ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4 - 5008

Г.Н. Афанасьев

КЛАССИФИКАЦИЯ СОСТОЯНИЙ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В КОЛЛЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ ЯДРА

1970

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P4 - 5008

Г.Н. Афанасьев

КЛАССИФИКАЦИЯ СОСТОЯНИЙ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В КОЛЛЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ ЯДРА

Направлено в ЯФ

1. Нашей целью является рассмотрение обобщенной модели ядра с точки зрения заложенных в ней свойств симметрии. Гамильтониан пятимерного сферически симметричного осциллятора имеет вид:

$$H_0 = \omega_0 b^+_{2\mu} b_{2\mu} ,$$

$$\mu = (2, 1, 0, -1, -2). \qquad (1)$$

Здесь $b^+_{2\mu}$, $b_{2\mu}$ - операторы квадрупольных фононов. В дальнейшем мы выбираем фоковскую реализацию для операторов b :

$$b^+_{2\mu} \equiv x_\mu , \quad b_{2\mu} = p_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} .$$

О справедливости такого представления см., например, /1/. Операторы $x_\mu p_\nu$ являются генераторами SU_5 -группы симметрии H_0 :

$$[H_0, x_\mu p_\nu] = 0.$$

Наличие таких коммутирующих с гамильтонианом операторов приводит к тому, что n фононный уровень энергии имеет кратность вырождения равную $\binom{n+4}{4}$, что совпадает с размерностью наиболее симметричного представления SU_5 . Это означает, что состояния, принадлежащие n фононному уровню, преобразуются между собой при действии $x_\mu p_\nu$ по неприводимому представлению SU_5 , имеющему только первый, отличный от нуля (и равный n) индекс. Включение взаимодействия между фононами приводит, как правило, к понижению симметрии гамильтониана и, следовательно, к снятию вырождения по квантовым числам, описывающим базисные векторы SU_5 . Взаимодействия, таким образом, можно классифицировать смотря по тому, какие квантовые числа нарушаются этим взаимодействием.

2. Перейдем к построению базиса неприводимого представления SU_5. Одной из возможных является следующая схема редукции:

$$SU_5 \supset R_5 \supset R_3 .$$

Выясним, на какие представления распадается неприводимое представление SU_5 при ограничении матрицами пятимерных вращений и на какие представления распадается неприводимое представление R_5 при ограничении трехмерными вращениями. Характеры неприводимых представлений SU_5, R_5 и R_3 равны соответственно /2/:

$$\chi_n(SU_5) = \Sigma \exp [\, i(n_1\phi_1 + n_2\phi_2 + n_3\phi_3 + n_4\phi_4 + n_5\phi_5) \,],$$

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 = 0, \qquad (2)$$

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = n ,$$

$$0 \le n_i \le n ,$$

$$\chi_m(R_5) = \frac{\sin(m+\frac{3}{2})\phi_1 \cdot \sin\frac{\phi_2}{2} - \sin(m+\frac{3}{2})\phi_2 \cdot \sin\frac{\phi_1}{2}}{\sin\frac{3}{2}\phi_1 \cdot \sin\frac{\phi_2}{2} - \sin\frac{3}{2}\phi_2 \cdot \sin\frac{\phi_1}{2}}, \qquad (3)$$

$$\chi_\ell(R_3) \equiv T_\ell = \frac{\sin(\ell+\frac{1}{2})\phi}{\sin\frac{\phi}{2}} . \qquad (4)$$

Матрицы пятимерных вращений получаются из пятимерных унитарных, если положить:

$$\phi_1 = -\phi_3 ,\ \phi_2 = -\phi_4 ,\ \phi_5 = 0. \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (2) и собирая коэффициенты при $\chi_m(R_5)$, находим:

$$\chi_n(SU_5) = \chi_n(R_5) + \chi_{n-2}(R_5) + \ldots$$

Матрицы трехмерных вращений получаются из матриц пятимерных если положить:

$$\phi_1 = 2\phi_2 \equiv 2\phi . \tag{6}$$

Подставляя (6) в (3), получаем:

$$\chi_m(R_5) = \sum_{s=0}^{m} (r_{2s} - r_{s-1}), \tag{7}$$

где мы положили:

$$r_s = T_s + T_{s-3} + T_{s-6} + \ldots$$

Явный вид формул (7) дан в приложении 1.

