ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4-5262

Г.Н. Афанасьев, Е.Б. Бальбуцев

О ВОЗМОЖНОЙ ПРИРОДЕ 0^+–УРОВНЕЙ В ^{16}O

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1970

P4-5262

Г.Н. Афанасьев, Е.Б. Бальбуцев

О ВОЗМОЖНОЙ ПРИРОДЕ $0^{\pm}$-УРОВНЕЙ В ^{16}O

Направлено в ЯФ

В настоящее время общепринятой является интерпретация 0^+-уровней в ^{16}O на основе базиса s, d -оболочки. В данной работе предпринята попытка дать иное объяснение природы этих уровней.

Хорошо известно/1/, что полная энергия ядра является однозначным функционалом плотности $\rho(r)$. Хорошей аппроксимацией для $\rho(r)$ является трехпараметрическая формула/2/:

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{1 + ar^2}{1 + \exp\left(\frac{r-b}{c}\right)} . \tag{1}$$

Независимых параметров здесь три: a, b, c. ρ_0 определяется из условия нормировки

$$4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 \, dr = A,$$

где A -число нуклонов в ядре. Полная энергия, являясь однозначным функционалом $\rho(r)$, естественно, зависит от этих трех параметров. Пусть она имеет минимум при некоторых значениях a_0, b_0, c_0. Рассмотрим малые колебания параметров a, b, c возле их равновесных значений. Разлагая полную энергию по степеням $\Delta a = a - a_0$, $\Delta b = b - b_0$, $\Delta c = c - c_0$, получаем:

$$E = E_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_0}{\partial a^2}(\Delta a)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_0}{\partial b^2}(\Delta b)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_0}{\partial c^2}(\Delta c)^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 E_0}{\partial a \partial b}(\Delta a)(\Delta b) + \frac{\partial^2 E_0}{\partial a\, \partial c}(\Delta a)(\Delta c) + \frac{\partial^2 E_0}{\partial b\, \partial c}(\Delta b)(\Delta c). \qquad (2)$$

Квантовомеханический аналог выражения (2) есть гамильтониан системы /3/:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M_a}\frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{\hbar^2}{2M_b}\frac{\partial^2}{\partial b^2} - \frac{\hbar^2}{2M_c}\frac{\partial^2}{\partial c^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_0}{\partial a^2}a^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_0}{\partial b^2}b^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_0}{\partial c}c^2 + \frac{\partial^2 E_0}{\partial a \partial b}ab + \frac{\partial^2 E_0}{\partial a \partial c}ac + \frac{\partial^2 E_0}{\partial b \partial c}bc, \qquad (3)$$

где M – массовые параметры.

Переходя здесь к новым переменным

$$\alpha^2 = \sqrt{\frac{\partial^2 E_0}{\partial a^2}\frac{M_a}{\hbar^2}}\,a^2, \quad \beta^2 = \sqrt{\frac{\partial^2 E_0}{\partial b^2}\frac{M_b}{\hbar^2}}\,b^2, \quad \gamma^2 = \sqrt{\frac{\partial^2 E_0}{\partial c^2}\frac{M_c}{\hbar^2}}\,c^2,$$

имеем:

$$H = -\frac{1}{2}\omega_\alpha\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \alpha^2\right) - \frac{1}{2}\omega_\beta\left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \beta^2\right) - \frac{1}{2}\omega_\gamma\left(\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} - \gamma^2\right) +$$

$$+ \omega_{\alpha\beta}\cdot\alpha\beta + \omega_{\alpha\gamma}\cdot\alpha\gamma + \omega_{\beta\gamma}\cdot\beta\gamma. \qquad (4)$$

где $\omega_{\alpha} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{M_a}\frac{\partial^2 E_0}{\partial a^2}}$, $\omega_{\beta} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{M_b}\frac{\partial^2 E_0}{\partial b^2}}$, $\omega_{\gamma} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{M_c}\frac{\partial^2 E_0}{\partial c^2}}$,

$$\omega_{a\beta} = \frac{\partial^2 E_0}{\partial a \partial b}\left[\frac{\partial E_0}{\partial a^2}\frac{\partial E_0}{\partial b^2}\frac{M_a M_b}{\hbar^4}\right]^{-1/4},$$

$$\omega_{a\gamma} = \frac{\partial^2 E_0}{\partial a \partial c}\left[\frac{\partial^2 E_0}{\partial a^2}\frac{\partial^2 E_0}{\partial c^2}\frac{M_a M_c}{\hbar^4}\right]^{-1/4}.$$

