

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.

Р4 - 4860



Г.Н. Афанасьев

СХЕМА ЭЛЛИОТА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

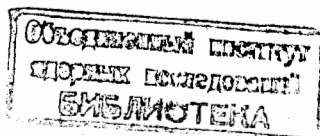
1969

P4 - 4860

Г.Н. Афанасьев

СХЕМА ЭЛЛИОТА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

Направлено в журнал "Теоретическая
и математическая физика"



1. В известной, ставшей уже классической, работе Эллиота^{/1/} рассматривалось остаточное взаимодействие в поле сферически-симметричного осциллятора. Энергетический спектр модели состоит из одночастичных и вращательных уровней. С другой стороны, во многих работах (например,^{/2,3/}) использовалась модель с парным и квадрупольным остаточными взаимодействиями в поле потенциала Нильссона или Вудса-Саксона. Для чётно-четных ядер собственные частоты представляют собой сложную суперпозицию двухквaziчастичных и коллективных уровней. Коллективные уровни обычно трактуются как вибрационные уровни обобщенной модели. При этом отклонения уровней от их положения, предсказываемого обобщенной моделью, объясняются ангармоничностью колебаний и другими причинами. Отметим, что вибрационных уровней нет в модели Эллиота. Перечислим возможные причины существования столь противоречивой ситуации: а) одночастичная схема в модели Эллиота несовершенна; б) в модели Эллиота отсутствуют спаривательные силы; в) эллиотовское квадрупольное взаимодействие не смешивает состояний, принадлежащих различным оболочкам.

Цель настоящей работы состоит в сопоставлении модели Эллиота со стандартной расчётной моделью^{/2,3/}.

2. Сформулируем основные положения эллиотовской модели. Рассмотрим гамильтониан сферически-симметричного осциллятора:

$$H_0 = -p_k^2 + \omega_0^2 x_k^2, \quad p_k = \partial / \partial x_k. \quad (1)$$

Группа симметрии H_0 (то есть максимальная совокупность операторов, коммутирующих с H_0) изоморфна SU_3 . Генераторы этой группы равны:

$$T_0 = -i X_{12}, \quad T_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (X_{13} + i X_{23}), \quad T_- = (T_+)^+,$$

$$X_{1j} = x_j p_j - x_j p_j,$$

$$Q_0 = \frac{1}{3} \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} - x_3^2 + p_3^2 - \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} \right),$$

$$Q_1 = [T_+, Q_0] = \frac{1}{\sqrt{2}} [p_3(p_1 + i p_2) - x_3(x_1 + i x_2)],$$

$$Q_2 = [T_+, Q_1] = \frac{1}{2} [(p_1 + i p_2)^2 - (x_1 + i x_2)^2],$$

$$Q_{-\mu} = (Q_\mu)^+.$$

Коммутационные соотношения между этими операторами приведены в табл. 1. Из операторов Q_μ можно составить единственную квадратичную комбинацию, являющуюся скаляром относительно группы углового момента:

$$\vec{Q}^2 = 3Q_0^2 + 2Q_{-1}Q_1 + Q_{-2}Q_2 + 3T_0.$$

В модели Эллиота в правую часть (1) добавляется член, пропорциональный Q^2 :

$$H = H_0 - \chi \vec{Q}^2 = \omega_0 S_0 - \chi \vec{Q}^2. \quad (3)$$

С другой стороны, $\vec{Q}^2 + \vec{T}^2 = C_2$, где C_2 - квадратичный оператор Казимира SU_3 . C_2 есть константа, если операторы Q_μ, T_k реализуют неприводимое представление SU_3 . В этом случае имеем:

$$H|N, \lambda, \mu, K \ell m\rangle = [N\omega_0 - \chi C_2 + \chi \ell(\ell+1)]|N, \lambda, \mu, K \ell m\rangle. \quad (4)$$