3. Генераторы группы трехмерных вращений R_3 фиксируются требованием, чтобы операторы b_μ были неприводимыми тензорными операторами ранга 2 относительно R_3:

$$T_0 = 2(x_2 p_2 - x_{-2} p_{-2}) + x_1 p_1 - x_{-1} p_{-1},$$

$$T_1 = \sqrt{2}(x_2 p_1 + x_{-1} p_{-2}) + \sqrt{3}(x_1 p_0 + x_0 p_{-1}), \tag{8}$$

$$T_{-1} = \sqrt{2}(x_1 p_2 + x_{-2} p_{-1}) + \sqrt{3}(x_0 p_1 + x_{-1} p_0).$$

Проиллюстрируем идею построения базиса для состояний с нулевым угловым моментом. Такие состояния должны быть скалярами относительно трехмерных вращений. Таким образом, приходим к задаче нахождения инвариантов трехмерной группы вращений. Согласно теореме Гильберта/2/ каждый такой инвариант может быть представлен в виде полинома от конечного числа базисных инвариантов; таковых оказывается два:

$$I_2 = x_0^2 + 2(x_2 x_{-1} - x_1 x_{-1}),$$

$$I_3 = x_0^3 - 3x_0(x_1 x_{-1} + 2x_2 x_{-2}) + 3\sqrt{\frac{3}{2}}\,(x_2 x_{-1}^2 + x_{-2} x_1^2).$$

Инвариант степени n имеет вид:

$$|pq> = (I_2)^p\,(I_3)^q,\quad 2p+3q = n. \tag{9}$$

$|p,q>$ реализует функциональный базис для состояний с нулевым угловым моментом. В справедливости того, что $|pq>$ действительно исчерпывают базисные инварианты (от пяти переменных) трехмерной группы вращений, можно убедиться, если заметить, что число целочисленных решений уравнения

$$n = 2p + 3q$$

совпадает с кратностью вырождения состояний с нулевым угловым моментом (см. приложение 1).

Аналогичные рассуждения для состояний с произвольным угловым моментом ℓ позволяют построить произвольное состояние SU_5. При этом мы ограничимся построением приведенных базисных функций (для которых магнитное квантовое число m равно своему максимальному значению, то есть ℓ). Состояния с произвольным m получаются приложением к приведенной функции достаточного числа раз оператора T_{-1}. Приведенные функции, описывающие n фононное состояние с орбитальным моментом ℓ, имеют вид:

а) для четных ℓ

$$|pq\ell\, n> = (I_2)^p \cdot (I_3)^q \cdot (x_2)^{\ell+2p+3q-n} \cdot y^{n-\frac{\ell}{2}-2p-3q},$$

$$\max(0,\, n-\ell) \le 2p+3q \le n-\frac{\ell}{2}, \tag{10.1}$$

$$p,q \ge 0;$$

б) для нечетных ℓ

$$|p\,q\,\ell\ n> = (I_2)^p \cdot (I_3)^q \cdot (x_2)^{\ell-n+2p+3q} \cdot y^{n-2p-3q-\frac{\ell+3}{2}} \cdot z\ ,$$

$$\max(0,\ n-\ell) \le 2p+3q \le n-\frac{\ell+3}{2}\,,$$

$$y = \sqrt{3}\ x_1^2 - 2\sqrt{2}\ x_2 x_0\ , \tag{10.2}$$

$$z = x_1^3 - \sqrt{6}\,x_2 x_1 x_0 + 2x_2^2 x_{-1}\ .$$

Таким образом, кроме квантовых чисел n, ℓ, необходимо задать числа p, q, т.е. число скалярных фононных дублетов и триплетов.

4. Хотя базисные функции (9,10) полны и имеют ясный физический смысл, они неудобны с математической точки зрения. Напомним определение тензорного оператора ранга ℓ относительно группы трехмерных вращений. μ -ая компонента тензорного оператора удовлетворяет соотношениям:

$$[T_0\ , f_\mu\ ] = \mu f_\mu\ ,$$

$$[T_1[T_{-1}, f_\mu\ ]] + [T_{-1}[T_1\ f_\mu]] + [T_0[T_0\ f_\mu]] = \ell(\ell+1) f_\mu\ , \tag{11}$$

$$[T_1\ , f_\ell\,] = [T_{-1}\ , f_{-\ell}\ ] = 0.$$

Практически поступают так: решают уравнение (11) для одной компоненты, например для f_0, а остальные получают коммутацией f_0 с T_1 и T_{-1}, f_0 ищем в виде

$$f_0 = \phi(\mu) x_\mu\, p_\mu\,. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11), получаем следующее уравнение для ϕ_μ :

$$[12 - 2\mu^2 - \ell(\ell+1)]\phi(\mu) = (2-\mu)(3+\mu)\ \phi\ (\mu+1) +$$

$$+ (3-\mu\ )(2+\mu)\phi\,(\mu-1).$$

Отсюда следует:

$$\phi(\pm 1) = [1 - \frac{1}{4}\ell(\ell+1)]\,\phi(\pm 2),$$

$$\phi(0) = \frac{(\ell+2)(\ell-1)(\ell-3)(\ell+4)}{6[4 - \ell(\ell+1)]}\phi(\pm 1).$$

