ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4 - 4934

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Б.Н. Захарьев, А.И. Титов

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ПОЛЮСОВ S -МАТРИЦЫ

1970

P4 - 4934

Б.Н. Захарьев, А.И. Титов

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП ДЛЯ ПОЛЮСОВ S -МАТРИЦЫ

Направлено в ЯФ

Захарьев Б.Н., Титов А.И. P4-4934

Вариационный принцип для полюсов S -матрицы

Построен функционал для вычисления полюсов S-матрицы в комплексной плоскости ℓ (полюсов Редже).

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1970

Zakhariev B.N., Titov A.I. P4-4934

Variational Principle for the S -Matrix Poles

The functional for calculation of the S-matrix poles in the complex ℓ -plane (Regge poles) is constructed.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1970

Определенное достоинство алгоритмов вычисления, основывающихся на вариационных принципах, заключается в том, что наряду с простотой они позволяют получить значения искомых физических величин с точностью большей, чем точность определения параметров пробной функции [1,2/x].

Вариационные принципы нашли широкое применение при описании связанных состояний, а также для определения параметров рассеяния [1,2]. В работе [3] Рудаков предложил вариационный принцип для энергии квазистационарных состояний. В данной статье рассматривается метод вычисления полюсов S-матрицы в комплексной ℓ плоскости (полюсов Редже).

Сначала изложим общую схему построения вариационных принципов для задач на собственные значения и распространим ее на наш случай.

Требуется построить стационарный функционал I, соответствующий собственному значению λ линейного оператора $\hat{A}$:

$$\hat{A}\,\psi = \lambda\,\psi . \qquad (1)$$

---

x/ Это достигается благодаря свойству стационарности вариационных функционалов для рассчитываемых величин.

Умножим (1) слева на пока произвольную функцию ϕ и проинтегрируем по всему объему:

$$\int \phi \hat{A} \psi \, dV = \lambda \int \phi \psi \, dV . \tag{2}$$

Естественно искать I в виде:

$$I = \frac{\int \phi \hat{A} \psi \, dV}{\int \phi \psi \, dV} . \tag{3}$$

Вариационный принцип означает, что вариация δI обращается в ноль при произвольных вариациях ψ с точностью до $\delta^2 \psi$ (стационарность I). I в форме (3) уже стационарен относительно произвольных вариаций ϕ (по построению). Действительно, варьируя ϕ в (3), получаем:

$$\delta I \int \phi \psi \, dV + \int \delta \psi \, (I \psi - \hat{A} \psi) \, dV = 0 . \tag{4}$$

Поскольку ψ удовлетворяет уравнению (1), то при $I = \lambda$, $\delta I = 0$. Посмотрим, какому уравнению должно удовлетворять ϕ при вариации ψ (чтобы δI было равно нулю). Варьируя ψ в (3), имеем:

$$\delta I \int \phi \psi \, dV + \int (I \phi - \phi \hat{A}) \delta \psi \, dV = 0 . \tag{5}$$

Для определения искомого уравнения удобно переписать (5) в таком виде, чтобы оператор $\hat{A}$ действовал не на $\delta \psi$, а на ϕ . Используем соотношение (интегрируем по частям):

$$\int \phi \hat{A} \psi \, dV = \int (\hat{A}^* \phi) \psi \, dV + \Gamma(\phi ; \psi) , \tag{6}$$

где оператор $\hat{A}^*$ – сопряженный оператору $\hat{A}$, а $\Gamma(\phi;\psi)$ – некоторая билинейная форма (поверхностный интеграл). Если мы наложим на ϕ граничные условия, сопряженные с ψ, т.е.

$$\Gamma(\phi;\psi) = 0, \tag{7}$$

то из (5) следует уравнение для ϕ :

$$\hat{A}^*\phi - l\phi = 0 \tag{8}$$

с граничными условиями (7).

