ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4 - 4814

А.Н. Квинихидзе , Д.Ц. Стоянов

К ВОПРОСУ О РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ И ПРЕДСТАВЛЕНИИ ТИПА ГЛАУБЕРА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

P4 - 4814

А.Н. Квинихидзе*, Д.Ц. Стоянов

К ВОПРОСУ О РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ И ПРЕДСТАВЛЕНИИ ТИПА ГЛАУБЕРА

Направлено в "Журнал теоретической и математической физики"

*Тбилисский государственный университет.

Введение

Квазипотенциальный метод для системы двух релятивистских частиц, развитый Логуновым и Тавхелидзе [1], успешно использовался при объяснении спектра масс, связанных состояний, при исследовании аналитических и асимптотических свойств амплитуд рассеяния [2], при достижении единого описания высокоэнергетического поведения амплитуды рассеяния на малые и большие углы [3]. Достоинство квазипотенциального метода определяется тем, что в отличие от формализма Бете-Солпитера в нем отсутствует лишенное физического смысла и вносящее математические трудности относительное время.

В связи с этим представляет определенный интерес исключить относительные времена в релятивистской задаче трех тел. Эта проблема рассматривалась в различных подходах рядом авторов [4-6]. В работе [7] были выведены релятивистски-ковариантные уравнения для волновой функции трех частиц на основе квазипотенциального метода квантовой теории поля. Но там не было дано явное разделение всевозможных трехчастичных процессов, вследствие чего интегральные уравнения, выписанные в этой работе, не имеют однозначного решения. Поэтому представляет интерес при выводе квазипотенциальных уравнений для трех частиц пользоваться методами разделения процессов, применяемыми ранее и приводящими к уравнениям типа Фаддеева и Лавлеса.

В настоящей работе развит трехмерный формализм для релятивистской задачи трех частиц на основе двухвременной функции Грина. Показано, что в приближении, аналогичном парному взаимодействию, ядра полученных уравнений содержат только квазипотенциальные величины.

В последнее время подвергаются интенсивному теоретическому исследованию процессы рассеяния адронов при высоких энергиях. Основные экспериментальные закономерности рассеяния частиц высоких энергий позволяют привлечь к их описанию методы, близкие эйкональному приближению, известному в нерелятивистской квантовой механике /8/. Представление типа Глаубера для двухчастичных амплитуд широко обсуждается в последнее время в рамках квантовой теории поля /3,9-11/. Представляет интерес получение аналогичных представлений для многочастичных амплитуд.

Ниже, на основе полученных нами уравнений, выводится формула типа Глаубера для релятивистского рассеяния элементарной частицы на связанном состоянии, совпадающая в нерелятивистском пределе с результатом /13/, полученным в рамках уравнения Фаддеева.

В §1 дается вывод уравнения для двухвременной трехчастичной функции Грина.

В §2 вводятся операторы, которые, будучи усреднены по одновременным релятивистским волновым функциям, на массовой поверхности совпадают с физическими T-матрицами всевозможных трехчастичных переходов.

В §3 рассматривается высокоэнергетическое упругое рассеяние на малые углы на слабосвязанной системе и получена формула типа Глаубера.

§1. Уравнение для двухвременной функции Грина

Выпишем обозначения, использованные в работе /12/.

m_i – масса i -ой частицы,

x_i – 4-координата i -ой частицы,

p_i – 4-импульс i -ой частицы.

Тогда координаты i -ой системы Якоби имеют вид:

$$X = \frac{m_i x_i + m_k x_k + m_\ell x_\ell}{M},$$

$$\tilde{x}_i = \frac{m_k x_k + m_\ell x_\ell}{m_{ke}} - x_i, \tag{1.1}$$

$$\bar{x}_i = x_k - x_e,$$

где $M = m_1 + m_2 + m_3$, $m_{k\ell} = m_k + m_\ell$, (i, k, ℓ) представляет четную перестановку от (1,2,3).

Соответствующие сопряженные 4-импульсы обозначим через P, $\tilde{p}_i$, $\bar{p}_i$,

$$X_i = \frac{m_k x_k + m_\ell x_\ell}{m_{k\ell}},$$

$$P_i = p_k + p_\ell. \tag{1.2}$$

Рассмотрим уравнение Бете-Солпитера для трехчастичной функции Грина $G(x,y) = \langle 0 | T(\Psi_1(x_1)\Psi_2(x_2)\Psi_3(x_3)\bar{\Psi}_1(y_1)\bar{\Psi}_2(y_2)\bar{\Psi}_3(y_3)|0\rangle$, записанное в операторной форме

$$G = G_0 + G_0 K G. \tag{1.3}$$

G_0 -функция распространения трех невзаимодействующих частиц.