Значениями $\ell = 0,1,2,3,4$ исчерпываются генераторы SU_5. Тензор нулевого ранга совпадает с $C_1 = x_\mu p_\mu$, т.е. с оператором Казимира первого порядка группы U_5. При $\ell = 1$ получаем генераторы группы углового момента T_μ. Явный вид тензорных операторов Q_μ (ранга 2), $F_\mu(\ell=3)$ и $H_\mu(\ell=4)$ дан в приложении 2.

Совокупность операторов T_μ, F_k генерирует группу R_5. Естественно поэтому маркировать базис SU_5 следующими квантовыми числами: n – собственным значением C_1; Λ – собственным значением $C_2(R_5)$ – оператора Казимира второго порядка группы R_5; ℓ, m – угловым моментом и его проекцией. Из приложения 1 следует, что внутри данного мультиплета R_5 состояния с данным ℓ встречаются несколько раз. Поэтому необходимо найти дополнительное квантовое число, снимающее вырождение по ℓ.

5. Заметим, что состояния (8) не инвариантны относительно вращений в пятимерном пространстве. Из (8), однако, можно составить собственную функцию $C_2(R_5)$, равного:

$$C_2(R_5) = T^2 + F^2,$$

$$T^2 = T_0(T_0+1) + 2T_{-1}T_1,$$

$$F^2 = F_0^2 + F_0 + 2F_{-1}F_1 + 10F_{-2}F_2 + 10F_{-3}F_3 + 6T_0.$$

Действуем C_2 на $|q\rangle$:

$$C_2|q\rangle = 45q(q+1)|q\rangle - 45q(q-1)|q-2\rangle.$$

Ищем $\phi = \Sigma\, c(q)|q\rangle$, такие, чтобы $C_2\phi = \lambda\phi$. Этому можно удовлетворить, если для $C(q)$ выполняется следующее рекуррентное соотношение:

$$C(q+2) = \frac{45q(q+1) - \Lambda}{(q+1)(q+2)}\,c(q).$$

Условие обрыва ряда определяет собственные значения Λ и коэффициенты $c(q)$:

$$\lambda = 45q_0(q_0+1),$$

$$c(q) = c_0 \prod_{s=1}^{q\,\sigma-2} \frac{(q+2s)(q+2s-1)}{(q-q_0-2+2s)(q+q_0+2s-1)},$$

$$c_0 = \frac{1}{45}\,c(q_0).$$

Можно показать, что $q_0 = \frac{1}{b}\ell_0$, где ℓ_0 – максимальное значение углового момента для данного представления R_5. Имея скалярную приведенную функцию, легко построить функцию, отвечающую угловому моменту ℓ. Например, для $\ell_0 = 0(\mathrm{mod}\,3)$ имеем:

$$f_2^p f_4^q (F_3)^2 |n, \ell_0\rangle$$

$$2p + 4q + 3r = \ell, \quad p + 2q - r = \omega,$$

$$f_2 = F_0F_2 - \frac{1}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}(F_1^2 - T_1^2) - \frac{1}{\sqrt{2}}F_{-1}F_3 - F_2$$

$$-\frac{1}{2}(\sqrt{3}\,T_{-1}F_3 + T_0F_2 + \frac{1}{5}T_1F_1),$$

$$f_4 = 2\sqrt{3}\,F_1F_3 + 5F_2^2 - 2\sqrt{2}\,T_1F_3.$$

При этом функции с одинаковым ω, ℓ и различными p, q оказываются линейно зависимыми.

6. Включим взаимодействие между фононами. При этом мы ограничимся сферически симметричными двухчастичными, не нарушающими эрмитовости гамильтониана и сохраняющими число фононов. Самое общее взаимодействие такого типа имеет вид

$$V = \sum_{LM} G_L [x\,x]^L_M [p\,p]^L_M.$$

L принимает значение 0,2,4. Переходя в гамильтониане $H = H_0 + V$ в канал частица-дырка, получаем:

$$H = (\omega - f_0)C_1 + \frac{1}{5}f_0C_1^2 + \frac{1}{10}f_1T^2 + \frac{1}{10}f_2Q^2 + \frac{1}{10}f_3F^2 + \frac{1}{70}f_4H^2. \qquad (13)$$

