

5039

Экз. чит. зала

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.

P4-5039



А.В. Матвеевко, Л.И. Пономарев

МЕДЛЕННЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯ В СИСТЕМЕ
ТРЕХ ТЕЛ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ
ПО ЗАКОНУ КУЛОНА.

IV. МЕЗОАТОМНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ВОДОРОДЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1970

P4-5039

А.В. Матвеевко, Л.И. Пономарев

МЕДЛЕННЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯ В СИСТЕМЕ
ТРЕХ ТЕЛ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ
ПО ЗАКОНУ КУЛОНА.

IV. МЕЗОАТОМНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ВОДОРОДЕ

Направлено в ЖЭТФ

Научно-техническая
библиотека
ОИЯИ

В в е д е н и е

μ^- -мезоны, попадая в смесь изотопов водорода, тормозятся там и захватываются кулоновским полем ядер, образуя мезоатомы, которые затем довольно быстро переходят в основное состояние. В жидком водороде все эти процессы занимают $\approx 10^{-12}$ сек, что значительно меньше собственного времени жизни μ^- -мезонов ($\tau = 2,2 \cdot 10^{-6}$ сек). За это время при тепловых скоростях ($v_T \approx 2 \cdot 10^5$ см/сек) мезоатом водорода успевает испытать $\approx 10^8$ соударений с ядрами других атомов водорода.

При соударениях, помимо упругого рассеяния, происходят многочисленные мезоатомные процессы: перехват мезона ядрами более тяжелых изотопов, переходы между уровнями сверхтонкой структуры мезоатомов, образование мезомолекул, катализ ядерных реакций и т.д. /1,2/.

В данной работе вычислены сечения первых двух процессов, проведено сравнение полученных результатов с экспериментом /3-6/ и более ранними расчетами /1,7-9/. При вычислении использован метод возмущенных стационарных состояний (В.С.С.)^{x/}, изложенный детально в предыдущих работах авторов /10,11/.

^{x/} На наш взгляд, более правильно называть этот метод "методом молекулярных состояний", как это предложено, например, в /12/.

В методе возмущенных стационарных состояний все перечисленные задачи формулируются единым образом и сводятся к решению связанной системы уравнений Шредингера /11/. В двухуровневом приближении система приобретает вид:

$$\left(\frac{d^2}{dR^2} + k_1^2 - \frac{L(L+1)}{R^2}\right) \chi_1 = K_{11} \chi_1 + K_{12} \chi_2 + 2Q_{12} \frac{d\chi_2}{dR}, \quad (1)$$

$$\left(\frac{d^2}{dR^2} + k_2^2 - \frac{L(L+1)}{R^2}\right) \chi_2 = K_{21} \chi_1 + K_{22} \chi_2 + 2Q_{21} \frac{d\chi_1}{dR}.$$

Здесь: k_1 и k_2 - импульсы во входном и выходном каналах реакции (в дальнейшем всегда $k_1 \leq k_2$), а $K_{ij} = K_{ij}(R) - K_{ij}(\infty)$ и $Q_{ij} = Q_{ij}(R)$ - некоторые эффективные потенциалы, конкретный вид которых определяется особенностями задачи. При каждом заданном значении L орбитального момента система уравнений Шредингера (1) эквивалентна системе нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для элементов $t_{ij}^L(R)$ матрицы реакции $T^L(R)$ /14,15/.

$$\frac{d}{dR} t_{ij}^L(R) = -a_{i\alpha} (K_{\alpha\beta} \tilde{\beta}_j + 2Q_{\alpha\beta} \tilde{\beta}'_j), \quad (2)$$

$$t_{ij}^L(0) = 0, \quad \alpha, \beta, i, j = 1; 2,$$

где

$$\begin{aligned} a_{i\alpha} &= \delta_{i\alpha} u_\alpha + t_{i\alpha}^L(R) v_\alpha, \\ \tilde{\beta}_j &= \delta_{\beta j} u_\beta + t_{\beta j}^L(R) v_\beta, \\ \tilde{\beta}'_j &= \delta_{\beta j} u'_\beta + t_{\beta j}^L(R) v'_\beta. \end{aligned} \quad (3)$$

Функции u_α и v_α выражаются через сферические функции Бесселя

$$u_\alpha = \sqrt{\frac{\pi R}{2}} j_L(k_\alpha R), \quad v_\alpha = -\sqrt{\frac{\pi R}{2}} n_L(k_\alpha R) \quad (3a)$$

и при $R \rightarrow \infty$ имеют асимптотику

$$u_\alpha = \frac{1}{\sqrt{k_\alpha}} \sin(k_\alpha R - \frac{\pi L}{2}); \quad v_\alpha = \frac{1}{\sqrt{k_\alpha}} \cos(k_\alpha R - \frac{\pi L}{2}). \quad (3b)$$

Матрица T^L определяется условием $t_{ij}^L = t_{ij}^L(\infty)$. Практически система уравнений (2) интегрируется до значений $R = R_0$, а вклад Δt_{ij}^L от области $R_0 \leq R < \infty$ оценивается аналитически /11,14/

$$t_{ij}^L = t_{ij}^L(R_0) + \Delta t_{ij}^L. \quad (4)$$

Кроме того, поскольку матричные элементы $K_{ij}(R)$ при $R \rightarrow 0$ сингулярны, необходимо задать асимптотику

$$t_{ij}^L(R) = c_{ij}^L (k_i k_j)^{L+1/2} R^{2L+1}, \quad (5)$$

где коэффициенты $c_{ij} = \text{const}$ и определяются видом $K_{ij}(R)$ из уравнений (2). Парциальные сечения упругих и неупругих процессов вычисляются по формуле /16/

$$\sigma_{ij}^L = \frac{\pi}{k_i^2} (2L+1) |\delta_{ij} - S_{ij}^L|^2, \quad (6)$$

где матрица рассеяния

$$S^L = \frac{1 + iT^L}{1 - iT^L}. \quad (7)$$

С учетом формул (6) и (7) общее выражение для сечений σ_{ij} через элементы t_{ij} матрицы реакции можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{ij} = \frac{4\pi}{k_1^2} \frac{\delta_{ij} D^2 + t_{ij}^2}{(D-1)^2 + (t_{11} + t_{22})^2}, \quad (8)$$

где

$$D = t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}.$$

При малых энергиях столкновений E можно ввести параметры низкоэнергетического рассеяния a_{ij}

$$t_{ij} = -a_{ij} \sqrt{k_i k_j}, \quad (9)$$

которые аналогичны длинам рассеяния a_g и a_u в одноканальном случае /16/.

