

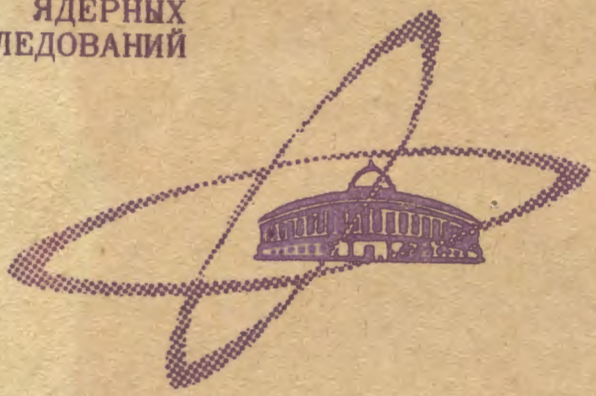
Л-879

4/1-1971

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P4-5366



ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

О. Лхагва

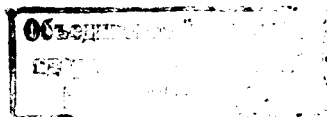
ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ К-ГАРМОНИК  
В ЗАДАЧАХ РАССЕЯНИЯ

1970

P4-5366

О. Лхагва

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ К-ГАРМОНИК  
В ЗАДАЧАХ РАССЕЯНИЯ



## В в е д е н и е

Известно, как важно иметь строгие границы для искомых величин, такие, например, как вариационные оценки значений энергии в случае связанных состояний. Наличие строгих границ помогает, например, "обратной" задаче выбора параметров взаимодействия на основании сравнения экспериментальных данных с теоретическими оценками.

Вариационный принцип для задач рассеяния, предложенный впервые Като<sup>/1/</sup>, был развит в работах<sup>/2/</sup>. В<sup>/2/</sup> принцип минимума использовался для вычисления длины рассеяния частиц не только статическим потенциалом, но также сложной системой, имеющей  $M$  дискретных уровней.

Новый метод, пригодный в случае ненулевой энергии падающей частицы, был предложен Spruch<sup>'ом</sup> и др.<sup>/3/</sup>. Используя формальный проекционный метод<sup>/4/</sup>, они доказали, что с возрастанием числа учитываемых виртуальных (закрытых) каналов определенные комбинации элементов  $\hat{K}$ -матрицы монотонно увеличиваются.

В работе<sup>/5/</sup> метод был обобщен на реакции с перераспределением частиц.

Ниже мы покажем, как можно распространить подход на описание /6,7/ реакций общего типа с помощью К-гармоник (см. раздел 1).

При этом замечательным является тот факт, что до порога развала системы отбрасывание любого члена разложения по К-гармоникам приводит к одностороннему сдвигу упомянутых параметров рассеяния.

Второй раздел работы посвящается рассмотрению процессов с двумя и более фрагментами до или после реакции. В этом отношении одно из удобств метода К-гармонических функций заключается в том, что он позволяет свести описание системы к решению уравнений для функций  $\chi_K(\rho)$ , зависящих от одной переменной (радиуса гиперсферы  $\rho$ ), аналогично тому, как это делается в задаче двух тел при разложении  $\Psi(\vec{\rho}_{12})$  по шаровым гармоникам  $Y_{\ell m}(\Omega)$ :  $\Psi(\vec{\rho}_{12}) = \sum_{\ell, m} \chi_{\ell}(\rho_{12}) Y_{\ell m}(\Omega)$ . Это обстоятельство позволяет образовать пакет по переменной  $\rho$  в каналах реакции с числом фрагментов  $N \geq 3$  и тем самым обобщить теорию временных задержек на такие процессы.

### 1. Границы для параметров рассеяния

Рассмотрим рассеяние частицы на сложной системе. Пусть в процессе рассеяния происходят возбуждения мишени и реакции с перераспределением частиц. Представим волновую функцию системы в виде /7/

$$\Psi = X + \phi, \quad (1)$$

где  $\phi$  - функция, описывающая асимптотическое поведение  $\Psi$  и известная с точностью до конечного числа параметров рассеяния /7/.