Здесь (λ, μ) определяют неприводимое представление SU_3 ; число K и орбитальный момент меняются в пределах

$$\ell = K, K+1, \dots, \lambda \quad \text{при} \quad K \neq 0,$$

$$\ell = \lambda, \lambda-2, \dots, 0 \quad \text{или} \quad 1 \quad \text{при} \quad K=0,$$

(5)

$$K = \mu, \mu-2, \dots, 0 \quad \text{или} \quad 1.$$

(Мы выбрали для определенности $\lambda > \mu$). Оператор C_2 равен:

$$C_2 = 3Q_0^2 + 2Q_{-1}Q_1 + Q_{-2}Q_2 + T_0^2 + 2T_-T_+ + 4T_0. \quad (6)$$

Наконец, число N есть собственное значение $C_1 = x_k^2 - p_k^2$ - оператора Казимира первого порядка группы SU_3 . Заметим, что, являясь

элементом U_3 , C_1 не принадлежит обертывающей алгебре SU_3 .

Из (4) вытекает существование набора ротационных полосок при фиксированных (λ, μ) . Заметим, что соотношения (5), (6) содержат в явном виде предположение, что операторы Q_μ, T_k , даваемые соотношениями (2), реализуют самое общее представление SU_3 . То, что это не так, следует хотя бы из того, что функциональный базис произвольного представления SU_3 можно реализовать на единичной сфере минимум пяти измерений /4/, тогда как базис операторов (2) реализуется на трехмерной сфере. Таким образом, представление SU_3 посредством операторов (2) относится к вырожденной серии. Для этого представления квадратичный и кубичный операторы Казимира SU_3 являются рациональными функциями C_1 :

$$C_2 = \frac{1}{3} C_1^2 - 3,$$

$$C_3 = Q_2(Q_1^2 - T_1^2) + (Q_{-1}^2 - T_{-1}^2)Q_2 - 2Q_2 Q_0 Q_2 + 2Q_{-1} Q_0 Q_1 +$$

$$+ 2(Q_0^2 - T_0^2)Q_0 + 2(Q_{-1} T_0 T_1 + T_{-1} T_0 Q_1) + 2T_{-1} Q_0 T_1 -$$

$$- 8Q_0 T_0 + 4(T_{-1} Q_1 + Q_{-1} T_1) - 8Q_0 = -\frac{2}{9} C_1(C_1^2 - 9).$$

Легко видеть, что при редукции $SU_3 \rightarrow R_3$ неприводимое представление SU_3 , реализуемое операторами (2), содержит каждое значение ℓ точно один раз, то есть в этом случае данное неприводимое представление SU_3 содержит только одну ротационную полоску. Поэтому для получения нескольких ротационных полосок внутри данного мультиплетта SU_3 приходится отказаться от явного вида генераторов группы (2), сохранив в то же время коммутационные соотношения между ними.

3. Линеаризуем эллиптический гамильтониан (3), то есть заменим \vec{Q}^2 следующей комбинацией:

$$3q_0 Q_0 + q_1(Q_1 + Q_{-1}) + \frac{1}{2} q_2(Q_2 + Q_{-2}).$$

Ищем операторы $X(\omega)$, такие, что:

$$[H, X(\omega)] = \omega X(\omega). \quad (7)$$

Уравнение (7) имеет такие решения:

$$\omega = \pm \chi(\omega_1, \omega_2, \omega_3, 0),$$

$$\omega_1 = \sqrt{(3q_0 - q_2)^2 + q_1^2},$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} [4q_1^2 + 4q_2^2 + (3q_0 + q_2)^2 + 3(q_0 + q_2)\omega_1]^{1/2},$$

$$\omega_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} [4q_1^2 + 4q_2^2 + (3q_0 + q_2)^2 - 3(q_0 + q_2)\omega_1]^{1/2}.$$