Если $k_1 \rightarrow 0$, то $D \approx k_1$, $k_2 \rightarrow k_0 = \sqrt{2M\Delta E}$, и формула (8) упрощается

$$\sigma_{ij} = 4\pi \frac{k_j}{k_1} \cdot \frac{a_{ij}^2}{1 + k_0^2 a_{22}^2}. \quad (10)$$

Матричные элементы K_{ij} и Q_{ij} для всех типов решаемых далее задач выражаются через симметричный $W_g(R)$ и антисимметричный $W_u(R)$ термы задачи двух центров, а также через матричные элементы

$$K_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}^{(+)} + \kappa K_{\alpha\beta}^{(-)} + \kappa^2 K_{\alpha\beta}^*, \quad (11)$$

$$Q_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta}^{(+)} + \kappa Q_{\alpha\beta}^{(-)},$$

$$\kappa = \frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1}, \quad M_2 \geq M_1 \quad (\alpha, \beta) \equiv (g, u)$$

которые вычислены в работах /17,18/.

На рис. 1 и 2 приведены графики этих функций в единицах задачи $h = e = m = 1$ (M_μ - масса μ -мезона)

$$m = M_\mu \frac{M_1 + M_2}{M_1 + M_2 + M_\mu} \quad (12)$$

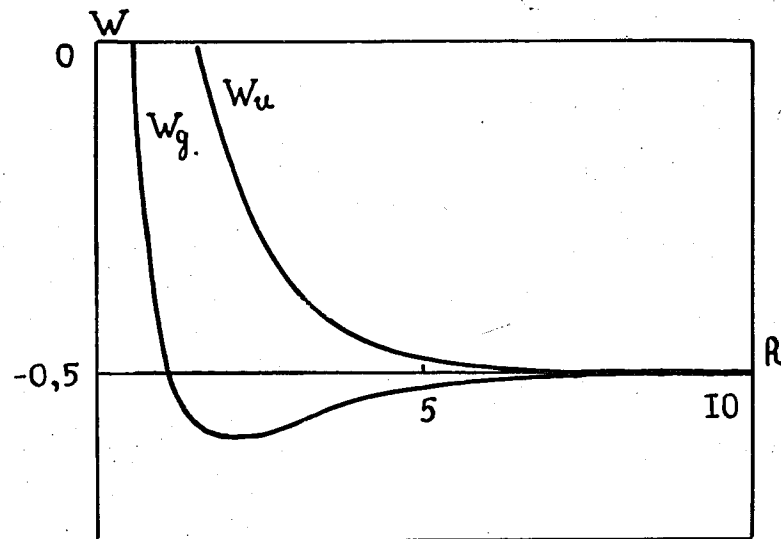


Рис.1. Симметричный $W_g(R)$ и антисимметричный $W_u(R)$ термы системы из двух ядер и μ^- -мезона.

Соответствующие формулы перехода имеют вид:

$$K(R) = A \tilde{K} A^{-1}, \quad (13)$$

где

$$\tilde{K}_{11} = 2MW_g(R) + K_{gg}(R) = 2MW_g^{\tilde{}} ,$$

$$\tilde{K}_{12} = K_{gu}(R),$$

$$\tilde{K}_{21} = K_{ug}(R),$$

$$\tilde{K}_{22} = 2MW_u(R) + K_{uu}(R) = 2MW_u^{\tilde{}} , \quad (14)$$

$$M = \frac{M_0}{m}; \quad \frac{1}{M_0} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} .$$

Матрица A осуществляет переход от набора молекулярных функций χ_g (симметричная) и χ_u (антисимметричная) к набору χ_1 и χ_2

$$\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \chi_g \\ \chi_u \end{pmatrix} \quad (15)$$

конкретный вид которого определяется особенностями задачи.

Процессы изотопного обмена

В смеси изотопов водорода идут процессы изотопного обмена

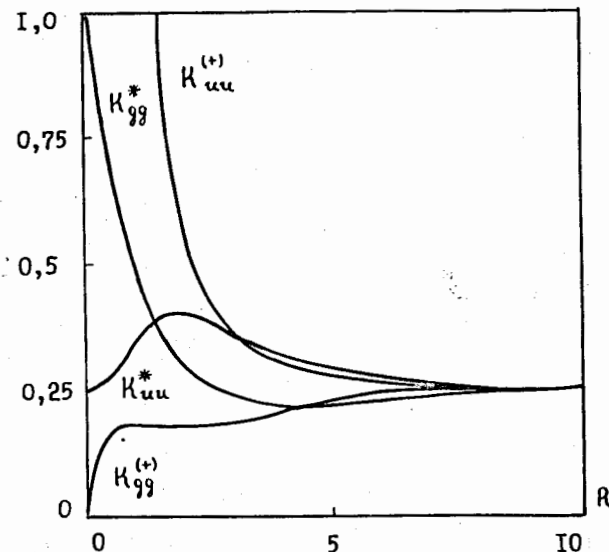


Рис. 2а. Диагональные матричные элементы ядерного движения по волновым функциям задачи двух центров. При $R \rightarrow \infty$ $K_{gg}^{(+)} = K_{uu}^{(-)} = K_{gg}^* = K_{uu}^* = -\frac{1}{2}W_g = -\frac{1}{2}W_u = \frac{1}{4}$.

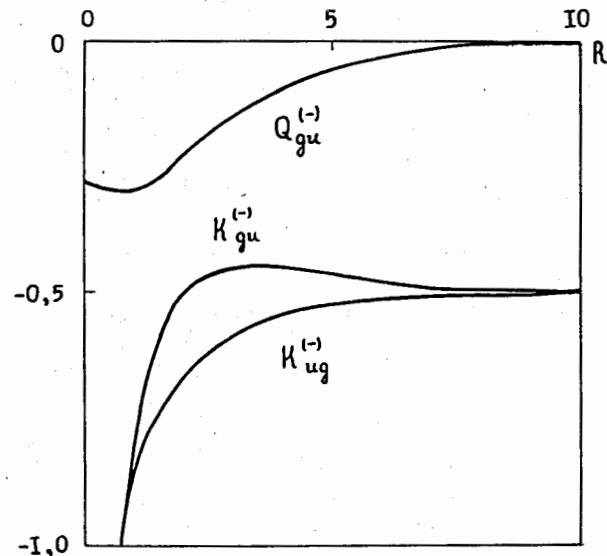


Рис. 2б. Недиагональные матричные элементы. При $R \rightarrow \infty$ $K_{gu}^{(-)} = K_{ug}^{(-)} = W_g = W_u = -\frac{1}{2}$.

схематически представленные на рис. 3. Энергия столкновения E отсчитывается от уровня E_1 более легкого мезоатома, $E' = E + \Delta E$ и в соответствии с этим $x/$

$$k_1^2 = 2ME', \quad k_2^2 = 2ME' = k_1^2 + k_0^2$$

$$k_0 = \sqrt{2M\Delta E} \quad (17)$$

(например, в смеси изотопов (16а) уровень E_1 соответствует системе $p\mu^- + d$, а уровень E_2 - системе $p + d\mu^-$). Каждое из сечений σ_{ij} описывает переход $E_1 \rightarrow E_j$, например, сечение σ_{12} для процесса (16а) соответствует реакции перехвата



При таком подходе мы оставляем в стороне изучение подпороговых эффектов и все задачи, связанные с влиянием закрытого канала (σ_{11}) на открытый (σ_{22}), например, при упругом рассеянии $d\mu^-$ мезоатомов на протонах с энергией $E' < \Delta E$.