Граничные условия задачи на бесконечности полностью определяются функцией  $\phi$ . Задаем ее в виде стоячих волн:

$$\phi_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \sum_n^M \left(\frac{m_n}{k_n}\right)^{1/2} \phi_n^T \left[ a_n \sin(k_n r - \frac{1}{2} \ell_n \pi) + b_n \cos(k_n r - \frac{1}{2} \ell_n \pi) \right], \quad (2)$$

где  $m_n$  - приведенная масса,  $k_n$  - волновое число,  $\phi_n^T$  - собственная функция мишени,  $M$  - число открытых каналов.

$a_n$  и  $b_n$  связаны соотношением

$$b_n = \sum_m^M K_{nm} a_m. \quad (3)$$

Здесь  $K_{nm}$  - элементы реальной матрицы реакций  $\hat{K}$ . Коэффициенты  $a_n$  задаются произвольно ( $\sum_n a_n^2 = 1$ ), а  $b_n$  определяются из уравнения Шредингера,  $X$  - неизвестная функция. Использование вариационной формулировки /6/ приводит к системе дифференциального и алгебраических уравнений:

$$(H-E)X = - (H-E)\phi, \quad (4)$$

$$\langle \hat{\Phi}_2, (H-E)X \rangle = - \langle \hat{\Phi}_2, (H-E)\phi \rangle,$$

где  $\langle \dots \rangle$  означает интегрирование по всем переменным.  $\hat{\Phi}_2$  - стобец из функций, которые в  $\phi$  стоят перед параметрами рассеяния  $b_n$ . Число алгебраических уравнений равно числу открытых каналов.

Функция  $X$  отлична от нуля в конечной области. Ее удобно разлагать по К-гармоникам /8,9,10/. Разложение напишем, используя

проекционные операторы  $P$  и  $Q$ , связанные условиями полноты  $P + Q = 1$  и ортогональности  $PQ = QP = 0, P^2 = P, Q^2 = Q$ :

$$X = PX + QX. \quad (5)$$

Здесь  $PX$  представляет собой часть разложения, которую учитываем при расчёте для приближенного описания системы.  $QX$  - вся оставшаяся часть разложения, которую при расчете отбрасываем. Эти операторы строятся с помощью полного набора гиперсферических функций  $Y_{\bar{K}}$  /10/ следующим образом:

$$P = \sum_{\bar{K}=0}^{\bar{K}_{\max}} |Y_{\bar{K}}\rangle \langle Y_{\bar{K}}|, \quad (6)$$

$$Q = \sum_{\bar{K}=\bar{K}_{\max}}^{\infty} |Y_{\bar{K}}\rangle \langle Y_{\bar{K}}|,$$

где  $\bar{K}$  - совокупность квантовых чисел.  $\bar{K}_{\max}$  - характеризует число гармоник, необходимое для приближенного описания системы. Подставляя (5) в уравнения (4) и проектируя первое из полученных уравнений с помощью  $P$  и  $Q$ , получим:

$$(PHR - E)PX + PHQQX = -P(H - E)\phi, \quad (7a)$$

$$(QHQ - E)QX + QHPPX = -Q(H - E)\phi, \quad (7б)$$

$$\langle \hat{\Phi}_2, (H - E)PPX \rangle + \langle \hat{\Phi}_2, (H - E)QQX \rangle = -\langle \hat{\Phi}_2, (H - E)\phi \rangle. \quad (7в)$$