Явный вид операторов $X(\omega)$ дан в приложении I. Вакуум определяем как собственный вектор линеаризованного гамильтониана с наименьшим собственным значением:

$$X(-|\omega|)|0\rangle = 0.$$

Волновая функция возбужденного состояния с энергией $n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + n_3\omega_3$ равна: $[X(\omega_1)]^{n_1} [X(\omega_2)]^{n_2} [X(\omega_3)]^{n_3}|0\rangle$. q_0, q_1, q_2 находим, потребовав, чтобы вакуум был собственной функцией H и двух операторов,

отвечающих нулевой частоте. Таким образом, линейризованный гамильтониан содержит три вибрационные моды с частотами $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и две независимые моды нулевой частоты. Столь сильное отличие спектров собственных частот полного и линейризованного гамильтонианов можно отнести за счёт следующих двух причин: а) метод линейризации не применим к модели Эллиота; б) существуют два базиса (один из них приближенный), таких, что в одном из них спектр частот гамильтониана есть чистый ротатор, а в другом - чистый вибратор.

4. Перечислим причины, по которым модель Эллиота нам кажется неудовлетворительной: а) отсутствие коллективных возбуждений неротационного типа; б) конечность ротационной полосы; в) для данного (λ_μ) мультиплет SU_3 уровни с одинаковыми значениями полного момента должны иметь одну и ту же энергию, что не согласуется с экспериментальной ситуацией; г) константы χ , вычисленные из относительного положения мультиплетов существенно различаются. Возможно, что положение в двух последних пунктах может быть частично исправлено в рамках SU_3 . Именно, в правую часть (3) добавим оператор, коммутирующий с операторами углового момента и сдвигающий ротационные полосы друг относительно друга:

$$Q_{-2} Q_1^2 + Q_{-1}^2 Q_2 - 2Q_{-2} Q_0 Q_2 + 2Q_{-1} Q_0 Q_1 + 2Q_0^3 + \\ + 3(Q_{-1} T_1 + T_{-1} Q_1) - 3Q_0 T_0 - 5Q_0. \quad (8)$$

В этом случае базисные векторы представления SU_3 при фиксированных (λ_μ) различаются собственными значениями операторов \vec{T}^2 ,

T_0 и оператора (8); процедура для вычисления собственных функций оператора (8) дана в /5/. Для эллиотских Q_μ собственные значения (8) равны:

$$\frac{1}{3} C_1 \ell(\ell+1).$$

С другой стороны, невозможно получить бесконечную ротационную полосу в рамках компактных групп.

5. Формальный путь получения бесконечной ротационной полосы состоит в том, чтобы заменить входящие в (3) инфинитезимальные генераторы SU_3 генераторами некомпактной группы, например, генераторами $SU(2,1)$. В этом случае при редукции $SU_3 \rightarrow R_3$ естественным образом возникают бесконечные ротационные полосы. Мы заинтересованы, однако, в том, чтобы проанализировать свойства симметрии стандартной расчётной модели /2,3/. Поэтому мы принимаем для квадрупольных операторов Q_μ обычное определение:

$$\hat{Q}_\mu = \sum a_i^+ a_j, \langle i | Q_\mu | j \rangle.$$

Здесь $|i\rangle$ - волновые функции сферически-симметричного осциллятора; Q_μ - составленные из декартовых координат компоненты тензора второго ранга с нулевым следом. В трехмерном случае нулевая компонента тензора равна:

$$Q_0 = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - z^2.$$

Нулевая компонента оператора квадрупольного момента имеет вид:

$$\hat{Q}_0 = \sum a_i^+ a_j, \langle i | Q_0 | j \rangle = (1, 0, 0) + (-1, 0, 0) + \\ + (0, 0, 2) + (0, 0, -2) + 2N - 2L + M.$$