Для процессов изотопного обмена (16) матрица перехода A имеет вид:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$x/$ В двухуровневом приближении изотопическая разность уровней $\Delta E = \frac{\kappa}{2} \cdot \frac{m}{M}$, в то время как точное значение $\Delta E_0 = \frac{\kappa}{2} \cdot \frac{M_1 + M_2}{(M_1 + 1)(M_2 + 1)}$ (все - в мезоатомных единицах $\hbar = c = M_\mu = 1$). Однако, поскольку $\Delta E - \Delta E_0 \approx \frac{\kappa}{2} \left(\frac{1}{M_1^2} + \frac{1}{M_2^2} \right)$, то указанной погрешностью можно пренебречь при той точности вычислений, которая принята в работе. Численно для систем (13):

$$\Delta E = 147 \text{ эв}, 200 \text{ эв}, 50,4 \text{ эв};$$

$$\Delta E_0 = 135 \text{ эв}, 183 \text{ эв}, 48,1 \text{ эв}.$$

Она выбрана таким образом, что при $R \rightarrow \infty$ система уравнений (1) распадается на два независимых уравнения, причем функция X_1 описывает систему $p\mu^- + d$ (или $p\mu^- + t$, $d\mu^- + t$), а функция X_2 - систему $p + d\mu^-$ (или $p + t\mu^-$, $d + t\mu^-$).

Окончательно для процессов (16) выражения $K_{ij}(R)$ примут вид

$$K_{11}(R) = M(\tilde{W}_g + \tilde{W}_u) - \frac{1}{2}(K_{gu} + K_{ug}),$$

$$K_{12}(R) = M(\tilde{W}_g - \tilde{W}_u) + \frac{1}{2}(K_{gu} - K_{ug}),$$

$$K_{21}(R) = M(\tilde{W}_g - \tilde{W}_u) - \frac{1}{2}(K_{gu} - K_{ug}), \quad (19)$$

$$K_{22}(R) = M(\tilde{W}_g + \tilde{W}_u) + \frac{1}{2}(K_{gu} + K_{ug}).$$

Коэффициенты c_{ij}^L для процессов изотопного обмена (16) равны:

$$c_{11}^L = c_{22}^L = -c_{12}^L = -c_{21}^L,$$

$$c_{11}^L = -\frac{2L+1}{[(2L+1)!!]^2} \cdot \frac{(2L+1)^2 + 4 - (2L+1)\sqrt{(2L+1)^2 + 8}}{8} \quad (20)$$

Результаты численных расчетов для процессов (16а-16в) при энергиях столкновений $10^{-3} - 100$ эв приведены в таблицах 1-3. (Сечения даны в единицах 10^{-20} см^2). Отметим некоторые особенности полученных результатов.

Из формулы (10) легко видеть, что при медленных столкновениях ($k_1 \rightarrow 0$) $k_2 \approx k_0 = \text{const}$, поэтому

$$\sigma_{11} \approx \text{const}, \quad \sigma_{22} \approx \text{const},$$

$$\sigma_{12} \sim \frac{1}{k_1}, \quad \sigma_{21} \sim k_1. \quad (21)$$

Таблица 1
Сечения σ_{ij} и константа λ для системы $p\mu^- + d$

Е эВ	L_{\max}	σ_{11}	σ_{12}	σ_{21}	$\lambda, 10^{-13} \text{ см}^3 \text{ сек}^{-1}$
10^{-3}	0	6,7	$7,3 \cdot 10^{+2}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$	3,9
10^{-2}	0	7,0	$2,3 \cdot 10^2$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	3,9
0,1	1	7,9	71	$4,8 \cdot 10^{-2}$	3,8
1,0	2	9,7	21	0,14	3,6
10	3	10	8,5	0,54	4,6
100	6	6,7	5,4	2,2	9,1

$$M=6,14; \quad \frac{M}{m} = 1,04;$$

$$k_0 = 0,577;$$

$$k_1 = 4,76 \cdot 10^{-2} \sqrt{E \text{ эВ}}; \quad \sigma_{22} \approx 1,8 \cdot 10^{-19} \text{ см}^2$$

Сечения даны в единицах 10^{-20} см^2

Таблица 2
Сечения σ_{ij} и константа λ для системы $p\mu^- + t$

Е эВ	L_{\max}	σ_{11}	σ_{12}	σ_{21}	$\lambda, 10^{-13} \text{ см}^3 \text{ сек}^{-1}$
10^{-3}	0	3,3	$3,5 \cdot 10^2$	$1,7 \cdot 10^{-3}$	1,8
10^{-2}	0	3,6	$1,1 \cdot 10^2$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	1,7
0,1	1	4,6	34	$1,7 \cdot 10^{-2}$	1,7
1,0	2	7,1	11	$5,6 \cdot 10^{-2}$	1,8
10	3	9,9	5,9	0,28	3,0
100	6	7,0	3,6	1,2	5,8

$$M = 6,85;$$

$$\frac{M}{m} = 1,03;$$

$$k_0 = 0,706;$$

$$k_1 = 5,00 \cdot 10^{-2} \sqrt{E \text{ эВ}};$$

$$\sigma_{22} = 2,0 \cdot 10^{-19} \text{ см}^2.$$

Сечения даны в единицах 10^{-20} см^2 .

Таблица 3
Сечения σ_{ij} и константа λ для системы $d\mu^{-+t}$

Е эВ	L_{\max}	σ_{11}	σ_{12}	σ_{21}	σ_{22}	$\lambda, 10^{-13} \text{ см}^3 \text{ сек}^{-1}$
10^{-3}	0	2,6	4,1	$8,1 \cdot 10^{-5}$	I8	$1,6 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	I	3,2	1,4	$2,9 \cdot 10^{-4}$	I8	$1,8 \cdot 10^{-2}$
0,1	I	5,3	0,85	$1,7 \cdot 10^{-3}$	I8	$3,4 \cdot 10^{-2}$
1,0	2	II	1,6	$3,2 \cdot 10^{-2}$	I8	0,2I
10	4	I7	6,5	1,1	I7	2,6
100	6	I2	7,0	4,7	I3	8,9

$M=10,9;$

$\frac{M}{m}=1,02;$

$k_0=0,446;$

$$k_1 = 6,29 \cdot 10^{-2} \sqrt{E} \text{ эв.}$$

Сечения даны в единицах 10^{-20} см^2 .