Здесь

$$PHR = P\hat{T}P + PV_aP, \quad QHQ = Q\hat{T}Q + QV_aQ, \quad (8)$$

$$QHR = QV_aP, \quad PHQ = PV_aQ,$$

$V_a$  - потенциал взаимодействия частицы с системой. Из уравнения (7б) можно формально выразить  $QX$  через  $PX$  и  $\phi$ :

$$QX = \frac{1}{E - QHQ} QV_aPPX + \frac{1}{E - QHQ} Q(H - E)\phi. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7а), (7в) и умножая затем первое уравнение слева на  $Y_{\bar{K}}^+(\Omega)$  (где  $\bar{K}$  принимает значения до  $\bar{K}_{\max}$ ), интегрируя по  $\Omega_\rho$  и учитывая (8), можно прийти к следующей системе матричных уравнений:

$$(\hat{T}_\rho + \hat{V} - E\hat{I})\hat{\chi}(\rho) = - \int d\Omega [Y^+(\Omega)(V_aQ \frac{1}{Q(E - T - V_a)Q} Q + 1)(H - E)]\hat{\Phi}, \quad (10)$$

$$\langle \hat{\Phi}_2, [(H-E)(1+Q) \frac{1}{Q(E-T-V_a)Q} QV_a \hat{Y}(\Omega)] \hat{\chi}(\rho) \rangle = \quad (11)$$

$$= -\langle \hat{\Phi}_2, [(H-E)Q \frac{1}{Q(E-T-V_a)Q} Q(H-E) + (H-E)] \hat{\Phi} \rangle,$$

Здесь  $\hat{I}$  - единичная матрица.  $\hat{Y}^+$ ,  $\hat{\chi}(\rho)$  - столбцы с элементами из функций  $Y_{\bar{k}}(\Omega)$  и коэффициентов разложения  $\chi_{\bar{k}}(\rho) (X = \sum_{\bar{k}} \chi_{\bar{k}}(\rho) Y_{\bar{k}}(\Omega))$  соответственно.  $\hat{T}_\rho$  - диагональная матрица оператора кинетической энергии системы в представлении  $K$  - гармоник. Выражения в квадратных скобках в (10) и в фигурных скобках в (11) обозначают прямоугольную ( $\bar{K}_{m \times x} \times M$ ) и квадратную ( $M \times M$ ) матрицы.

$$\hat{V} = \int d\Omega \hat{Y}^+(\Omega) V_a Q \frac{1}{Q(E-T-V_a)Q} QV_a \hat{Y}(\Omega) -$$

матрица ( $\bar{K}_{m \times x} \times \bar{K}_{m \times x}$ ) взаимодействия.  $\hat{\Phi}$  - столбец с элементами:

$$\phi_n = \left(\frac{m_n}{k_n}\right)^{1/2} \phi_n^T [a_n \sin(k_n r - \frac{1}{2} l_n \pi) + b_n \cos(k_n r - \frac{1}{2} l_n \pi)].$$

(10) и (11) есть точная система уравнений, эквивалентная исходной системе бесконечных уравнений (7). Решать систему бесконечных уравнений мы не можем, поэтому заменяем ее конечной системой. Перепишем (10) и (11), вводя непрерывный параметр  $\lambda$ . Значению  $\lambda = 1$  соответствует первоначальная система уравнений (10), (11), а при  $\lambda = 0$  уравнения (10) и (11) переходят в уравнения без учета  $QX$ .

$$\{\hat{T}_\rho + \hat{V}(\lambda) - E\hat{I}\} \hat{\chi}_\lambda(\rho) = -\int d\Omega [\hat{Y}^+(\Omega) (\lambda V_a Q \frac{1}{Q(E-T)Q - \lambda QV_a Q} Q + 1)(H-E)] \hat{\Phi}, \quad (12)$$

$$\langle \hat{\Phi}_2, [(H-E)(1+\lambda Q) \frac{1}{Q(E-T)Q - \lambda QV_a Q} QV_a \hat{Y}(\Omega)] \hat{\chi}(\rho) \rangle = \quad (13)$$

$$= -\langle \hat{\Phi}_2, [\lambda(H-E)Q \frac{1}{Q(E-T)Q - \lambda QV_a Q} Q(H-E) + (H-E)] \hat{\Phi}_\lambda \rangle.$$

В этих уравнениях, меняя  $\lambda$  от нуля до единицы, мы имеем возможность сделать непрерывной процедуру включения "закрытых" каналов и тем самым следить за изменением матрицы  $\hat{K}$ .