К - сумма всех неприводимых трехчастичных диаграмм. Выведем уравнение для двухвременной функции Грина $\tilde{\tilde{G}}$, определенной следующим образом:

$$\tilde{\tilde{G}}(X-Y;\vec{\tilde{x}}.\vec{\bar{x}};\vec{\tilde{y}}\,\vec{\bar{y}}) = G(X-Y;\tilde{x}\,\bar{x};\;\tilde{y}\,\bar{y})_{\tilde{y}^0=\bar{y}^0=\tilde{x}^0=\bar{x}^0=0} \quad (1.4)$$

В дальнейшем значок ≈ будет означать операцию приравнивания времен указанным в равенстве (1.4) способом.

Введем фурье-образы функции Грина:

$$G(X-Y;\tilde{x},\bar{x};\tilde{y},\bar{y};)=(2\pi)^{-12}\int e^{i[P(X-Y)+\tilde{p}\tilde{x}+\bar{p}\bar{x}-\tilde{q}\tilde{y}-\bar{q}\bar{y}]}(dp)(dq)G(P\tilde{p}\bar{p}\tilde{q}\bar{q}),$$

$$\tilde{\tilde{G}}(X-Y;\vec{\tilde{x}},\vec{\bar{x}};\vec{\tilde{y}}\,\vec{\bar{y}})=(2\pi)^{-12}\int e^{i[P(X-Y)-\vec{\tilde{p}}\vec{\tilde{x}}-\vec{\bar{p}}\vec{\bar{x}}+\vec{\tilde{q}}\vec{\tilde{y}}+\vec{\bar{q}}\vec{\bar{y}}]}(d\vec{p})(d\vec{q})\tilde{\tilde{G}}(P\,\vec{\tilde{p}}\vec{\bar{p}}\,\vec{\tilde{q}}\vec{\bar{q}}). \quad (1.5)$$

Тогда операция приравнивания времен в импульсном пространстве будет означать интегрирование по относительным энергиям, т.е.:

$$\tilde{\tilde{G}}(P\;\tilde{p},\bar{p};\tilde{q},\bar{q})=\int G(P;\tilde{p},\bar{p};\tilde{q},\bar{q})\,d\tilde{p}_0\,d\bar{p}_0\,d\tilde{q}_0\,d\bar{q}_0\;. \quad (1.6)$$

Применим эту операцию к уравнению (1.3):

$$\tilde{\tilde{G}} = \tilde{\tilde{G}}_0 + \widetilde{\widetilde{G_0 K\; G}}\;. \quad (1.7)$$

Если определим оператор $\tilde{\tilde{K}}$ равенством

$$\tilde{\tilde{G}}_0 \tilde{\tilde{K}} \tilde{\tilde{G}} = \widetilde{\widetilde{G_0 K G}} , \qquad (1.8)$$

для $\tilde{\tilde{G}}$ получим уравнение

$$\tilde{\tilde{G}} = \tilde{\tilde{G}}_0 + \tilde{\tilde{G}}_0 \tilde{\tilde{K}} \tilde{\tilde{G}} . \qquad (1.9)$$

Как известно, ядро K представимо в виде

$$K = K_1 + K_2 + K_3 + K_T , \qquad (1.10)$$

где K_i есть сумма всех неприводимых несвязных диаграмм, когда i -ая частица проходит свободно, K_T - сумма всех неприводимых связных диаграмм [13]. Таким образом,

$$K_i (x_i, x_k, x_\ell ; y_i, y_k, y_\ell) = S_i^{-1} (x_i - y_i) K_i^{(2)} (x_k, x_\ell; y_k, y_\ell),$$

где $S_i (x_i - y_i)$ -пропагатор i -ой частицы, $K_i^{(2)}$ - ядро уравнения Бете-Солпитера для двухчастичной функции распространения $G^{(2)}(x_k, x_\ell; y_k, y_\ell)$ частиц k и ℓ . Для удобства введем обозначение :

$$G_i (x_i x_k x_\ell y_i y_k y_\ell) = S_i (x_i - y_i) G_i^{(2)} (x_k, x_\ell; y_k, y_\ell) \qquad (1.11)$$