C_1, T^2 и F^2 были определены ранее. Операторы Q^2 и H^2 равны:

$$Q^2 = Q_0^2 + 2Q_{-1}Q_1 + 4Q_{-2}Q_2 + \frac{21}{5}T_0 + \frac{8}{5}F_0 ,$$

$$H^2 = H_0^2 + 10H_{-1}H_1 + 10H_{-2}H_2 + 70H_{-3}H_3$$

$$+ 140H_{-4}H_4 + 70T_0 - 15F_0 .$$

Константы взаимодействия в канале частица-дырка связаны с константами в канале частица-частица:

$$f_0 = \frac{1}{5}G_0 + G_2 + \frac{9}{5}G_4 ,$$

$$f_1 = \frac{1}{5}G_0 + \frac{1}{2}G_2 - \frac{6}{5}G_4 ,$$

$$f_2 = \frac{1}{5}G_0 - \frac{3}{14}G_2 + \frac{18}{35}G_4 ,$$

$$f_3 = \frac{1}{5}G_0 - \frac{4}{7}G_2 - \frac{9}{70}G_4 ,$$

$$f_4 = \frac{1}{5}G_0 + \frac{2}{7}G_2 + \frac{1}{70}G_4 .$$

Гамильтониан (13) составлен из генераторов группы U_5. Квадратичный оператор Казимира группы SU_5 равен:

$$C_2(SU_5) = 7(T^2 + F^2) + 5Q^2 + H^2 = 56C_1(C_1 + 5).$$

Находя H^2 из (13), F^2 из $C_2(R_5)$ и подставляя их в (13), получаем:

$$H = (\omega - f_0 + 4f_4)C_1 + \frac{1}{5}(f_0 + 4f_4)C_1^2 + \frac{1}{10}(f_3 - f_4)C_2(R_5)$$

$$- \frac{f_1 - f_3}{10}T^2 + \frac{f_2 - f_4}{14}Q^2 .$$

При $f_2 = f_4$ (или, что то же самое, $G_2 = G_4$) точное собственное значение гамильтониана равно:

$$(\omega - f_0 + 4f_4)n + \frac{1}{5}(f_0 + 4f_4)n^2 + \frac{1}{8}(f_3 - f_4)\ell_0(\ell_0 + 6).$$

Ротационной полосы в этом случае не возникает. При $G_2 \neq G_4$ ротационная полоса появляется, но ℓ_0, определяющее неприводимое представление R_5, перестает быть хорошим квантовым числом. Заметим, что получаемая таким образом ротационная полоса оказывается конечной. По сути дела, она есть следствие того, что полный гамильтониан имеет низшую степень симметрии (R_3) по сравнению с исходным гамильтонианом (SU_5).

7. С другой стороны, в работе /3/ из анализа экспериментальных данных был сделан вывод, что ротационная полоса в ядрах формируется таким образом, что никакие два члена ротационной полосы не принадлежат одному и тому же мультиплету SU_5. Например, вращательная полоса основного состояния формируется из $0^+(n=0), 2^+(n=1), 4^+(n=2)\ldots$; β – полоса состоит из $0^+(n=2), 2^+(n=3), 4^+(n=4)\ldots$; γ – полоса ($K=2$) состоит из $2^+(n=2), 3^+(n=3), 4^+(n=4)\ldots$ и т.д. Посмотрим, нельзя ли организовать состояния внутри такой ротационной полосы в мультиплет некоторой группы Γ_1. Поскольку вращательная полоска содержит все значения (для β -полосы, – только четные) угловых моментов, начиная с некоторого ℓ_{min}, то группа Γ_1 некомпактна. Далее, Γ_1 является подгруппой Γ, описывающей все ротационные мультиплеты. Заметим, что начальные и конечные звенья этой цепочки определяются почти однозначно: в самом деле, группа трехмерных вращений состоит из генераторов T_0, T_1, T_{-1}. Вид T_0, T_1, T_{-1} однозначно фиксируется требованием, чтобы x_μ, p_ν были тензорными операторами второго ранга. С другой стороны, Γ определяется как некомпактное расширение SU_5, содержащее каждый мультиплет SU_5 точно один раз. Таких расширений два /4/: $SU(5,1)$ и $Sp(5,5)$. Некомпактные генераторы равны:

а) для $SU(5,1)$

$$\sqrt{C_1 - 1}\, x_\mu \qquad \sqrt{C_1}\, p_\nu ,$$

б) для $Sp(5,5)$

$$x_\mu x_\nu , \qquad p_\mu p_\nu .$$

Заметим, что Γ_1 также определяется однозначно: единственной подгруппой, наиболее симметричное представление которой содержит только четные угловые моменты для β-полосы и все моменты для γ-полосы, является GL(3R) /5/. Легко убедиться, что из T_0, T_1, T_{-1}, определенных соотношениями (8), и выписанных некомпактных генераторов невозможно построить GL(3R). Это означает, что не существует промежуточной группы Γ_1, которая описала бы все состояния только одной вращательной полосы.