Умножим уравнение (12) на  $\hat{\chi}_\lambda^+(\rho)$  и проинтегрируем по  $\rho$ . А в (13) заменим  $\hat{\Phi}_2$  на столбец  $\hat{\Phi}_\lambda$  с элементами

$$\Phi_n^{\lambda'} = \left(\frac{m_n}{k_n}\right)^{1/2} \phi_n^T [a_n(\lambda') \sin(k_n r - \frac{1}{2} l_n \pi) + b_n(\lambda') \cos(k_n r - \frac{1}{2} l_n \pi)].$$

Из суммы полученных двух уравнений вычтем сумму тех же уравнений, причем в последних  $\lambda$  заменено на  $\lambda'$ . При  $\lambda' \rightarrow \lambda$ , полагая  $\lambda' = \lambda + d\lambda$  и используя правила операторного дифференцирования<sup>/3/</sup>

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{1}{\hat{A} - \lambda \hat{B}} = \frac{1}{\hat{A} - \lambda \hat{B}} \hat{B} \frac{1}{\hat{A} - \lambda \hat{B}},$$

можно получить следующее матричное выражение:

$$\frac{d}{d\lambda} (\hat{a}, \hat{K}(\lambda) \hat{a}) = -\langle (\hat{\chi}_1^+, \hat{\chi}_2^+) \begin{pmatrix} E - \hat{T} & E - \hat{T} \\ E - \hat{T} & E - \hat{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\chi}_1 \\ \hat{\chi}_2 \end{pmatrix} \rangle. \quad (14)$$

Здесь

$$\hat{\chi}_1 = [Q \frac{\hat{Y}}{Q(E-T-\lambda V_a)} Q V_a \hat{Y}] \hat{\chi} ,$$

$$\hat{\chi}_2 = \{ Q \frac{\hat{Y}}{Q(E-T-\lambda V_a)} Q(H-E) \} \hat{\phi} ,$$

$\hat{a}$  - столбец из чисел  $a_n$ . Покажем, что  $\frac{d\hat{K}(\lambda)}{d\lambda} \geq 0$ . Разлагаем функции  $\hat{\chi}_1$  и  $\hat{\chi}_2$  по собственным функциям оператора  $\hat{T}$ :

$$(\hat{T} - \epsilon) \phi_\epsilon = 0 ,$$

$\epsilon$  - принимает непрерывные положительные значения,

$$\langle \phi_{\epsilon'}, \phi_\epsilon \rangle = \delta(\epsilon' - \epsilon) ,$$

•

$$\hat{\chi}_1 = \int d\epsilon \hat{C}_\epsilon \phi_\epsilon , \quad (15)$$

$$\hat{\chi}_2 = \int d\epsilon \hat{d}_\epsilon \phi_\epsilon ,$$

где  $\hat{C}_\epsilon$ ,  $\hat{d}_\epsilon$  - матрицы из коэффициентов разложения. Подставляя (15) в (14), получаем

$$\langle a, \frac{d\hat{K}}{d\lambda} \hat{a} \rangle = - \int d\epsilon [(E-\epsilon) (\hat{C}_\epsilon^2 + \hat{d}_\epsilon^2 + \hat{C}_\epsilon \hat{d}_\epsilon + \hat{d}_\epsilon \hat{C}_\epsilon)] . \quad (16)$$

Так как  $\hat{C}_\epsilon$  и  $\hat{d}_\epsilon$  - матрицы реальные, а полная энергия системы  $E$  отрицательная, то величины  $(\hat{C}_\epsilon + \hat{d}_\epsilon)^2$  и  $-(E-\epsilon)$  положительные. Отсюда в (16)

$$\frac{d\hat{K}(\lambda)}{d\lambda} \geq 0 .$$

## 2. Временные задержки

Знание энергетической зависимости амплитуды рассеяния, получаемое при стационарной постановке задачи, позволяет судить о временном развитии процесса рассеяния. Вопросы о времени задержки рассматривались в ряде работ /11-14/. Однако их авторы ограничивались случаем реакции с двумя свободными фрагментами до и после реакции ( $A+a \rightarrow B+b$ ).