Перейдем в (4) к операторам фононов, полагая, как обычно, /4/:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a + \frac{\partial}{\partial a}\right) = b_1, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a - \frac{\partial}{\partial a}\right) = b_1^+, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\beta + \frac{\partial}{\partial \beta}\right) = b_2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\beta - \frac{\partial}{\partial \beta}\right) = b_2^+, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma + \frac{\partial}{\partial \gamma}\right) = b_3, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma - \frac{\partial}{\partial \gamma}\right) = b_3^+ .$$

Тогда

$$H = \omega_1 b_1^+ b_1 + \omega_2 b_2^+ b_2 + \omega_3 b_3^+ b_3 + \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) +$$
$$+ \frac{1}{2}\omega_{12}(b_1^+ + b_1)(b_2^+ + b_2) + \frac{1}{2}\omega_{13}(b_1^+ + b_1)(b_3^+ + b_3) + \tag{5}$$
$$+ \frac{1}{2}\omega_{23}(b_2^+ + b_2)(b_3^+ + b_3) .$$

Отсюда уже легко видеть, что в общем случае, когда полная энергия определяется n параметрами, вместо (5) получается:

$$H = \sum_i \omega_i (b_i^+ b_i + \frac{1}{2}) + \frac{1}{4} \sum_{i \neq j} \omega_{ij} \; (b_i^+ + b_i)(b_j^+ + b_j). \qquad (6)$$

Выражение (6) есть квадратичная форма, составленная из бозонных операторов b_i .

Такая форма может быть приведена к диагональному виду:

$$H = \sum_i \Lambda_i \; \beta_i^+ \beta_i + \mathrm{const} \qquad (7)$$

унитарным преобразованием:

$$b_k^r = \sum_{\rho\kappa} < r\, k \mid \rho\kappa > \; \beta_\kappa^\rho \quad , \qquad (8)$$

где
$$b_k^1 \equiv b_k \, , \;\; b_k^{-1} \equiv b_k^+ .$$

Из унитарности этого преобразования следует соотношение:

$$\sum_{\rho\kappa} < r_1 k_1 \mid \rho\kappa > \; \rho < - r_2 k_2 \mid -\rho\kappa > = r_1 \, \delta_{r_1 r_2} \;\; \delta_{k_2 k_2} \; .$$

Еще одно соотношение можно получить, сравнив равенство (8) с эрмитово сопряженным:

$$< - r k \mid -\rho\kappa > \; = < \rho\kappa \mid r k >^* .$$

Коммутируя H с операторами b_i и используя (8), получаем уравнения для матричных элементов $< r k \mid \rho\kappa >$:

$$(\omega_i - \rho r \Lambda_\kappa) < r i \mid \rho\kappa > + \frac{1}{2} \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} \omega_{ij} \; (< \bar{1} j \mid \rho\kappa > + < -1\, j \mid \rho\kappa >) = 0 .$$

После некоторых преобразований это уравнение сводится к следующему:

$$\frac{\omega_i^2 - \Lambda^2}{\omega_i} f_i \; + \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} \omega_{ij} \; f_j = 0, \qquad (9)$$

где

$$f_i = \langle 1i \,|\, \rho\kappa \rangle + \langle -1i \,|\, \rho\kappa \rangle .$$

Условие разрешимости системы линейных однородных уравнений (9) дает нам уравнение на собственные частоты:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\omega_1^2-\Lambda^2}{\omega_1} & \omega_{12} & \cdots\cdots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & \dfrac{\omega_2^2-\Lambda^2}{\omega_2} & \cdots\cdots & \omega_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \cdots\cdots & \dfrac{\omega_n^2-\Lambda^2}{\omega_n} \end{vmatrix} = 0 .$$

Например, при $n=2$, имеем:

$$\frac{\omega_1^2-\Lambda^2}{\omega_1}\cdot\frac{\omega_2^2-\Lambda^2}{\omega_2}-\omega_{12}^2 = 0$$

$$\Lambda^2 = \frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2+4\,\omega_1\,\omega_2\,\omega_{12}^2} . \qquad (10)$$

В качестве примера в работе вычислена частота колебаний, связанная с флюктуациями среднеквадратичного радиуса ядра ^{16}O . В этом случае $n=1$ и

$$\Lambda = \omega_1 = \sqrt{\frac{\hbar^2}{M}\,\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}} ,$$

где $x=\sqrt{\langle r^2\rangle}$, $\langle r^2\rangle$ – среднеквадратичный радиус, $M= mA$, m –масса нуклона.

