от знакоопределенности потенциала, в то время как, например, разложение Гильберта-Шмидта сходится равномерно лишь для притягивающих потенциалов (теорема Мерсера /10/).

Покажем единственность разложения (3). Пусть имеется функция двух переменных $V(x,y)$. Рассмотрим $V^N(x,y) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\, \eta_i(x)\, \phi_j(y)$. Если

$$\begin{aligned} V^N(x,s_i) &= V(x,s_i), \\ V^N(s_i,y) &= V(s_i,y), \end{aligned} \qquad i = 1,2 \ldots N, \tag{12}$$

то произведение $a_{ij}\, \eta_i(x)\, \phi_j(y)$ определяется единственным образом. Действительно,

при $N = 1$

$$V^1(x,y) = \frac{V(x,s_1)\,V(s_1,y)}{V(s_1,s_1)}, \qquad (13)$$

при $N = M$

$$V^M(x,y) = V^{M-1}(x,y) + \beta\,\phi_1(x)\,\Psi_1(y)$$

и $$\beta\,\phi_1(x)\,\Psi_1(y) = \frac{[V(x,s_M) - V^{M-1}(x,s_M)][V(s_M,y) - V^{M-1}(s_M,y)]}{V(s_M,s_M) - V^{M-1}(s_M,s_M)}.$$

Таким образом, из условия (12) произведение $\alpha_{ij}\ \eta_i(x)\ \phi_j(y)$ определяется однозначно.

3. Перейдем теперь к численному примеру. В таблице приведены результаты расчётов с потенциалом Хюльтена методом (4) с $N = 4$, $M = 11$.

Таблица

a^s (fm)	a^t (fm)	ϵ_d	$\tilde{\tilde{a}}^s$ (fm)	$\tilde{\tilde{a}}^t$ (fm)	$\tilde{\tilde{\epsilon}}_d$	^2a (fm)	E_T	r_s (fm)
-23,69	5,378	2,225	-23,7	5,4	2,18	-1,8	10,5	2,7

Здесь $\tilde{\tilde{a}}^s$, $\tilde{\tilde{a}}^t$ – приближенные, a^s , a^t – точные синглетные и триплетные длины рассеяния, $\tilde{\tilde{\epsilon}}_d$ и ϵ_d – приближенная и точная энергия связи дейтрона, ^2a – дублетная длина nd – рассеяния, E_T – энергия связи трития, r_s – эффективный синглетный радиус.

Сравнение с результатами работы /11/ подтверждает вывод о сильной зависимости величин ^2a и E_T от формы потенциала для потенциалов, не содержащих отталкивания.

Приводимые здесь значения ^2a и E_T, так же как и в случае расчётов с прямоугольной ямой, несколько отличаются от расчётов этих величин методом Гильберта-Шмидта /12/ .

Авторы выражают благодарность В.Н. Ефимову, Б. Ахмадходжаеву и Е. Вжеционко за интерес к работе.

Литература

1. Л.Д. Фаддеев. ЖЭТФ, 39, 1459 (1960).
2. V.N. Efimov. Comptes Rend. du Congr. Internat. de Physique Nucl. VII, p. 258, Paris, 1964;

   Препринты ОИЯИ Р-2546, Р-2890, Дубна, 1960.
3. Л.Д. Фаддеев. Доклад на V Международной конференции по физике электронных и атомных столкновений. Наука, Ленинград, 1967; A.G. Sitenko, V.F. Kharchenko, N.M. Petrov. Phys.Lett., 28B, 308 (1968); J.S. Ball, D.Y. Wong. Phys.Rev., 169, 1362 (1968); В.Ф. Харченко, Н.М. Петров. Препринт ИТФ-69-8, Киев, 1969; В.Ф. Харченко, С.А. Стороженко. Препринт ИТФ-69-19, Киев, 1969.
4. В.Б. Беляев, Е. Вжеционко. Препринт ОИЯИ, Р4-4144, Дубна, 1968.
5. T. Hamada and I.S. Johnston. Nucl.Phys., 34, 382 (1962).
6. Ш.Е. Микеладзе. Численные методы математического анализа, Гостехиздат, Москва, 1953.

7. В.Б. Беляев, А.Л. Зубарев. Препринт ОИЯИ, Р1-5345, Дубна, 1970.
8. А.Ф. Тиман. Теория приближения функций действительного переменного. Физматгиз, Москва, 1960.
9. И.М. Соболь. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара, Наука, Москва, 1969.
10. Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики. т. 1, Гостехиздат, Москва, 1933.
11. Б. Ахмадходжаев, В.Б. Беляев, А.Л. Зубарев. Препринт ОИЯИ, Р4-5318, Дубна, 1970.
12. А.Г. Ситенко, В.Ф. Харченко. Препринт ИТФ-69-72, Киев, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 декабря 1970 года.