Это позволяет ввести константу перехвата λ по формуле

$$\lambda = \sigma_{12} v_1 \quad (22)$$

или же

$$\Lambda = \lambda n_0, \quad (23)$$

где $n_0 = 4,25 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ — плотность жидкого водорода, а v_1 — начальная скорость столкновения.

При $k_1 \rightarrow 0$

$$\sigma_{12} \approx 4\pi \frac{k_0}{k_1} \frac{a_{12}^2}{1 + k_0^2 a_{22}^2}, \quad (24)$$

$$\lambda \approx 4\pi \frac{k_0}{M} \frac{a_{12}^2}{1 + k_0^2 a_{22}^2}. \quad (24a)$$

Из формул (21) следует также характер порогового поведения сечений $\sigma_{21} \sim k_1$. Во втором столбце таблиц указано число парциальных волн, дающих вклад в сечения σ_{11} , σ_{12} и σ_{21} . Из них следует, что область чистого s-рассеяния для процессов (16) простирается вплоть до энергии столкновения $E \approx 10^{-2}$ эв. В этой области для сечений σ_{ij} справедливы формулы (10) и (24) с параметрами a_{ij} , которые приведены под таблицами 1-3 в мезоатомных единицах $a_\mu = \frac{h^2}{M_\mu e^2} = 2,56 \cdot 10^{-11} \text{ см}$.

Область энергий столкновения, при которых выполняется условие $a_{ij} \approx \text{const}$, еще уже, чем область чистого s-рассеяния и ограничена условием $E \leq 10^{-3}$ эв. Условие $\lambda \approx \text{const}$, которое обычно используют

при анализе экспериментов (16а) и (16б) по рассеянию мезоатомов, выполняется вплоть до энергий столкновения $E \approx 1$ эв, несмотря на то, что приближение s -волны в этом случае нарушено (см. таблицы 1 и 2). Из таблицы 3 видно также, что для реакции (16в) λ аномально мало и вклад P -волны приходится учитывать уже при $E \approx 10^{-2}$ эв. Следует ожидать, что в этом случае двухуровневое приближение дает менее надежный результат, чем в случае реакций (16а) и (16б).

Число парциальных волн, дающих вклад в сечение σ_{22} , при энергии столкновения $E < 100$ эв примерно постоянно и для процессов (16а-16в) соответственно равно 5, 6 и 7.

В таблице 4 результаты наших расчетов для константы перехвата λ сравниваются с результатами прежних расчетов и с экспериментальными данными.

Переходы между уровнями сверхтонкой структуры

Для мезоатомов водорода сверхтонкое расщепление ΔE основного состояния значительно превышает среднюю энергию тепловых соударений ($E \approx 0,02$ эв):

$$\Delta E = \begin{cases} 0,183 \text{ эв для } p\mu^- \\ 0,049 \text{ эв для } d\mu^- \\ 0,241 \text{ эв для } t\mu^- \end{cases} \quad (25)$$

Это приводит к усложнению картины процессов рассеяния в системах $p\mu^- + p$, $d\mu^- + d$ и $t\mu^- + t$ и к необходимости учитывать влияние спина при их описании. Система возникающих при этом уравнений совпадает с системой (1) и найдена в работах Герштейна^{/8/}. Поскольку ΔE достаточно мало, то при $E < 1$ эв в уравнениях (1) можно ограничить-

Таблица 4

Константа перехвата для процесса изотопного обмена

$\lambda, 10^{-13} \text{ см}^2 \text{ сек}^{-1}$

Реакция	Источник	Джеппов и др./5/	Bleser et al /3/	Cohen et al /9/	Зельдович Герштейн/1/	Данная работа
$p\mu^- + d \rightarrow p + d\mu^-$		2,8±0,9	3,4±0,3	3,5	3,4	3,9
$p\mu^- + t \rightarrow p + t\mu^-$		-	-	-	1,5	1,7
$d\mu^- + t \rightarrow d + t\mu^-$		-	-	-	1,2·10 ⁻²	1,8·10 ⁻²

ся s -волной ($L=0$). При $E > 1$ эв это приближение неоправдано и необходимо учитывать парциальные сечения σ_{ll}^L с $L \neq 0$. Однако при этих энергиях столкновений влиянием спина на процессы рассеяния уже можно пренебречь и задача упрощается. В предыдущей работе авторов /11/, она решена.

Учет спинового взаимодействия мезона с ядрами приводит к перепутыванию уравнений для волновых функций χ_s и χ_u . Кроме того, ввиду тождественности ядер необходимо учитывать статистику рассеивающихся частиц. В приближении чистого s -рассеяния система из двух ядер со спинами J_1 и J_2 и мезона со спином $S=1/2$ характеризуется значением полного момента $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \vec{S}$. Если пренебречь спиновым взаимодействием ядер, то уровни классифицируются также по значению F полного момента системы мезон + ядро: $F = J_1 \pm 1/2$.

В дальнейшем особый интерес представляют переходы между уровнями сверхтонкой структуры мезоатомов, т.е. переходы

$$F_1 = J_1 + 1/2 \rightarrow F_2 = J_1 - 1/2.$$

Схема уровней на рис. 3 остается справедливой и в этом случае, но

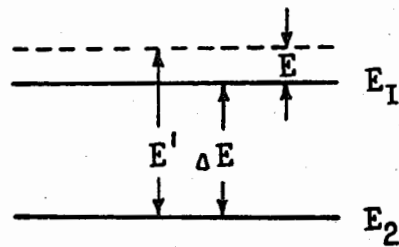


Рис. 3. Схема уровней системы трех тел при $R \rightarrow \infty$: $E_1 = K_{11}(\infty)$ и $E_2 = K_{22}(\infty)$. Отсчет энергии столкновения E - от верхнего уровня системы E_1 .