Нетрудно убедиться в том, что аналогично соотношению (1.9) будем иметь

$$\tilde{\tilde{K}} = \tilde{\tilde{K}}_1 + \tilde{\tilde{K}}_2 + \tilde{\tilde{K}}_3 + \tilde{\tilde{K}}_T , \qquad (1.12)$$

где $\tilde{K}_i$ определяется равенством

$$\tilde{\tilde{G}}_i = \tilde{\tilde{G}}_0 + \tilde{\tilde{G}}_0 \tilde{\tilde{K}}_i \tilde{\tilde{G}}_i \ . \qquad (1.13)$$

Используя определение (1.8) для представления $\tilde{\tilde{K}}$ в виде итерационного ряда по K, можно легко показать, что K_i содержит все члены, входящие в $\tilde{\tilde{K}}$ и сохраняющие импульс i -ой частицы. К тому же ниже будет показано, что $\tilde{\tilde{K}}_i$ можно выразить через двухчастичный квазипотенциал взаимодействия k -ой и ℓ -ой частиц. Ясно, что в приближении парного взаимодействия $\tilde{\tilde{K}} \neq \tilde{\tilde{K}}_1 + \tilde{\tilde{K}}_2 + \tilde{\tilde{K}}_3$, поэтому приближение $\tilde{\tilde{K}} = \tilde{\tilde{K}}_1 + \tilde{\tilde{K}}_2 + \tilde{\tilde{K}}_3$ в дальнейшем будем называть квазипарным.

Теперь выпишем связь величин $\tilde{G}_i$, $\tilde{\tilde{K}}_i$ и $\tilde{\tilde{T}}_i$ с квазипотенциальными. Для этого понадобятся следующие обозначения:

$$\tilde{G}_i^{(2)}(X_i - Y_i ; \vec{x}_i, \vec{y}_i) = G_i^{(2)}(X_i - Y_i ; \bar{x}_i, \bar{y}_i)_{\bar{x}_i^0 = \bar{y}_i^0 = 0} \ .$$

$\widetilde{K}_i^{(2)}(P_i ; \vec{p}_i, \vec{q}_i)$ – двухчастичный квазипотенциал взаимодействия k -ой и ℓ -ой частиц. $\widetilde{T}_i^{(2)}(P_i ; \vec{p}_i, \vec{q}_i)$ – двухчастичная квазипотенциальная матрица рассеяния.

Тогда нетрудно видеть, что

$$\tilde{\tilde{G}}_i (P; \vec{\tilde{p}}_i \vec{\bar{p}}_i; \vec{\tilde{q}}_i \vec{\bar{q}}_i) = \delta(\vec{\tilde{p}}_i - \vec{\tilde{q}}_i) \int d\tilde{p}_i^0 S_i(\frac{m_i}{M}P - \tilde{p}_i)\tilde{G}_i^{(2)}(\frac{m_k}{M}P + \tilde{p}_i ; \vec{\bar{p}}_i \vec{\bar{q}}_i) . \qquad (1.14)$$

Из определения для $\tilde{\tilde{K}}_i$ имеем (см. приложение А)

$$\tilde{\tilde{K}}_i (P_i ; \vec{\tilde{p}}_i, \vec{\bar{p}}_i; \vec{\tilde{q}}_i, \vec{\bar{q}}_i) = \delta(\vec{\tilde{p}}_i - \vec{\tilde{q}}_i) \{ \tilde{\tilde{G}}_0^{-1} (P \vec{\tilde{p}} \vec{\bar{p}}) \delta(\vec{\bar{p}}_i - \vec{\bar{q}}_i) -$$

$$- [\int d\tilde{p}_i^0 S_i(\frac{m_i}{M}P - \tilde{p}_i)\tilde{G}_{10}^{(2)} \sum_n (\tilde{K}_1^{(2)}\tilde{G}_{10}^{(2)})^n (\frac{m_k}{M}P + \tilde{p}_i ; \vec{\bar{p}}_i \vec{\bar{q}}_i)]^{-1} \} . \qquad (1.15)$$

Здесь под выражением $[\ldots]^{-1}$ понимается ядро оператора, обратного тому оператору, ядро которого заключено в квадратные скобки.