8. Заметим, что Sp(5,5) содержит подгруппу, являющуюся прямым произведением R_5 и SO(2,1); R_5 генерируется операторами T_μ, F_k; генераторы SO (2,1) равны:

$$S_0=\frac{1}{2}\left(C_1+\frac{5}{2}\right),\quad S_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}I_0(x),\quad S_{-1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}I_0(p).$$

Таким образом, состояния Sp (5,5) разбиваются на некомпактные мультиплеты SO (2,1) × R_5. Каждый мультиплет маркируется одним квантовым числом, которое равно n_0 (минимальному собственному значению C_1 в данном мультиплете SO(2,1)), и в то же самое время равно половине максимального момента, содержащегося в данном представлении R_5 ($n_0=\frac{1}{2}\ell_{max}=\frac{1}{2}\ell_0$). Поясним, почему наряду с мультиплетом (ℓ_0,ℓ_0) не встречаются мультиплеты (ℓ_0+2,ℓ_0), (ℓ_0+4,ℓ_0) и т.д. Это связано с тем, что для данного значения числа n мультиплет R_5 встречается точно один раз. Появление мультиплета (ℓ_0+2,ℓ_0) привело бы, например, к тому, что имелось бы два мультиплета R_5 с одинаковыми (n,ℓ_0) и разными n_0.

Резюмируя, можно сказать, что SU_5 может быть вложено в некомпактную группу Sp (5,5). При этом каждое представление SU_5 встречается точно один раз. Sp (5,5) может быть разложена по представлениям некомпактной группы SO (2,1) × R_5. При этом встречаются только мультиплеты вида (ℓ_0,ℓ_0) и только по одному разу. Каждый мультиплет SO (2,1) × R_5 может быть, в свою очередь, разложен как по мультиплетам SO (2,1), так и по мультиплетам R_5. Например, ℓ_0 мультиплет SO (2,1) содержит собственные значения C_1 (т.е. оператора числа фононов), равные: $n=\frac{1}{2}\ell_0,\ \frac{1}{2}\ell_0+2,\ \frac{1}{2}\ell_0+4\ \ldots$