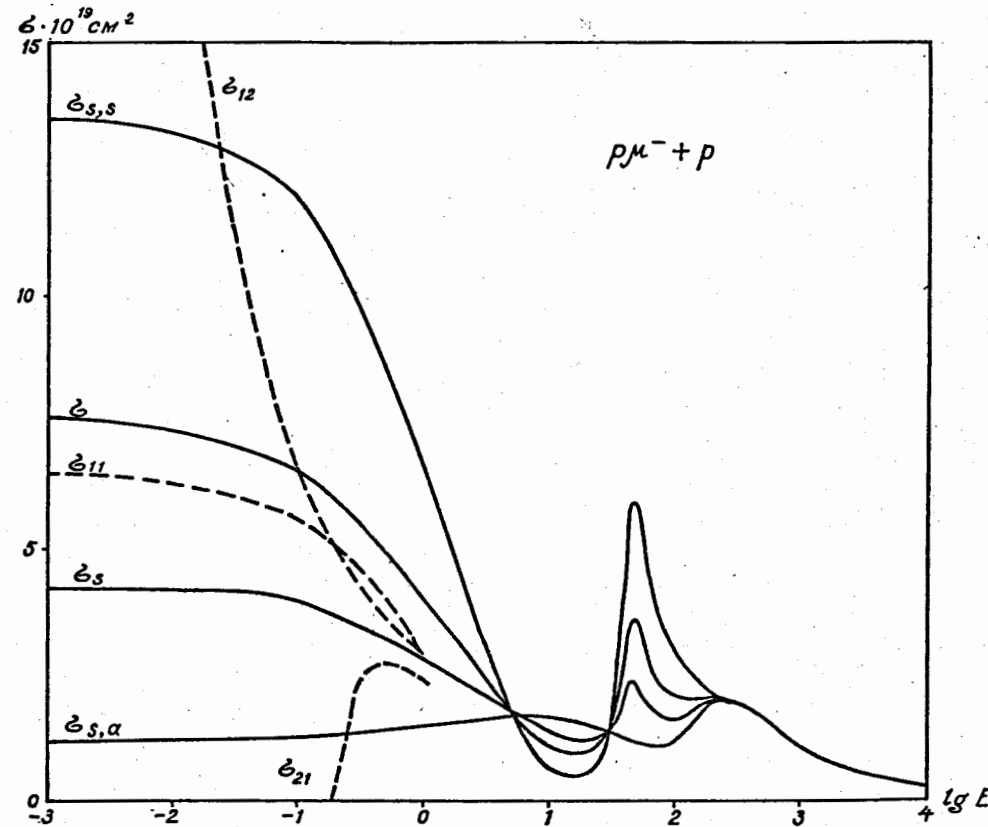


Рис. 4. Зависимость от энергии сечений различных процессов в системе $p\mu^- + p$. При $E < 1$ эв необходимо учитывать сверхтонкую структуру $p\mu^-$ -мезоатома и реальный смысл имеют только сечения σ_{ll} . При $1 < E < 150$ эв сверхтонким расщеплением можно пренебречь, но еще необходимо учитывать статистику частиц: $\sigma_{s,s}$ - сечение рассеяния в синглетном состоянии протонов, $\sigma_{s,\alpha}$ - в триплетном, σ_s - статистическая смесь обоих состояний. При $E > 150$ эв все эти сечения совпадают с σ -сечением рассеяния без учета спинов частиц.

теперь уровень E_1 соответствует верхнему состоянию сверхтонкой структуры с моментом F_1 , а уровень E_2 - нижнему состоянию с моментом F_2 .

Как и в случае реакций изотопного обмена, для вычисления сечений $\sigma_J(F_1 \rightarrow F_2)$ при заданном значении полного момента J необходимо найти матрицу A перехода от молекулярных функций χ_g и χ_u с определенными значениями спина двух ядер к атомным функциям X_1 и X_2 с заданным значением F спина системы мезон + ядро. После этого эффективные потенциалы задачи K_{ij} просто вычисляются по формуле (13).

При известной величине (25) сверхтонкого расщепления и заданных значениях масс $M = 10+30$ импульс k_0 очень мал ($\approx 10^{-2}$). Поэтому формулы (10) и (24а) упрощаются^{x/}:

$$\sigma_{ij} \approx 4\pi a_{ij}^2 \frac{k_j}{k_i}, \quad (26)$$

$$\lambda(J) \approx 4\pi a_{12}^2 \frac{k_0}{M}, \quad (26a)$$

где $\lambda(J)$ - константа перехвата в состоянии с полным моментом J .

Численные расчеты показывают, что при энергии столкновений $E \leq 10^{-2}$ эв (для системы $t\mu^- + t$ при $E \leq 10^{-3}$ эв) $a_{ij} \approx \text{const}$, причем матрица коэффициентов $a = \{a_{ij}\}$ связана с диагональной матрицей \tilde{a} соотношением, аналогичным (13):

^{x/} Все предыдущие формулы записаны в единицах задачи $e = h = m = 1$. В дальнейшем удобно использовать параметры a_{ij} в мезоатомной системе единиц $e = h = M\mu = 1$. В этом случае для получения размерных величин формулы (10), (24) и (26) необходимо домножить соответственно на $a_{\mu}^2 = 6,55 \cdot 10^{-22}$ см², а формулы (24а) и (26а) на $a_{\mu}^2 = 1,43 \cdot 10^{-13}$ см³ сек⁻¹ ($a = \frac{1}{137}$, $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек).

$$a = A \tilde{a} A^{-1} \quad \tilde{a} = \begin{pmatrix} a_g & 0 \\ 0 & a_u \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Здесь a_g и a_u - длины рассеяния соответственно в четном и нечетном каналах без учета сверхтонкой структуры, вычисленные в предыдущей работе^{/9/}.

Реакция $P\mu^- + P$

Для этой системы

$$J_1 = J_2 = 1/2; \quad M = 4,69; \quad \frac{M\mu}{m} = 1,06,$$

$$k_0 = 1,80 \cdot 10^{-2} \quad k_1 = 4,20 \cdot 10^{-2} \sqrt{E}. \quad (28a)$$

Матрица перехода A равна:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad (29a)$$

а матричные элементы K_{ij} в уравнениях (1), описывающих этот процесс, примут вид:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{M}{2} (3\tilde{W}_g + \tilde{W}_u), \\ K_{12} = K_{21} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} M (\tilde{W}_g - \tilde{W}_u), \\ K_{22} &= \frac{M}{2} (\tilde{W}_g + 3\tilde{W}_u). \end{aligned} \quad (30a)$$

При $R \rightarrow \infty$ функция χ_1 представляет систему протон + налетающий мезоатом $p\mu^-$ в верхнем состоянии E_1 сверхтонкой структуры с моментом $F_1=1$, а функция χ_2 - ту же систему в нижнем состоянии E_2 с моментом $F_2=0$. (При этом перехват $F_1 \rightarrow F_2$ возможен только в состоянии с полным моментом $J=1/2$, поскольку состояние $J=3/2$ не содержит уровня с моментом $F_2=0$).

Значения коэффициентов c_{ij} в формуле (5) начальных условий интегрирования соответственно равны:

$$c_{11} = -\frac{1}{8}; \quad c_{12} = c_{21} = -\frac{\sqrt{3}}{8}; \quad c_{22} = -\frac{3}{8}. \quad (31a)$$

Результаты вычислений для системы $p\mu^- + p$ приведены в таблице 5. Обращает на себя внимание резкая зависимость сечения σ_{22} от энергии столкновения.