Оператор $\tilde{\tilde{T}}_i$, определенный равенством

$$\tilde{\tilde{G}}_i = \tilde{\tilde{G}}_0 + \tilde{\tilde{G}}_0 \tilde{\tilde{T}}_i \tilde{\tilde{G}}_0 , \tag{1.16}$$

связан с $\tilde{T}_i^{(2)}$ следующим образом:

$$\tilde{\tilde{T}}_i (P\ \vec{\tilde{p}}_i \vec{\bar{p}}_i\ \vec{\tilde{q}}_i \vec{\bar{q}}_i) = \delta(\vec{\tilde{p}}_i - \vec{\tilde{q}}_i)\ \tilde{\tilde{G}}_0^{-1}(P\ \vec{\tilde{p}}_i \vec{\bar{p}}_i)\{\int d\tilde{p}_i^0\, S_i(\frac{m_i}{M} P - \tilde{p}_i) \times$$

$$\times \tilde{G}_{i0}^{(2)}(\frac{m_{jk}}{M} P + \tilde{p}_i, \vec{\bar{p}}_i)\ \tilde{T}_i^{(2)}(\frac{m_{jk}}{M} P + \tilde{p}_i;\ \vec{\bar{p}}_i \vec{\bar{q}}_i) \times \tag{1.17}$$

$$\times \tilde{G}_{i0}^{(2)}(\frac{m_{jk}}{M} P + \tilde{p}_i, \vec{\bar{q}}_i)\}\ \tilde{\tilde{G}}_0^{-1}(P, \vec{\tilde{q}}_i, \vec{\bar{q}}_i) .$$

Подобно трехчастичным уравнениям Фаддеева в квазипарном приближении могут быть построены уравнения, в ядра которых будут входить не $\tilde{K}_i^{(2)}$, а $\tilde{T}_i^{(2)}$. Как видно из сравнения выражений (1.15) и (1.17), зависимость таких уравнений от $\tilde{T}_i^{(2)}$ будет проще, чем зависимость уравнения (1.8) от $\tilde{K}_i^{(2)}$. Запишем соотношение (1.8) в квазипарном приближении:

$$\tilde{\tilde{G}} = \tilde{\tilde{G}}_0 + \sum_{i=1}^{3} \tilde{\tilde{G}}_0 \tilde{\tilde{K}}_i \tilde{\tilde{G}} . \tag{1.18}$$

Если ввести обозначение $g_i = G_0\ K_i\ G$, то

$$\tilde{\tilde{G}} = \tilde{\tilde{G}}_0 + \sum_{i=1}^{3} g_i . \tag{1.19}$$

Используя определение (1.12), уравнение (1.19) можно преобразовать к виду

$$\tilde{\tilde{G}} = \tilde{\tilde{G}}_1 + \tilde{\tilde{G}}_1 \sum_{k\neq 1} \tilde{\tilde{K}}_k \tilde{\tilde{G}} . \tag{1.20}$$

Тогда

$$g_1 = \tilde{\tilde{G}}_0 \tilde{\tilde{K}}_1 \tilde{\tilde{G}}_1 + \tilde{\tilde{G}}_0 \tilde{\tilde{K}}_1 \tilde{\tilde{G}}_1 \sum_{k\neq 1} \tilde{\tilde{K}}_k \tilde{\tilde{G}} . \tag{1.21}$$

Из сравнения выражений (1.12) и (1.16) видно, что

$$\tilde{\tilde{G}}_0 \tilde{\tilde{T}}_1 \tilde{\tilde{G}}_0 = \tilde{\tilde{G}}_0 \tilde{\tilde{K}}_1 \tilde{\tilde{G}}_1 . \tag{1.22}$$

Используя равенство (1.22) в соотношении (1.21), получим искомое уравнение :

$$g_1(P_1 ; \vec{\tilde{p}}_1 \vec{\bar{p}}_1 ; \vec{\tilde{q}}_1 \vec{\bar{q}}_1) = \tilde{\tilde{G}}_0 \tilde{\tilde{T}}_1 \tilde{\tilde{G}}_0(P ; \vec{\tilde{p}}_1 \vec{\bar{p}}_1 ; \vec{\tilde{q}}_1 \vec{\bar{q}}_1) +$$

$$+ \sum_{k\neq 1} \int \tilde{\tilde{G}}_0 T_1 (P; \vec{\tilde{p}}_1 \vec{\bar{p}}_1 ; \vec{\tilde{k}}_1 \vec{\bar{k}}_1) \, d\vec{\tilde{k}}_1 \, d\vec{\bar{k}}_1 \, g_k (P; \vec{\tilde{k}}_1 \vec{\bar{k}}_1 ; \vec{\tilde{q}}_1 \vec{\bar{q}}_1) . \tag{1.23}$$