Операторы (a, b, c) равны:

$$(1, 0, 0) = \sqrt{(\ell+1)(\ell+1+m)} a^+(\ell+1, m, n) a(\ell, m, n),$$

$$(0, 0, 2) = \sqrt{(n+1)(n+2)} a^+(\ell, m, n+2) a(\ell, m, n),$$

$$N = n a^+(\ell, m, n) a(\ell, m, n), \quad L = \ell a^+(\ell, m, n) a(\ell, m, n),$$

$$M = m a^+(\ell, m, n) a(\ell, m, n),$$

$$(abc)^+ = (-a, -b, -c)$$

(подразумевается суммирование по ℓ, m, n). Индексы $\ell m n$ различают собственные векторы в цилиндрической системе координат:

$$|\ell m n\rangle = \sqrt{\frac{\ell!}{2^n n! (\ell+m)!}} r^m \exp\left(-\frac{r^2+z^2}{2}\right) L_\ell^m(r^2) H_n(z) \exp(im\phi).$$

Цилиндрическая система координат выбрана исключительно из соображений удобства: \hat{Q}_μ выглядят в них достаточно просто, чтобы можно было убедиться в замкнутости генерируемой Q_μ, S_0 алгебры.

Явные выражения для Q_μ даны в приложении II. Некомпактность получаемой при этом алгебры следует хотя бы из того, что оператор S_0 , имея неограниченные собственные значения (так как он пропорционален осцилляторному гамильтониану), не коммутирует с Q_μ и потому должен входить в ту же, что и Q_μ , алгебру. Анализ коммутационных соотношений (табл. 2) показывает, что группа, генерируемая Q_μ, S_0 , изоморфна некомпактной группе $SO(6,1)$. В случае двумерного осциллятора соответствующей некомпактной группой оказывается

$SO(3,2)$ (табл. 3, приложение III). В обоих случаях мы приходим к гамильтониану, составленному из генераторов некомпактных групп:

$$H = \omega_0 S_0 - \chi \hat{Q}_\mu^+ \hat{Q}_\mu. \quad (9)$$

Поэтому, построив базис соответствующей некомпактной группы и диагонализовав (9), мы можем получить собственные значения H . Базис некомпактной группы получается из базиса соответствующей группы вращений методом, подобным использованному в [6]. При этом энергетический спектр гамильтониана содержит все угловые моменты, начиная с некоторого минимального ℓ_0 . Рассмотрение поведения [7] матричных элементов операторов Q_μ показывает, что при $\ell \gg 1$ доминирует последний член и спектр пропорционален ℓ^2 .

6. Заметим, что $SO(6,1)$ как группа инвариантности гамильтониана (9) должна содержать группу симметрии этого гамильтониана. С другой стороны, группа симметрии гамильтониана, описывающего вибрации обобщенной модели, изоморфна SU_5 [8]. Поскольку SU_5 невозможно вложить в $SO(6,1)$, то заключаем, что гамильтониан с обычным квадрупольным взаимодействием, но без спаривательного не содержит колебаний, описываемых обобщенной моделью.

Мы приходим, таким образом, к выводу, полученному ранее [9] С.Т.Беляевым совершенно иным путем: если общепринятая модель с парным и квадрупольным остаточными взаимодействиями вообще содержит вибрации обобщенной модели, то это есть результат конкуренции парной и квадрупольной сил. Имеется, однако, и контраргумент: в модели с пар-

ным и квадрупольным взаимодействиями, но без смешивания оболочек
вибраций нет ^{/10/}.

Автор благодарен проф. В.Г.Соловьеву за постоянное внимание
и интерес к работе, И.Н. Михайлову - за обсуждения.

Приложение

Операторы, отвечающие частотам ω_1 , ω_2 , ω_3 равны:

$$X(\omega_1) = T_+ - T_- - \frac{6q_1}{\omega_1} Q_0 + \frac{3q_0 - q_2}{\omega_1} (Q_1 + Q_{-1}) + \\ + \frac{q_1}{\omega_1} (Q_2 + Q_{-2}),$$

$$X(\omega_2) = T_0^+ (T_1 + T_{-1}) \frac{3q_0 - q_2 + \omega_1}{4q_1} + \\ + [q_1 + (3q_0 + q_2) \frac{3q_0 - q_2 + \omega_1}{4q_1}] \frac{Q_1 - Q_{-1}}{\omega_2} + \\ + [q_2 + \frac{3q_0 - q_2 + \omega_1}{4}] \frac{Q_2 - Q_{-2}}{\omega_2},$$