Рассмотрим случай задачи двух тел со сферически симметричным потенциалом. Уравнение Шредингера запишем в виде:

$$\hat{A}\psi_\ell \equiv \left(r \frac{d^2}{dr^2} - r^2 V(r) + r^2 E \right) \psi_\ell = \ell(\ell+1)\psi_\ell . \tag{9}$$

Полюсам S –матрицы соответствуют решения уравнения Шредингера с граничными условиями: на бесконечности имеются только уходящие волны (нет падающих) x/

$$\psi_\ell(0) = 0; \quad \psi_\ell(r\to\infty) \approx f_\ell e^{ikr} . \tag{10}$$

Такие решения существуют, например, при комплексных значениях ℓ. Сопряженный оператор $\hat{A}^*$ имеет вид:

$$\hat{A}^* = \frac{d^2}{dr^2} r^2 - r^2 V(r) + r^2 E . \tag{11}$$

---

x/ Действительно, в этом случае отношение потока расходящихся частиц к потоку падающих (равному нулю) будет бесконечным.

Условие (7) в этом случае будет

$$\left(\phi r^2 \frac{d}{dr}\psi - \psi \frac{d}{dr} r^2\phi\right)\Big|_0^{\infty} = 0. \tag{12}$$

Из уравнения (12) непосредственно получаем граничные условия на ϕ, если ψ удовлетворяет (10)

$$\phi(r \to \infty) \approx \frac{1}{r^2} e^{ikr}; \quad \lim_{r \to 0} r^2 \phi = 0. \tag{13}$$

Функционал (3) для $\ell(\ell+1)$ будет иметь вид:

$$I = \frac{\int dr\, \phi\left(r^2 \frac{d}{dr} - r^2 V(r) + r^2 E\right)\psi}{\int \phi\psi\, dr}. \tag{14}$$

Для приближенного расчета $\ell(\ell+1)$ в функционал (14) следует подставлять пробные функции

$$\psi(c_1 \ldots c_n), \quad \phi(c_{n+1}, \ldots c_m),$$

зависящие от неизвестных параметров, определяющих их форму. ψ и ϕ должны удовлетворять граничным условиям (10) и (13). Неизвестные параметры c_i определяются из системы уравнений:

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Подстановка этих c_i в (14) даст приближенное значение $\ell(\ell+1) = a + ib$, где a и b – действительные числа.

Переход из $\ell(\ell+1)$ – плоскости в ℓ – плоскость осуществляется по формулам:

$$\ell + \frac{1}{2} \equiv \lambda = \alpha + i\beta; \tag{16}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left\{ a + \frac{1}{4}\left[\left(a + \frac{1}{4}\right)^2 + b^2\right]^{1/2}\right\}^{1/2}; \qquad \beta = \frac{b}{2\alpha}. \tag{17}$$

На основе вариационного принципа Швингера стационарные функционалы для полюсов Редже были построены в работах [4,5].

Конкретные расчеты по предложенному в данной работе методу могут в ряде задач оказаться более удобными. Такой же подход может быть использован для построения вариационных принципов для собственных значений задачи Штурма (функции Штурма в последнее время нашли широкое применение в задачах рассеяния [7,8]).

Выражаем благодарность И.В. Амирханову и В.Л. Шмонину за полезные дискуссии.

Литература

1. Ю.Н. Демков. Вариационные принципы в теории столкновений. М., Физматгиз, 1958.
2. Ф.М. Морс, Г.Ф. Фешбах. Методы теоретической физики, гл.9, ИЛ, Москва, 1960.
3. В.С. Рудаков. Вестник ЛГУ №3, №16 (1965).
4. I. Wright, M. Scadron. Nuovo Cim., 54, 1571 (1964).
5. W.B. Kaufmann, Phys.Rev., 164, 1991 (1967).
6. M. Rotenberg. Ann. of Phys., 19, 262 (1962).
7. D.F. Gallagher, L. Wilets. Phys.Rev., 169, 139 (1968).

Рукопись поступила в издательский отдел
19 февраля 1970 года.