Для наглядности уравнение (1.23) запишем в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \tilde{\tilde{G}}_0 \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{T}}_1 \\ \tilde{\tilde{T}}_2 \\ \tilde{\tilde{T}}_3 \end{pmatrix} \tilde{\tilde{G}}_0 + \tilde{\tilde{G}}_0 \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\tilde{T}}_1 & \tilde{\tilde{T}}_1 \\ \tilde{\tilde{T}}_2 & 0 & \tilde{\tilde{T}}_2 \\ \tilde{\tilde{T}}_3 & \tilde{\tilde{T}}_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} . \tag{1.24}$$

В случае скалярных частиц /7/

$$\tilde{\tilde{G}}_0 (P;\vec{\tilde{p}}_i \vec{\bar{p}}_i;\ \vec{\tilde{q}}_i \vec{\bar{q}}_i) = \delta(\vec{\tilde{p}}_i - \vec{\tilde{q}}_i)\ \delta(\vec{\bar{p}}_i - \vec{\bar{q}}_i)\ \tilde{\tilde{G}}_0 (P\ \vec{\tilde{p}}_i\ \vec{\bar{p}}_i),$$

$$\tilde{\tilde{G}}_0 (P\ \vec{\tilde{p}}_i\ \vec{\bar{p}}_i) = -\pi^2 \frac{E_i + E_j + E_k}{E_i E_j E_k [P_0^2 - (E_i + E_j + E_k)^2 + i\epsilon]}, \tag{1.25}$$

где $E_i = \sqrt{\vec{p}_i^{\,2} + m_i^2}$ – энергия i –ой частицы.

Полезно отметить, что если, например, начальные импульсы лежат на массовой поверхности

$$P_0 = E_i(\vec{\tilde{p}}_i) + E_j(\vec{\tilde{p}}_i\ \vec{\bar{p}}_i) + E_k(\vec{\tilde{p}}_i\ \vec{\bar{p}}_i) = E(\vec{\tilde{p}}_i\ \vec{\bar{p}}_i), \tag{1.26}$$

то

$$\tilde{\tilde{T}}_i (P;\vec{\tilde{p}}_i \vec{\bar{p}}_i;\ \vec{\tilde{q}}_i \vec{\bar{q}}_i) = \delta(\vec{\tilde{p}}_i - \vec{\tilde{q}}_i)\ \frac{1}{\pi} E_i(\vec{\tilde{p}}_i)\ \frac{E(\vec{\tilde{p}}\ \vec{\bar{p}}) + E(\vec{\tilde{p}}\ \vec{\bar{q}})}{E(\vec{\bar{p}}\ \vec{\bar{q}})} \times$$

$$\times \frac{E_j(\vec{\tilde{p}}\ \vec{\bar{q}}) + E_k(\vec{\tilde{p}}\ \vec{\bar{q}})}{E_j(\vec{p}\vec{\bar{q}}) + E_k(\vec{\bar{p}}\vec{\bar{q}}) + E_j(\vec{\bar{p}}\vec{p}) + E_k(\vec{\bar{p}}\ \vec{p})} \tilde{T}_i^{(2)} (P_i;\ \vec{\bar{p}}_i, \vec{\bar{q}}_i). \tag{1.27}$$

Здесь $\vec{P} = 0$,

$$P_i = \begin{matrix} P_0 - \sqrt{\vec{\tilde{p}}_i^{\,2} + m_i^2}, \\ \frac{m_{kj}}{M}\vec{P} + \vec{\tilde{p}}. \end{matrix} \tag{1.28}$$

Разумеется, аналогичное соотношение имеется и в случае, если конечные импульсы лежат на массовой поверхности $P_0 = E(\vec{\tilde{p}}_i\ \vec{\tilde{q}}_i)$. Если же и начальные, и конечные импульсы удовлетворяют соотношению (1.26), то равенство (1.27) принимает вид

$$\tilde{\tilde{T}}_1 (P_1\ \vec{\tilde{p}}_1 \vec{\bar{p}}_1;\ \vec{\tilde{q}}_1 \vec{\bar{q}}_1) = \delta(\vec{\tilde{p}}_1 - \vec{\tilde{q}}_1)\ \frac{i}{\pi}\ \sqrt{m_1^2 + \vec{\tilde{p}}_1^{\,2}}\ \tilde{T}_1^{(2)} (P_1\ \vec{\bar{p}}_1\ \vec{\bar{q}}_1)\ . \qquad (1.29)$$