$$X(\omega_3) = T_0 + (T_1 + T_{-1}) \frac{3q_0 - q_2 - \omega_1}{4q_1} + \\ + [q_1 + (3q_0 + q_2) \frac{3q_0 - q_2 - \omega_1}{4q_1}] \frac{Q_1 - Q_{-1}}{\omega_3} + \\ + [q_2 + \frac{3q_0 - q_2 - \omega_1}{4}] \frac{Q_2 - Q_{-2}}{\omega_3}.$$

Нулевой частоте отвечают операторы, имеющие вид:

$$\nu_0 Q_0 + \nu_1 (Q_1 + Q_{-1}) + \nu_2 (Q_2 + Q_{-2}),$$

причем должно выполняться соотношение

$$\nu_0 q_1 = \nu_1 (3q_0 - q_2) + 2\nu_2 q_1.$$

Приложение II

$$Q_0 = (1, 0, 0) + (-1, 0, 0) + (0, 0, 2) + (0, 0, -2) + 2N - 2L + M,$$

$$Q_1 = (0, 1, 1) + (0, 1, -1) - (-1, 1, 1) - (-1, 1, -1),$$

$$Q_2 = (0, 2, 0) + (-2, 2, 0) - 2(-1, 2, 0),$$

$$Q_\mu^+ = Q_\mu, [Q_\mu, Q_\nu] = 0, [T_+, Q_0] = 3Q_1,$$

$$[T_-, Q_1] = Q_0, [T_0, Q_0] = 0, [T_+, Q_2] = 0,$$

$$[T_-, Q_{-2}] = 0, [T_+, Q_1] = Q_2, [T_-, Q_2] = 2Q_1,$$

$$T_+ = (0, 1, -1) + (-1, 1, -1),$$

$$T_- = (0, -1, 1) + (1, -1, -1).$$

Операторы (a, b, c) , входящие в $Q_{\pm 1}$, $Q_{\pm 2}$, равны:

$$(0, 1, -1) = \sqrt{n(\ell+m+1)} a^+(\ell, m+1, n-1) a(\ell mn),$$

$$(1, -1, -1) = \sqrt{n(\ell+1)} a^+(\ell+1, m-1, n-1) a(\ell mn),$$

$$(1, -2, 0) = \sqrt{(\ell+1)(\ell+m)} a^+(\ell+1, m-2, n) a(\ell mn),$$

$$(0, 1, 1) = \sqrt{(\ell+1)(\ell+m+1)} a^+(\ell, m+1, n+1) a(\ell mn),$$

$$(1, -1, 1) = \sqrt{(\ell+1)(n+1)} a^+(\ell+1, m-1, n+1) a(\ell mn),$$

$$(2, -2, 0) = \sqrt{(\ell+1)(\ell+2)} a^+(\ell+2, m-2, n) a(\ell mn),$$

$$(0, 2, 0) = \sqrt{(\ell+m+1)(\ell+m+2)} a^+(\ell, m+2, n) a(\ell mn).$$

Оператор S_0 имеет вид:

$$S_0 = \Sigma (2\ell + m + n + 1) a^+(\ell mn) a(\ell mn).$$

Операторы $L, M, N, (a, b, c)$ генерируют некомпактную группу $SO(6, 1)$ (табл. 2).