Модель сферического гармонического осциллятора дает для $\langle r^2\rangle$ выражение:

$$\langle r^2\rangle = \frac{1}{A}\,\frac{\hbar}{m\omega}\sum_k \left(2n_k+\ell_k+\frac{3}{2}\right),$$

где $\hbar\omega$ – осцилляторная частота, суммирование производится по всем занятым состояниям.

Для вычисления полной энергии E бралась та же модель, но с остаточным взаимодействием (потенциал Хамада-Джонстона), при этом использовался аппарат матрицы реакции Бракнера-Бете-Голдстоуна. В первом приближении теории возмущений получается[5]:

$$E = \sum_k E_k + \sum_{m \geq k} \langle mk \mid G \mid mk \rangle ,$$

где G - матрица реакции, $|mk\rangle$ - нормализованная и антисимметризованная волновая функция двух частиц, k - квантовые числа n_k, ℓ_k, j_k одночастичного состояния в сферическом осцилляторе, $E_k = \frac{1}{2}\hbar\omega(2n_k + \ell_k + \frac{3}{2})$ - одночастичные энергии, суммирование проводится по всем занятым уровням. Матричные элементы $\langle mk|G|mk\rangle$ вычислялись точно так же, как в работе[6].

В таком приближении, когда в качестве одночастичных функций берутся осцилляторные функции, энергия зависит только от одного параметра $\hbar\omega$. Расчёты показали, что для ^{16}O $E(\hbar\omega)$ имеет минимум при $\hbar\omega$ =20,2 Мэв. В этой точке ω_1 =34,3 Мэв, что близко к результату (30,5 Мэв) работы[3], но, как и ожидалось, далеко от экспериментального значения энергии первого 0^+ уровня в ^{16}O, равной 6,06 Мэв.

Теперь следовало бы пересчитать полную энергию с более сложными одночастичными функциями (например, с собственными функциями потенциала Саксона-Вудса). Тогда можно было бы вычислить частоты колебаний, связанных как с изменением среднеквадратичного радиуса, так и с изменением наклона кривой радиального распределения плотности. Частота колебаний второго типа ω_2 может оказаться меньше частоты колебаний первого типа, так как она связана с движением нуклонов только в поверхностном слое ядра. Кроме того, за счёт отталкивания уровней, соответствующих разным типам колебаний (см. формулу (10)), нижайший уровень должен быть ниже ω_2 и, следовательно, в какой-то степени ближе к экспериментальному значению. К сожалению, мы не можем сейчас выполнить таких расчётов, и вопрос о природе нижайших 0^+ уровней в ^{16}O остается пока открытым.

В заключение авторы приносят искреннюю благодарность И.Н. Михайлову и З. Бохнацки за многочисленные и полезные дискуссии.

Литература

1. K.A.Brueckner, J.R.Buchler, S.Jorna, R.J.Lombard. Phys. Rev., 171, 1188, 1968.
2. J.W.Negele, The Structure of Finite Nuclei in the Local Density Approximation, preprint CLNS-82, 1970.
3. K.A.Brueckner, M.J.Giannoni, R.J.Lombard. Phys. Lett., 31B, 97,1970.
4. А.С. Давыдов. Квантовая механика, ФМЛ, 1963.
5. Дж. Голдстоун. Сборник "Вопросы квантовой теории многих тел", ИЛ, 1959.
6. T.T.S.Kuo, G.E.Brown. Nucl. Phys., 85, 40, 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 июля 1970 года.

можем сейчас выполнить таких расчётов, и вопрос о природе нижайших 0^+ уровней в ^{16}O остается пока открытым.

В заключение авторы приносят искреннюю благодарность И.Н. Михайлову и З. Бохнацки за многочисленные и полезные дискуссии.

Литература

1. K.A.Brueckner, J.R.Buchler, S.Jorna, R.J.Lombard. Phys. Rev., 171, 1188, 1968.
2. J.W.Negele, The Structure of Finite Nuclei in the Local Density Approximation, preprint CLNS-82, 1970.
3. K.A.Brueckner, M.J.Giannoni, R.J.Lombard. Phys. Lett., 31B, 97,1970.
4. А.С. Давыдов. Квантовая механика, ФМЛ, 1963.
5. Дж. Голдстоун. Сборник "Вопросы квантовой теории многих тел", ИЛ, 1959.
6. T.T.S.Kuo, G.E.Brown. Nucl. Phys., 85, 40, 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 июля 1970 года.