Непосредственное обобщение указанного формализма на случай реакции с тремя или большим числом фрагментов (например,  $A+a \rightarrow B+b+c$ ) встречает определенные трудности.

Относительное движение  $N \geq 3$  фрагментов описывается несколькими векторами в отличие от одного вектора  $\vec{r}_{12}$  для двух тел. Так, три частицы можно характеризовать двумя радиусами-векторами:  $\vec{r}_{12}$  и  $\vec{R}$  ( $R$  - расстояние третьей частицы от центра двух других).

Было неясно, как сформировать пакет в системе координат  $\vec{r}_{12}$  и  $\vec{R}$ . Можно, однако, перейти в такую систему координат, в которой описание нескольких фрагментов подобно случаю двух тел /16,6/. Введем следующие коллективные переменные:  $\rho = \sqrt{r_{12}^2 + R^2}$ , характеризующие размер системы, и пять углов  $\Omega_5$ . В качестве трех таких углов можно выбрать 3 угла Эйлера, определяющих положения треугольника 123 (рис. 1) в пространстве, и два других, характеризующих его форму.

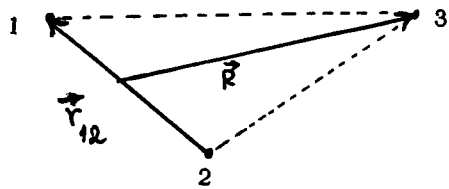


Рис. 1

Можно рассматривать эти 6 координат как один вектор  $\vec{\rho}_6$  (с модулем  $-\rho$ ) в шестимерном пространстве. Аналогичным образом можно поступить для случая большего числа фрагментов.

Асимптотика волновой функции трех тел в канале развала имеет простой вид /16,8/:

$$f(E, \Omega_5) = \frac{e^{iQ\rho}}{\rho^{5/2}}. \quad (18)$$

Поэтому в новой системе координат уже можно ввести понятие для времени задержки в каналах с числом фрагментов  $N \geq 3$  аналогично тому, как это делается в случае двух тел.

Построим пакеты для падающей и рассеянной волн:

$$\Psi_{\text{пад.}} \rightarrow \int dE F(E) e^{ikz} \phi_{n_0}(\xi) e^{-iEt},$$

$$\Psi_{\text{расс.}} \rightarrow \int dE F(E) f(E, \Omega_5) \frac{e^{iQ\rho}}{\rho^{5/2}} e^{-iEt},$$

где  $Q = \sqrt{2mE}/\hbar$ ,  $\phi_{n_0}(\xi)$  - волновая функция связанной системы.  $F(E)$  - весовая функция пакета.

Вычисляем среднее время, усредненное по плотности потока /14/.  
Для падающего пакета

$$\langle t_{\text{пад.}} \rangle = \frac{\hbar}{2imS} \int \left( \frac{\partial \Psi_{\text{пад.}}}{\partial z} \Psi_{\text{пад.}}^* - \Psi_{\text{пад.}} \frac{\partial \Psi_{\text{пад.}}^*}{\partial z} \right) t dt d\xi = \quad (19)$$

$$= v_{\text{пад.}}^{-1} \int |F|^2 \frac{d\alpha}{dE} dE,$$

где

$$F = |F| e^{i\alpha}, \quad v_{\text{пад.}}^{-1} = 2\pi S^{-1} \int |F|^2 dE, \quad v = \frac{\hbar k}{m},$$

$$S = 2\pi \int |F|^2 v dE, \quad (S = \frac{\hbar}{2im} \int \left( \frac{\partial \Psi_{\text{пад.}}}{\partial z} \Psi_{\text{пад.}}^* - \Psi_{\text{пад.}} \frac{\partial \Psi_{\text{пад.}}^*}{\partial z} \right) dt).$$