Реакция $d\mu^- + d$

Для этой системы

$$J_1 = J_2 = 1; \quad M = 9,12; \quad \frac{M_\mu}{m} = 1,03;$$

$$k_0 = 1,3 \cdot 10^{-2}; \quad k_1 = 5,77 \cdot 10^{-2} \sqrt{E}. \quad (286)$$

Функция χ_1 соответствует системе дейтрон + налетающий мезоатом $d\mu^-$ в состоянии с моментом $F_1=3/2$, а функция χ_2 - системе в состоянии с моментом $F=1/2$. При s-рассеянии полный момент J системы трех частиц сохраняется, и переходы $F_1 \rightarrow F_2$ возможны лишь в том случае, если оба уровня F_1 и F_2 принадлежат

Таблица 5
Сечения σ_{ij} и параметры a_{ij} для системы $p\mu^- + p$

E эв	σ_{11}	σ_{12}	σ_{21}	σ_{22}	a_{11}	$a_{12} = a_{21}$	a_{22}
10^{-3}	6,5	58	0,32	$2,0 \cdot 10^{-3}$	-8,9	7,2	-0,14
10^{-2}	6,3	18,6	0,97	$4,6 \cdot 10^{-3}$	-8,8	7,2	-0,13
0,1	5,6	6,7	2,4	$3,1 \cdot 10^{-2}$	-8,3	7,1	$5 \cdot 10^{-3}$
0,5	4,0	3,7	2,7	0,14	-7,3	6,6	0,44

Сечения приведены в единицах 10^{-19} см^2 .

мультиплету с определенным значением J . Для системы $d\mu^- + d$ возможны два случая: $J=3/2$ и $J=1/2$, которые следует рассматривать отдельно.

При $J=3/2$ матрица перехода:

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & 1 \end{pmatrix}. \quad (29б)$$

Матричные элементы:

$$K_{11}(R) = \frac{M}{3} (\tilde{W}_g + 5\tilde{W}_u),$$

$$K_{12}(R) = K_{21}(R) = -\frac{\sqrt{5}}{3} M (\tilde{W}_g - \tilde{W}_u),$$

$$K_{22}(R) = \frac{M}{3} (5\tilde{W}_g + \tilde{W}_u). \quad (30б)$$

Коэффициенты начальных условий

$$c_{11} = -\frac{5}{12}; c_{12} = c_{21} = -\frac{\sqrt{5}}{12}; c_{22} = -\frac{1}{12}. \quad (31б)$$

Результаты расчетов приведены в таблице 6.

Отметим, что сечение перехвата σ_{12} по сравнению с аналогичным сечением для процесса (16а) аномально мало. Это объясняется одинаковым знаком длин рассеяния a_g и a_u , которые через параметр a_{12} определяют величину сечения перехвата.

При значении $J=1/2$

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (29в)$$

Таблица 6
Сечения σ_{ij} и параметры a_{ij} для системы $d\mu^- + d$ в состоянии с моментом $J = 3/2$

E эВ	σ_{11}	σ_{12}	σ_{21}	σ_{22}	$\lambda, 10^{-15}$ см сек.	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}
10^{-3}	1,1	0,43	$8,6 \cdot 10^{-3}$	2,5	1,9	3,6	0,86	5,5	5,5
10^{-2}	1,2	0,15	$2,5 \cdot 10^{-2}$	2,5	2,0	3,7	0,86	5,6	5,6
0,1	1,4	$7,2 \cdot 10^{-2}$	$4,8 \cdot 10^{-2}$	2,7	3,2	4,1	0,86	5,8	5,8
0,5	1,7	$5,3 \cdot 10^{-2}$	$4,9 \cdot 10^{-2}$	2,9	5,2	4,7	0,83	6,2	6,2

Сечения приведены в единицах 10^{-19} см^2

$$K_{11}(R) = \frac{2}{3} M(2\bar{W}_g + \bar{W}_u),$$

$$K_{12}(R) = K_{21}(R) = -\frac{2\sqrt{2}}{3} M(\bar{W}_g - \bar{W}_u), \quad (30B)$$

$$K_{22}(R) = \frac{2}{3} M(\bar{W}_g + 2\bar{W}_u).$$

Коэффициенты c_{ij} :

$$c_{11} = -\frac{1}{6}; \quad c_{12} = c_{21} = -\frac{\sqrt{2}}{6}; \quad c_{22} = -\frac{1}{3}. \quad (31B)$$

Результаты вычислений приведены в таблице 7.

Реакция $t\mu^- + t$

Эта система во многом аналогична системе $p\mu^- + p$ и формально отличается от нее лишь значениями

$$M = 13,5; \quad \frac{M_\mu}{m} = 1,02;$$

$$k_0 = 3,44 \cdot 10^{-2}; \quad k_1 = 7,00 \cdot 10^{-2} \sqrt{E}. \quad (28r)$$

Однако фактически оказалось, что при этом значении M условия $a_{ij} \approx \text{const}$ справедливы лишь до энергий столкновения $E \leq 10^{-3}$ эв. Результаты численных расчетов для этого процесса приведены в таблице 8.

Таблица 7

Сечения σ_{ij} и параметры a_{ij} для системы $d\mu^- + d$ в состоянии с моментом $J = 1/2$

E эв	σ_{11}	σ_{12}	σ_{21}	σ_{22}	$\lambda, 10^{-15}$ $\text{см}^3 \text{сек}^{-1}$	a_{11}	$a_{12} = a_{21}$	a_{22}
10^{-3}	1,9	0,71	$1,4 \cdot 10^{-2}$	1,3	3,1	4,8	-1,1	4,0
10^{-2}	2,0	0,24	$4,1 \cdot 10^{-2}$	1,3	3,4	4,9	-1,1	4,0
0,1	2,3	0,12	$7,8 \cdot 10^{-2}$	1,5	5,1	5,2	-1,1	4,3
0,5	2,6	$9,0 \cdot 10^{-2}$	$8,2 \cdot 10^{-2}$	1,9	8,8	5,8	-1,1	4,9

Сечения приведены в единицах 10^{-19}см^2

Таблица 8

Сечения σ_{ij} и параметры a_{ij} для системы $t\mu^- + t$

E эв	σ_{11}	σ_{12}	σ_{21}	σ_{22}	a_{11}	$a_{12} = a_{21}$	a_{22}
10^{-3}	13	$1,7 \cdot 10^2$	0,7	2,9	-4,0	3,6	1,9
10^{-2}	11	53	2,1	3,0	-3,7	3,6	1,9
0,1	5,7	17	5,1	3,8	-2,5	3,5	2,0
0,5	0,90	8,3	5,6	6,5	-0,87	3,0	2,9

Сечения приведены в единицах 10^{-20}см^2

Обсуждение результатов

Результаты расчетов показывают, что вплоть до энергий столкновения $E \approx 1$ эв при вычислении сечений перехода между уровнями сверхтонкой структуры мезоатомов водорода можно ограничиться чистым

s-рассеянием. При этом существуют простые формулы (26), позволяющие выразить сечения через параметры низкоэнергетического рассеяния, вычисленные в данной работе. При малых энергиях столкновения, когда выполняется условие $a_{ij} \approx \text{const}$, параметры a_{ij} просто выражаются по формулам (27) через длины рассеяния a_g и a_u , вычисленные в предыдущей работе авторов /9/. Конкретный вид этих формул совпадает с выражениями (30) после замен $2M\tilde{W}_g \rightarrow a_g, 2M\tilde{W}_u \rightarrow a_u$.