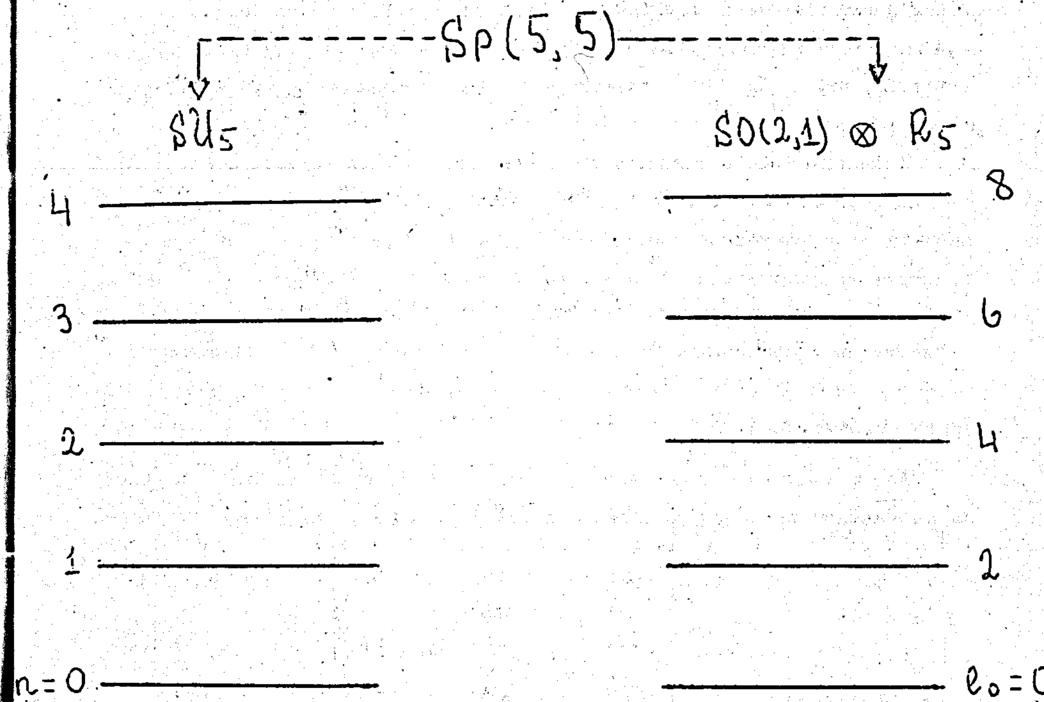

Рис.1

Разложение ℓ_0 мультиплета R_5 дано в приложении 1. На рис. 1 схематически показано разложение Sp (5,5) как на мультиплеты SU_5, так и на мультиплеты SO (2,1)× R_5. Ясно, что оба разложения полностью эквивалентны, но разложение на мультиплеты SU_5 лучше приспособлено для описания вибрационных свойств ядер (чему соответствует на рисунке "готовая" вибрационная полоса), тогда как разложение по мультиплетам SO (2,1) × R_5 более удобно при описании ротационных свойств ядер (соответственно готовая ротационная полоса). Если гамильтониан инвариантен относительно SU_5, то спектр – чисто вибрационный, т.к. оператор Казимира C_1 – единственный оператор, инвариантный относительно всех преобразований SU_5. Если гамильтониан инвариантен относительно $R_5 \times SO(2,1)$, то спектр определяется комбинаций операторов Казимира R_5 и $SO(2,1)$ и имеет вращательный характер. Взаимодействия, реализуемые в действительности, являются, по-видимому, промежуточными между этими двумя случаями. Разумеется, мы неявно предположили, что $Sp(5,5)$ является группой неинвариантности невозмущенного гамильтониана.

Позволим себе в заключение спекуляцию. Глядя на рис. 2 заимствованный из статьи Р. Шелайна /3/, трудно отделаться от мысли, что переход от сферических ядер района V к γ-нестабильным ядрам происходит, если гамильтониан перестает быть инвариантным относительно SU_5, но сохраняет инвариантность относительно R_5 (происходит расщепление на мультиплеты R_5, сами же мультиплеты R_5 сохраняют свою целостность). При переходе в район вращений снимается инвариантность относительно R_5.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить В.Г. Соловьева за постоянное внимание и интерес к работе, Р. Джолоса – за обсуждение.

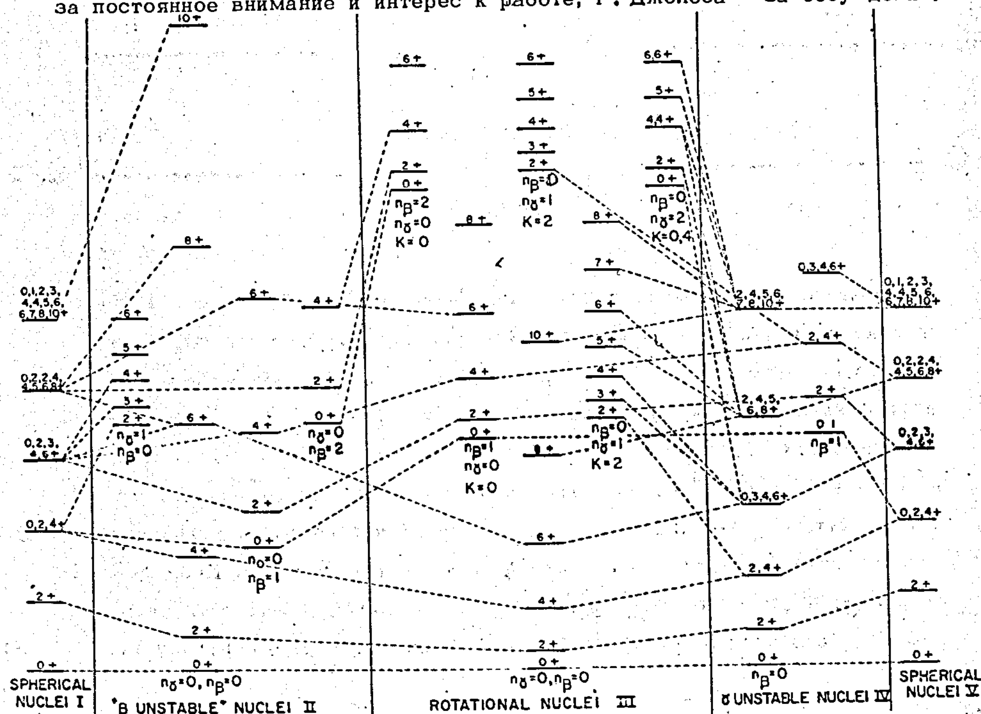

Рис.2.