Для рассеянной частицы

$$\langle t_{\text{расс.}} \rangle = \frac{\hbar}{2imS \langle \sigma(\Omega_5) \rangle} \int \left( \frac{\partial \Psi_{\text{расс.}}}{\partial \rho} \Psi_{\text{расс.}}^* - \Psi_{\text{расс.}} \frac{\partial \Psi_{\text{расс.}}^*}{\partial \rho} \right) t dt = \quad (20)$$

$$= v_{\text{расс.}}^{-1} \langle \sigma(\Omega_5) \rangle^{-1} S^{-1} \int |F|^2 |f|^2 V \left( \frac{d\beta}{dE} + \frac{d\alpha}{dE} \right) dE,$$

где  $\langle \sigma(\Omega_5) \rangle = 2\pi S^{-1} \int |F(E)|^2 |f(E, \Omega_5)|^2 V dE$  - среднее дифференциальное сечение.  $f(E, \Omega_5) = |f| e^{i\beta}$ .

$$v_{\text{расс.}}^{-1} = \int |F|^2 |f|^2 dE / \int |F|^2 |f|^2 V dE, \quad v = \frac{\hbar Q}{m}.$$



Сравнение формул (19) и (20) показывает, что волновой пакет при включении взаимодействия задерживается на время  $\langle \Delta t \rangle$  по сравнению со свободным полетом через область взаимодействия,

$$\langle \Delta t \rangle = \frac{\int |F|^2 |f|^2 v \left( \frac{d\beta}{dE} + \frac{da}{dE} \right) dE}{\int |F|^2 |f|^2 v dE} - \frac{\int |F|^2 \frac{da}{dE} dE}{\int |F|^2 v dE}.$$

В заключение выражаю благодарность Б.И. Захарьеву за постоянное внимание и руководство работой, И.В. Амирханову, В.П. Пермякову, Ю.И. Фенину за полезные дискуссии.

#### Л и т е р а т у р а

1. T. Kato. Prog.Theor.Phys., 6, 394 (1951).
2. L. Spruch et al. Phys.Rev., 116, 1034 (1959);  
118, 184 (1960); 119, 164 (1960).
3. Y. Hahn, T.F. O'Malley and L. Spruch. Phys.Rev., 134, B397(1964).
4. H. Feshbach. Ann.Phys. (N.Y.), 5, 357 (1958); 19, 287(1962).
5. Б.Н. Захарьев, В.П. Пермяков, Ю.И. Фенин. Препринт ОИЯИ,  
Р4-5332, Дубна, 1970.
6. Т.Г. Ефименко, Б.Н. Захарьев, О. Лхагва. Препринт ОИЯИ, Р4-4923,  
Дубна, 1970; Известия АН СССР (физ. серия), 34, 1796 (1970).
7. Т.Г. Ефименко, В.П. Жигунов, Б.Н. Захарьев.  
Ann.Phys.(N.Y.), 47, 275 (1968).
8. Ю.А. Симонов. ЯФ, 3, 630 (1966).
9. W. Zickendraht. Ann.Phys. (N.Y.), 35, 18 (1965);  
M. Fabre de la Ripelle. Preprint ipno/TH, 157 (1969).

10. Б.Н. Захарьев, В.В. Пустовалов, В.Д. Эфрос. ЯФ, 8, 406 (1968).
11. E.P. Wigner. Phys.Rev., 98, 145 (1956).
12. Д. Бом. Квантовая теория, стр. 308. Издательство "Наука", Москва,  
1965.
13. F.T. Smith. Phys.Rev., 118, 349 (1960).
14. T. Ohmura. Suppl. of Prog. Theor.Phys., 29, 108 (1964).
15. M.R.H. Rudge. Rev.Mod.Phys., 40, 4564 (1968).
16. M.R.H. Rudge and M.J. Seaton. Proc.Roy.Soc., 283, 262 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел  
21 сентября 1970 года.