Подстановка этих выражений в соотношение (26) приводит к формулам Герштейна /6/ для сечений σ_{ij} . Область применимости этих формул определяется условием $a_{ij} \approx \text{const}$ и различна для разных сечений и процессов.

Для всех процессов симметричной перезарядки с учетом сверхтонкого расщепления в области энергий столкновения $E < 0,5$ эв хорошо выполняется условие $a_{12} = \text{const}$. Условие $a_{11} = \text{const}$ выполнено для процессов $p\mu^- + p$ и $d\mu^- + d$ вплоть до энергий столкновения $E \approx 10^{-2}$ эв, а для процесса $t\mu^- + t$ — до $E \approx 10^{-3}$ эв. Параметр a_{22} имеет реальный смысл только для процесса $d\mu^- + d$, для которого сверхтонкое расщепление ΔE достаточно мало. Для процессов $p\mu^- + p$ и $t\mu^- + t$ значение a_{22} , найденное по формуле (9), следует рассматривать лишь как формальный параметр, не имеющий особого физического смысла. Однако его использование удобно, поскольку в области энергий столкновения $E \leq 0,5$ эв $a_{22} \approx \text{const}$ (кроме процесса $p\mu^- + p$, см. таблицу 5).

Вне указанной области энергий следует пользоваться общей формулой (8) для сечений σ_{ij} . Для процессов $p\mu^- + p$ и особенно $d\mu^- + d$ область применимости таблицы 9 можно расширить, если воспользоваться разложением (33) для диагональных параметров a_{ii} :

$$k_1 t_{ii}^{-1} = -\frac{1}{a_{ii}} + \frac{3\pi M}{2a_{ii}^2} + \frac{3M}{a_{ii}} k_1^2 \ell_n \frac{9Mk_1^2}{32}. \quad (33)$$

Из этого разложения можно вычислить матричные элементы t_{11} для процесса $p\mu^- + p$, а также t_{11} и t_{22} для процесса $d\mu^- + d$ и после подстановки их в формулу (8) получить аналитические выражения для сечений σ_{ii} вплоть до энергий столкновения $E \approx 0,1$ эв^{x/}.

Константы перехвата

Константы перехвата $\lambda(J)$ и $\Lambda(J)$ в состояниях с определенным значением полного момента J отличаются от физически измеримых констант перехвата $\lambda = \lambda(F_1 \rightarrow F_2)$ на множитель, равный статистическому весу уровней со значением момента F_1 в смеси состояний с различными значениями полного момента J системы из трех час-

^{x/} Следует отметить, что при вычислении матричных элементов t_{ii} из уравнения (33) в него необходимо подставлять параметры a_{ii} в единицах задачи $a_m = \frac{\hbar^2}{me^2}$, которые отличаются от табличных значений множителем m/M_μ . Если импульсы k_1 определены формулами (28), то сечения (8) получаются в единицах

$$a_m^2 = \left(\frac{M_\mu}{m}\right)^2 6,55 \cdot 10^{-22} \text{ см}^2.$$

Таблица 9
 Параметры a_{ij} низкоэнергетического рассеяния

	a_{11}	$a_{12} = a_{21}$	a_{22}	a_g	a_u
$p\mu^- + p$	-8,9	7,2	-0,3I	-13,3	3,7
$d\mu^- + d (J=1/2)$	4,7	-1,1	3,5	5,5	3,1
$d\mu^- + d (J=3/2)$	3,5	0,86	5,1	5,5	3,1
$t\mu^- + t$	-4,2	3,6	1,9	-6,5	2,4

Таблица 10
 Константы перехвата λ , 10^{-13} см³ сек⁻¹ между уровнями сверхтонкой структуры при разных энергиях столкновения

Е эВ	$p\mu^- + p$	$d\mu^- + d$	$t\mu^- + t$
10^{-3}	1,2	$1,1 \cdot 10^{-2}$	0,20
10^{-2}	1,2	$1,2 \cdot 10^{-2}$	0,20
0,1	1,4	$1,9 \cdot 10^{-2}$	0,21
0,5	1,7	$3,2 \cdot 10^{-2}$	0,22
Герштейн/8/	0,5	$1,7 \cdot 10^{-3}$	-

тип $x/$. Соответствующие формулы выписаны в работах Герштейна /6/.
 Для процессов $p\mu^- + p$, $t\mu^- + t$ и $d\mu^- + d$, соответственно, они имеют вид

$$\lambda = \lambda(1 \rightarrow 0) = \frac{1}{3} \lambda (J = 1/2), \quad (34)$$

$$\lambda = \lambda(3/2 \rightarrow 1/2) = \frac{1}{3} \lambda (J=3/2) + \frac{1}{6} \lambda (J=1/2). \quad (35)$$

Из таблицы 10 видно, что условие $\lambda = \text{const}$, которое обычно используется при анализе экспериментальных данных, выполняется только в узкой области энергий $E < 10^{-2}$ эв. При $E < 10^{-2}$ эв с учетом соотношений (27) и (26) выражения (34) и (35) переходят в формулы Герштейна /8/:

$$\lambda_p \approx \frac{\pi}{4} (a_g - a_u)^2 \frac{k_0}{M} a_s a_\mu^2 \text{ см}^3 \text{ сек}^{-1}, \quad (36)$$

$$\lambda_d \approx \frac{\pi}{3} (a_g - a_u)^2 \frac{k_0}{M} a_s a_\mu^2 \text{ см}^3 \text{ сек}^{-1}. \quad (7)$$

Значения, полученные Герштейном в работе /8/, соответственно равны:
 $\lambda_p = 0,5 \cdot 10^{-13}$ и $\lambda_d = 1,7 \cdot 10^{-16}$.

$x/$ Например, для системы $d\mu^- + d$, $J_1 = J_2 = 1$, $S = 1/2$ общее число состояний равно 18, из них 6 состояний со значениями $J = 5/2$, $F = 3/2$, 4+4 состояния со значениями $J = 3/2$, $F = 3/2 + F = 1/2$, 2 + 2 состояния со значениями $J = 1/2$, $F = 3/2 + F = 1/2$. Формула (38) отсюда легко следует, если учесть, что общее число состояний с моментом $J = 3/2$ равно 12. Конечно, соотношения (34) и (35) можно получить и другим способом, используя формализм коэффициентов Рака.