Приложение 1

Ниже приведены кратности вырождения по угловому моменту для наиболее симметричного представления R_5, характеризуемого одним индексом n. В первой колонке даны угловые моменты, во второй – кратность вырождения, в третьей – пределы изменения. Величина m означает, что $\ell = m \pmod 3$.

$n = 6\lambda,\ m = 0$

$T(6s) + T(6s+3)$	$s+1$	$0 \le s \le \lambda - 1$
$T(6\lambda)$	$\lambda + 1$	——
$T(6s) + T(6s-3)$	$2\lambda + 1 - s$	$\lambda + 1 \le s \le 2\lambda$

$n = 6\lambda,\ m = 1$

$T(6s+1) + T(6s-2)$	s	$0 \le s \le \lambda - 1$
$T(6\lambda - 2)$	λ	——
$T(6s+1) + T(6s+4)$	$2\lambda - s$	$\lambda \le s \le 2\lambda$

$n = 6\lambda,\ m = 2$

$T(6s+2) + T(6s+5)$	s	$0 \le s \le \lambda - 1$
$T(6\lambda + 2)$	λ	——
$T(6s+2) + T(6s-1)$	$2\lambda - s$	$\lambda + 1 \le s \le 2\lambda$

$n = 6\lambda + 1,\ m = 0$

$T(6s) + T(6s+3)$	s	$0 \le s \le \lambda - 1$
$T(6\lambda)$	λ	——
$T(6s) + T(6s-3)$	$2\lambda - s + 1$	$\lambda + 1 \le s \le 2\lambda$

$n = 6\lambda + 1, \quad m = 1$

$T(6s+1) + T(6s-2)$	s	$0 \leq s \leq \lambda - 1$
$T(6\lambda - 2)$	λ	—
$T(6s+1) + T(6s+4)$	$2\lambda - s$	$\lambda \leq s \leq 2\lambda$

$n = 6\lambda + 1, \quad m = 2$

$T(6s+2) + T(6s+5)$	$s + 1$	$0 \leq s \leq \lambda - 1$
$T(6\lambda + 2)$	$\lambda + 1$	—
$T(6s+2) + T(6s-1)$	$2\lambda + 1 - s$	$\lambda + 1 \leq s \leq 2\lambda$

$n = 6\lambda + 2, \quad m = 0$

$T(6s) + T(6s+3)$	s	$0 \leq s \leq \lambda - 1$
$T(6\lambda)$	λ	—
$T(6s) + T(6s-3)$	$2\lambda + 1 - s$	$\lambda + 1 \leq s \leq 2\lambda$

$n = 6\lambda + 2, \quad m = 1$

$T(6s+1) + T(6s-2)$	s	$0 \leq s \leq \lambda$
$T(6\lambda + 4)$	$\lambda + 1$	—
$T(6s+1) + T(6s+4)$	$2\lambda + 1 - s$	$\lambda + 1 \leq s \leq 2\lambda$

$n = 6\lambda + 2, \quad m = 2$

$T(6s+2) + T(6s+5)$	$s + 1$	$0 \leq s \leq \lambda - 1$
$T(6\lambda + 2)$	$\lambda + 1$	—
$T(6s+2) + T(6s-1)$	$2\lambda + 1 - s$	$\lambda + 1 \leq s \leq 2\lambda$

$n = 6\lambda + 3, \quad m = 0$

$T(6s) + T(6s+3)$	$s + 1$	$0 \leq s \leq \lambda - 1$
$T(6\lambda)$	$\lambda + 1$	—
$T(6s) + T(6s-3)$	$2\lambda + 2 - s$	$\lambda + 1 \leq s \leq 2\lambda + 1$

$n = 6\lambda + 3, \quad m = 1$

$T(6s+1) + T(6s-2)$	s	$0 \leq s \leq \lambda$
$T(6\lambda + 4)$	$\lambda + 1$	—
$T(6s+1) + T(6s+4)$	$2\lambda + 1 - s$	$\lambda + 1 \leq s \leq 2\lambda + 1$

$n = 6\lambda + 3, \quad m = 2$

$T(6s+2) + T(6s+5)$	s	$0 \leq s \leq \lambda - 1$
$T(6\lambda + 2)$	λ	—
$T(6s+2) + T(6s-1)$	$2\lambda + 1 - s$	$\lambda + 1 \leq s \leq 2\lambda + 1$

$n = 6\lambda + 4, \quad m = 0$

$T(6s) + T(6s+3)$	s	$0 \leq s \leq \lambda$
$T(6\lambda + 6)$	$\lambda + 1$	—
$T(6s) + T(6s-3)$	$2\Lambda + 2 - s$	$\lambda + 1 \leq s \leq 2\lambda + 1$