Приложение III

Оператор S_0 равен:

$$S_0 = (\ell + \frac{1}{2} M) a^+(\ell m) a(\ell m). \quad (3.1)$$

Оператор квадрупольного момента имеет две компоненты:

$$Q_1 = A_1^+ + A_2 - \sqrt{2} T_+, \quad Q_{-1} = A_1 + A_2^+ - \sqrt{2} T_-.$$

Здесь мы положили:

$$A_1^+ = \frac{1}{2} \sqrt{(\ell+m+1)(\ell+m+2)} a^+(\ell, m+2) a(\ell m),$$

$$A_2^+ = \frac{1}{2} \sqrt{\ell(\ell-1)} a^+(\ell-2, m+2) a(\ell, m),$$

$$T_+ = \sqrt{\frac{1}{2}} \ell(\ell+m+1) a^+(\ell-1, m+2) a(\ell, m),$$

(3.2)

$$A_1 = (A_1^+)^+, \quad A_2 = (A_2^+)^+, \quad T_- = (T_+)^+.$$

Для получения замкнутой алгебры операторы (3.1), (3.2) следует дополнить следующими:

$$T_0 = \frac{1}{2} m a^+(\ell m) a(\ell m),$$

(3.3)

$$A_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} \ell(\ell+m) a^+(\ell-1, m) a(\ell m),$$

$$A_0^+ = (A_0)^+.$$

Здесь (ℓm) классифицируют собственные функции двумерного осциллятора:

$$|\ell m\rangle = \sqrt{\frac{\ell!}{(\ell+m)!}} \exp(-\frac{1}{2} \rho^2) \rho^m L_\ell^m(\rho^2) \exp(i m \rho),$$

Операторы (3.1) - (3.3) генерируют некомпактную группу $SO(3, 2)$.

Л и т е р а т у р а

1. J.P.Elliot. Proc.Roy.Soc.(London), A245, 128 (1958).
2. V.G.Soloviev. Nucl.Phys., 69, 1 (1965).
3. R.A.Sorensen. Proc.Nucl.Structure, Dubna Symposium, 1968. IAEA, Vienna, 1968.
4. M.A.B.Beg, H.Ruegg. J.Math.Phys., 6, 677 (1965).
5. V.Bargmann, M.Moshinsky. Nucl.Phys., 23, 177 (1961).
6. I.G.Kurijan, N.Mukunda, E.C.G.Sudarschan. Commun.Math.Phys., 8, 204 (1968).
7. И.М.Гельфанд, Р.А.Минлос, З.Я.Шапиро. Представления группы вращений и группы Лоренца. Физматгиз, Москва, 1958.
8. G.Rakavy. Nucl.Phys., 4, 289 (1957).
9. S.T.Belyaev. Mat.Fys.Vid.Selsk., 31, No 11 (1959).
10. H.Lipkin. Nucl.Phys., 4, 289 (1957).

Рукопись поступила в издательский отдел
17 декабря 1969 года.

Таблица 1

[X, Y]

X \ Y	T_0	T_1	T_{-1}	Q_0	Q_1	Q_{-1}	Q_2	Q_{-2}
T_0	0	T_1	$-T_{-1}$	0	Q_1	$-Q_{-1}$	$2Q_2$	$-2Q_{-2}$
T_1	$-T_{-1}$	0	T_0	Q_1	Q_2	$-3Q_0$	0	$-2Q_{-1}$
T_{-1}	T_1	$-T_0$	0	$-Q_{-1}$	$3Q_0$	$-Q_{-2}$	$2Q_1$	0
Q_0	0	$-Q_1$	Q_{-1}	0	$-T_1$	T_{-1}	0	0
Q_1	$-Q_{-1}$	$-Q_2$	$-3Q_0$	T_1	0	T_0	0	$2T_{-1}$
Q_{-1}	Q_{-1}	$3Q_0$	Q_{-2}	$-T_{-1}$	$-T_0$	0	$-2T_1$	0
Q_2	$-2Q_{-2}$	0	$-2Q_1$	0	0	$2T_1$	0	$4T_0$
Q_{-2}	$2Q_{-2}$	$2Q_{-1}$	0	0	$-2T_{-1}$	0	$-4T_0$	0

Таблица 2 (начало)

[X, Y]