СТРУКТУРЫ

Схема расчета, принятая в данной работе, не приспособлена для вычисления сечений σ_{22} при энергиях столкновений $E' < \Delta E$. Однако их можно оценить по формулам Герштейна /8/, используя значения длин рассеяния a_g и a_u , вычисленные в предыдущей работе авторов /11/. Применимость формул Герштейна при тепловых энергиях столкновения $E' \approx 10^{-2}$ эв обоснована результатами данной работы. Для процессов $p\mu^- + p$, $t\mu^- + t$ и $d\mu^- + d$ соответственно эти формулы имеют вид

$$\sigma_{22} = \pi (a_g + 3a_u)^2, \quad (38)$$

$$\sigma_{22} = \frac{4\pi}{3} \left[\left(\frac{a_g + 3a_u}{3} \right)^2 + 2 \left(\frac{5a_g + a_u}{6} \right)^2 \right].$$

В таблицах 11 и 12 эти значения сравниваются с более ранними расчетами /8,9/ и результатами экспериментов /3-6/.

Столкновения при больших энергиях

При энергиях столкновения $E > 1$ эв необходимо учитывать вклад в сечения σ_{ij} парциальных волн с $L \neq 0$. При строгом рассмотрении задачи для этого необходимо учесть спин-орбитальное взаимодействие при движении ядер, что представляет значительные трудности. Однако, как показывает опыт прежних расчетов /9/, при сравнительно больших энергиях столкновений можно пренебречь как влиянием спин-орбитального взаимодействия, так и сверхтонким расщеплением уровней ΔE и учитывать лишь тождественность рассеивающихся частиц. В этом слу-

Таблица 11

Сечение упругого рассеяния μ^- -мезоатомов в нижнем состоянии сверхтонкой структуры

	Джелепов и др./4/	/6/ Alberigi et al	/9/ Cohen et al.	Зельдович и Герштейн /1/	Данная работа
$\sigma_{22}, 10^{-21} \text{см}^2$	$1,67 \pm 0,30$	$7,6 \pm 0,7$	$8,2$	$1,2$	$2,5$

Таблица 12

Сечение упругого рассеяния $d\mu^-$ -мезоатомов в нижнем состоянии сверхтонкой структуры

$$\sigma_{22} = \frac{1}{3} \sigma_{22} (J=1/2) + \frac{2}{3} \sigma_{22} (J=3/2)$$

	Джелепов и др./5/	/6/ Alberigi et al.	Джелепов и Зельдович др./4/	Зельдович и Герштейн /1/	/9/ Cohen et al.	Дан- ная рабо- та
$\sigma_{22}, 10^{-19} \text{см}^2$	$1,5 \pm 0,5$	$0,55 \pm 0,20$	$4,15 \pm 0,29$	$3,3$	$3,5$	$1,8$

чае имеет смысл лишь полное симметризованное сечение /10/ (в дальнейшем рассмотрим лишь процесс $p\mu^- + p$)

$$\sigma_s(k) = \frac{1}{4}\sigma_{s,s}(k) + \frac{3}{4}\sigma_{s,a}(k), \quad (39)$$

где $\sigma_{s,s}(k)$ - сечение рассеяния в синглетном состоянии двух протонов, а $\sigma_{s,a}(k)$ - сечение в триплетном состоянии. При $E > 10^3$ эв становится излишним также учет статистики протонов, поскольку в этой области $\sigma_s(k) \approx \sigma(k)$, т.е. полному сечению без учета спинов частиц.

На рис. 4 приведены графики соответствующих сечений. Интересно отметить наличие резонансов в реакциях такого типа, происхождение которых обсуждалось ранее /9/.

Заключение

Результаты данной работы позволяют определить точность и границы применимости более ранних вычислений. Используемый метод расчета допускает обобщение и уточнение. Главным образом, это касается учета высших состояний, которые не участвуют непосредственно в процессах перехвата, однако, вносят поправки $\approx 1/M^2$ в эффективные потенциалы задачи K_{11} . Обычно этим влиянием можно пренебречь, однако, в резонансных ситуациях, когда велики длины рассеяния (например, a_g в процессе $p\mu^- + p$), учет этих поправок может оказаться существенным.

Кроме физических приложений, проведенные расчеты представляют также методический интерес, как обоснование применимости метода В.С.С. при медленных столкновениях в системе трех тел, взаимодействующих по закону Кулона.

Л и т е р а т у р а

1. Я.Б. Зельдович, С.С. Герштейн. УФН, 71, 581 (1960).
2. С.С. Герштейн, В.И. Петрухин, Л.И. Пономарев, Ю.Д. Прокошкин. УФН, 9 (1969).
3. E.I. Blaser, E.W. Anderson, L.M. Lederman, S.L. Meyer, J.L. Rosen, J.E. Rothenberg, I.T. Wang. Phys. Rev. 132, 2679 (1963).
4. В.П. Джелепов, П.Ф. Ермолов, В.И. Москалев, В.В. Фильченков, М. Фримл. ЖЭТФ, 17, 1243 (1964).
В.П. Джелепов, П.Ф. Ермолов, В.В. Фильченков. ЖЭТФ, 49, 393 (1965).
5. В.П. Джелепов, П.Ф. Ермолов, В.И. Москалев, В.В. Фильченков. ЖЭТФ, 50, 1235 (1966).
6. A. Alberigi, Quaranta, A. Bertin, G. Matone, F. Palmonari, A. Placci, P. Dalpiaz, G. Torelli, E. Zavattini. Nuovo Cim. 47B, 72 (1967).
7. В.Б. Беляев, С.С. Герштейн, Б.Н. Захарьев, С.П. Ломнев. ЖЭТФ, 37, 1652 (1959).
8. С.С. Герштейн. ЖЭТФ, 34, 463 (1958). ЖЭТФ, 40, 698 (1961).
9. S. Cohen, D.L. Judd, R.J. Riddell. Phys. Rev. 119, 386, 1960.
10. А.В. Матвеевко, Л.И. Пономарев. ЖЭТФ, 57, 2084 (1969).
11. А.В. Матвеевко, Л.И. Пономарев. Препринт ОИЯИ Р4-4676, Дубна, 1969; ЖЭТФ, 58, 1640, 1970.
12. Т.Ю. Ву, Т. Омура. Квантовая теория рассеяния, М., 1969, "Наука".
13. Л.И. Пономарев. ЖЭТФ, 52, 1550 (1967).
14. В.В. Бабилов. Метод фазовых функций в квантовой механике, Москва, 1968, изд. "Наука".
15. А.В. Матвеевко, Л.И. Пономарев. Препринт ОИЯИ, Р4-4481, Дубна, 1970.
16. Н.Ф. Мотт, Г.Ю. Мэсси. Теория атомных столкновений, Мир, 1969.

17. T.M. Peek. J. Chem. Phys. 43, 3004 (1965).

Sandia Corporation Report No. Sc-RR-65-67 (1965).

18. G. Hunter, B.F. Gray, H.O. Prichard. J. Chem. Phys. 45, 3806 (1966), 146, 2146 (1967), 46, 2153 (1967).

Л.И. Пономарев, Т.П. Пузынина. Препринт ОИЯИ Р-5040, Дубна, 1967, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 апреля 1970 года.