$n = 6\lambda + 4, \quad m = 1$

$T(6s+1) + T(6s-2)$	s	$0 \leq s \leq \lambda$
$T(6\Lambda + 4)$	$\lambda + 1$	—
$T(6s+1) + T(6s+4)$	$2\lambda + 2 - s$	$\lambda + 1 \leq s \leq 2\lambda + 1$

$n = 6\lambda+4,\ m=2$

$T(6s+2)+T(6s+5)$	s	$0\le s\le\lambda-1$
$T(6\lambda+2)$	$\lambda+1$	———
$T(6s+2)+T(6s-1)$	$2\lambda+2-s$	$\lambda+1\le s\le 2\lambda+1$

$n = 6\lambda+5,\ m=0$

$T(6s)+T(6s+3)$	s	$0\le s\le\lambda$
$T(6\lambda+6)$	$\lambda+1$	———
$T(6s)+T(6s-3)$	$2\lambda+2-s$	$\lambda+2\le s\le 2\lambda+1$

$n = 6\lambda+5,\ m=1$

$T(6s+1)+T(6s-2)$	s	$0\le s\le\lambda$
$T(6\lambda+4)$	λ	———
$T(6s+1)+T(6s+4)$	$2\lambda+2-s$	$\lambda+1\le s\le 2\lambda+1$

$n = 6\lambda+5,\ m=2$

$T(6s+2)+T(6s+5)$	$s+1$	$0\le s\le\lambda-1$
$T(6\lambda+2)$	$\lambda+1$	———
$T(6s+2)+T(6s-1)$	$2\lambda+2-s$	$\lambda+1\le s\le 2\lambda+1$

Приложение 2

Компактные генераторы SU_5:

$$T_0 = 2(x_2 p_2 - x_{-2} p_{-2}) + x_1 p_1 - x_{-1} p_{-1}$$

$$T_1 = \sqrt{2}\,(x_2 p_1 + x_{-1} p_{-2}) + \sqrt{3}\,(x_1 p_0 + x_0 p_{-1})$$

$$T_{-1} = (T_1)^+$$

$$F_0 = x_2 p_2 - x_{-2} p_{-2} - 2(x_1 p_1 - x_{-1} p_{-1})$$

$$F_1 = \sqrt{2}\,(x_1 p_0 + x_0 p_{-1}) - \sqrt{3}\,(x_2 p_1 + x_{-1} p_{-2})$$

$$F_2 = x_2 p_0 - x_0 p_{-2}$$

$$F_3 = x_1 p_{-2} + x_2 p_{-1}$$

$$F_{-\mu} = (F_\mu)^+$$

$$Q_0 = 2(x_2 p_2 + x_{-2} p_{-2}) - x_1 p_1 - x_{-1} p_{-1} - 2x_0 p_0$$

$$Q_1 = -\sqrt{6}\,(x_2 p_1 - x_{-1} p_{-2}) - x_1 p_0 + x_0 p_{-1}$$

$$Q_2 = \sqrt{2}\,(x_2 p_0 + x_0 p_{-2}) + \sqrt{3}\,x_1 p_{-1}$$

$$Q_{-\mu} = (Q_\mu)^+$$

$$H_0 = x_2 p_2 + x_{-2} p_{-2} - 4(x_1 p_1 + x_{-1} p_{-1}) + 6x_0 p_0$$

$$H_1 = \sqrt{6}\,(x_1 p_0 - x_0 p_{-1}) - x_2 p_1 + x_{-1} p_{-2}$$

$$H_2 = \sqrt{3}\,(x_2 p_0 + x_0 p_{-2}) - 2\sqrt{2}\,x_1 p_{-1}$$

$$H_3 = x_1 p_{-2} - x_2 p_{-1}$$

$$H_4 = x_2 p_{-2}$$

$$H_{-\mu} = (H_\mu)^+$$

$$I_0(x) = x_0^2 + 2(x_2 x_{-2} - x_1 x_{-1})$$

$$I_0(p) = p_0^2 + 2(p_2 p_{-2} - p_1 p_{-1})$$

Литература

1. V. Bargmann. Comm. Pure Appl. Math., 14, 187 (1961).
2. Г. Вейль. Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, 1947.
3. R.K. Sheline. Revs.Mod.Phys., 32, 1 (1960).
4. R.C. Hwa, J. Nuyts. Phys.Rev., 145, 1188 (1965).
5. N. Mukunda, L.O' Raifeartaigh, E.C.G. Sudarshan. Syracuse Preprint NYO-3399 - 30 (1966).

Рукопись поступила в издательский отдел

1 апреля 1970 года.