X \ Y	M	(-1, 2, 0)	(1, -2, 0)	L-N	(0, 1, -1)	(0, -1, 1)	(1, -1, -1)	(-1, 1, 1)
M	0	2(-1, 2, 0)	-2(1, -2, 0)	0	1(0, 1, -1)	-(0, -1, 1)	-(1, -1, -1)	(-1, 1, 1)
(-1, 2, 0)	-2(-1, 2, 0)	0	M	(-1, 2, 0)	0	-(-1, 1, 1)	1(0, 1, -1)	0
(1, -2, 0)	2(1, -2, 0)	-M	0	-(1, -2, 0)	1(1, -1, -1)	0	0	-(0, -1, 1)
L-N	0	-(-1, 2, 0)	(1, -2, 0)	0	1(0, 1, -1)	-(0, -1, 1)	2(1, -1, -1)	-2(-1, 1, 1)
(0, 1, -1)	-(0, 1, -1)	0	-(1, -1, -1)	-(0, 1, -1)	0	L+M-N	0	(-1, 2, 0)
(0, -1, 1)	(0, -1, 1)	(-1, 1, 1)	0	(0, -1, 1)	N-M-L	0	-(1, -2, 0)	0
(1, -1, -1)	(1, -1, -1)	-(0, 1, -1)	0	-2(1, -1, -1)	0	(1, -2, 0)	0	L-N
(-1, 1, 1)	-(-1, 1, 1)	0	(0, -1, 1)	2(-1, 1, 1)	-(-1, 2, 0)	0	N-L	0

18

Таблица 2 (продолжение)

	(0, 1, 1)	(0, -1, -1)	(0, 2, 0)	(0, -2, 0)	1(0, 0, 2)	1(0, 0, -2)	(1, -1, 1)	(-1, 1, -1)	1(1, 0, 0)	(-1, 0, 0)	2(2, -2, 0)	(-2, 2, 0)	L
M	(0, 1, 1)	-(0, -1, -1)	2(0, 2, 0)	-2(0, -2, 0)	0	0	-(1, -1, 1)	(-1, 1, -1)	0	0	-2(2, -2, 0)	2(-2, 2, 0)	0
(-1, 2, 0)	0	-(-1, 1, -1)	0	-2(-1, 0, 0)	0	0	(0, 1, 1)	0	1(0, 2, 0)	-1(-2, 2, 0)	2(1, 0, 0)	0	1(-1, 2, 0)
(1, -2, 0)	(1, -1, 1)	0	2(1, 0, 0)	0	0	0	-(0, -1, -1)	2(-2, -2, 0)	1(2, -2, 0)	-(0, -2, 0)	0	-2(-1, 0, 0)	-(1, -2, 0)
L-N	-1(0, 1, 1)	(0, -1, -1)	0	0	-2(0, 0, 2)	2(0, 0, -2)	0	0	1(1, 0, 0)	-1(-1, 0, 0)	2(2, -2, 0)	-2(-2, 2, 0)	0
(0, 1, -1)	(0, 2, 0)	-(0, 0, -2)	2(0, 1, 1)	-2(0, -1, -1)	2(0, 1, 1)	0	1(1, 0, 0)	0	0	-(-1, 1, -1)	0	0	0
(0, -1, 1)	(0, 0, 2)	-(0, -2, 0)	0	0	0	-2(0, -1, -1)	0	-(-1, 0, 0)	1(1, -1, 1)	0	0	0	0
(1, -1, -1)	1(1, 0, 0)	0	0	0	2(1, -1, 1)	0	2(-2, -2, 0)	-1(0, 0, -2)	0	-(0, -1, -1)	0	-2(-1, 1, -1)	-(1, -1, -1)
(-1, 1, 1)	0	-(-1, 0, 0)	0	0	0	-2(-1, 1, -1)	1(0, 0, 2)	-1(-2, 2, 0)	1(0, 1, 1)	0	2(1, -1, 1)	0	(-1, 1, 1)

18

Таблица 2 (окончание)

[X, Y]

X \ Y	(0,1,1)	(0,-1,-1)	(0,2,0)	(0,-2,0)	(0,0,2)	(0,0,-2)	(1,-1,1)	(-1,1,-1)	(1,0,0)	(-1,0,0)	(2,-2,0)	(-2,2,0)	L
(0,1,1)	0	-(L+M+N+1)	0	-2(0,-1,1)	0	-2(0,1,-1)	0	-1(-2,0)	0	-(-1,1,1)	0	0	0
(0,-1,-1)	L+M+N+1	0	2(0,1,-1)	0	2(0,-1,1)	0	(1,-2,0)	0	(1,-1,-1)	0	0	0	0
(0,2,0)	0	-2(0,1,-1)	0	-2(2L+M+1)	0	0	0	0	0	-2(-1,2,0)	0	0	0
(0,-2,0)	2(0,-1,1)	0	2(2L+M+1)	0	0	0	0	0	2(1,-2,0)	0	0	0	0
(0,0,2)	0	-2(0,-1,1)	0	0	0	0	0	-2(-1,1,1)	0	0	0	0	0
(0,0,-2)	2(0,1,-1)	0	0	0	0	0	2(1,-1,-1)	0	0	0	0	0	0
(1,-1,1)	0	-1(-2,0)	0	0	0	-2(1,-1,-1)	0	-(N+L+1)	0	(0,-1,1)	0	-2(-1,1,1)	-(L-1,1)
(-1,1,-1)	(-1,2,0)	0	0	0	2(-1,1,1)	0	N+L+1	0	+(0,1,-1)	0	2(1,-1,1)	0	(-1,1,-1)
(1,0,0)	0	-1(-1,-1)	0	-2(1,-2,0)	0	0	0	-1(0,1,-1)	0	-(2L+M+1)	0	-2(-1,2,0)	-(1,0,0)
(-1,0,0)	(-1,1,1)	0	2(-1,2,0)	0	0	0	+(0,-1,1)	0	2L+M+1	0	2(1,-2,0)	0	(-1,0,0)
(2,-2,0)	0	0	0	0	0	0	0	-2(1,-1,-1)	0	-2(1,-2,0)	0	-2(2L+1)	-2(2,-2,0)
(-2,2,0)	0	0	0	0	0	0	2(-1,1,1)	0	2(-1,2,0)	0	2(2L+1)	0	2(-2,2,0)
L	0	0	0	0	0	0	(1,-1,1)	(-1,1,-1)	(1,0,0)	(-1,0,0)	2(2,-2,0)	-2(-2,2,0)	0

Таблица 3

[X, Y]

X \ Y	S ₀	T ₀	A ₁ ⁺	A ₂	T ₊	A ₁	A ₂ ⁺	T ₋	A ₀ ⁺	A ₀
S ₀	0	0	A ₁ ⁺	-A ₂	0	-A ₁	A ₂ ⁺	0	A ₀ ⁺	-A ₀
T ₀	0	0	A ₁ ⁺	A ₂	T ₊	-A ₁	-A ₂ ⁺	-T ₋	0	0
A ₁ ⁺	-A ₁ ⁺	-A ₁ ⁺	0	0	0	-S ₀ -T ₀	0	-A ₀ ⁺	0	-T ₊
A ₂	A ₂	-A ₂	0	0	0	0	S ₀ -T ₀	A ₀	T ₊	0
T ₊	0	-T ₊	0	0	0	-A ₀	A ₀ ⁺	T ₀	A ₁ ⁺	-A ₂
A ₁	A ₁	A ₁	S ₀ +T ₀	0	A ₀	0	0	0	T ₋	0
A ₂ ⁺	-A ₂ ⁺	A ₂ ⁺	0	T ₀ -S ₀	-A ₀ ⁺	0	0	0	0	-T ₋
T ₋	0	T ₋	A ₀ ⁺	-A ₀	-T ₀	0	0	0	A ₂ ⁺	-A ₁
A ₀ ⁺	-A ₀ ⁺	0	0	-T ₊	-A ₁ ⁺	-T ₋	0	-A ₂ ⁺	0	-S ₀
A ₀	A ₀	0	T ₊	0	A ₂	0	T ₋	A ₁	S ₀	0