§2. Операторы перехода и амплитуды рассеяния

В работе /13/ исследуются операторы M_{ab}, через которые выражаются матричные элементы S -матрицы для различных трехчастичных процессов. Матричные элементы амплитуды рассеяния имеют вид

$$T_{ab} = \int \Psi^{+(a)}(X\ \tilde{x}_a \bar{x}_a)\ M_{ab}(X-Y;\ \tilde{x}_a \bar{x}_a;\ \tilde{y}_b \bar{y}_b)\ \Psi^{(b)}(Y\ y_b\ y_b)\,(dx)\,(dy)\ , \qquad (2.1)$$

где $\Psi^{(a)}(X\ \tilde{x}_a\ \bar{x}_a)$ – волновая функция состояния (a). Введем операторы $\tilde{\tilde{M}}_{ab}(X-Y;\ \vec{\tilde{x}}_a \vec{\bar{x}}_a;\ \vec{\tilde{y}}_b\ \vec{\bar{y}}_b)$ с помощью соотношения

$$\widetilde{G_a\ M_{ab}\ G_b} = \tilde{\tilde{G}}_a\ \tilde{\tilde{M}}_{ab}\ \tilde{\tilde{G}}_b\ . \qquad (2.2)$$

В этом случае, как показано в приложении В, величина

$$\tilde{\tilde{T}}_{ab} = \int \tilde{\tilde{\Psi}}^{+(a)}(X \vec{\tilde{x}}_a \vec{\bar{x}}_a)\,dX\, d\vec{\tilde{x}}_a d\vec{\bar{x}}_a\, \tilde{M}_{ab}(X-Y;\ \vec{\tilde{x}}_a \vec{\bar{x}}_a;\ \vec{\tilde{y}}_b \vec{\bar{y}}_b)\,dY\, d\vec{\tilde{y}}_b\, d\vec{\bar{y}}_b\, \tilde{\tilde{\Psi}}(Y\ \tilde{y}_b \bar{y}_b) \qquad (2.3)$$

совпадает на массовой поверхности с T_{ab}, т.е. с физической амплитудой рассеяния.

Здесь

$$\tilde{\tilde{\psi}}^{(\alpha)}(X\ \vec{\tilde{x}}_\alpha\ \vec{\bar{x}}_\alpha) = \begin{cases} \ell^{\,i(PX - \vec{\tilde{p}}_\alpha \vec{\tilde{x}}_\alpha - \vec{\bar{p}}_\alpha \vec{\bar{x}}_\alpha)}, \\ \ell^{\,i(PX - \vec{\tilde{p}}_\alpha \vec{\tilde{x}}_\alpha)} \tilde{Y}_\alpha(\vec{\bar{x}}_\alpha) . \end{cases} \tag{2.4}$$

$\tilde{Y}_\alpha(\vec{\bar{x}}_\alpha)$ – квазипотенциальная волновая функция связанного состояния двух частиц.

В работе /13/ показано, что

$$M_{ab} = G_\alpha^{-1}(G - G_\alpha)\, G_b^{-1} . \tag{2.5}$$

Тогда, используя (2.2), имеем

$$\tilde{\tilde{M}}_{ab} = \tilde{\tilde{G}}_\alpha^{-1} \tilde{\tilde{G}}\, \tilde{\tilde{G}}_b^{-1} - \tilde{\tilde{G}}_b^{-1} , \tag{2.6}$$

$$\tilde{\tilde{M}}_{ab} = (\tilde{\tilde{K}} - \tilde{\tilde{K}}_\alpha) + (\tilde{\tilde{K}} - \tilde{\tilde{K}}_\alpha)\, \tilde{\tilde{G}}\, (\tilde{\tilde{K}} - \tilde{\tilde{K}}_b) . \tag{2.7}$$

Отсюда в квазипарном приближении для $\tilde{\tilde{G}}$ нетрудно получить следующее уравнение:

$$M_{ab}(P;\vec{\tilde{p}}_\alpha\, \vec{\bar{p}}_\alpha;\ \tilde{q}_b \bar{q}_b) = \sum_{l \neq \alpha} \tilde{\tilde{K}}_l(P_l\ \vec{\tilde{p}}_\alpha \vec{\bar{p}}_\alpha;\ \vec{\tilde{q}}_b \vec{\bar{q}}_b) +$$

$$+ \sum_{m \neq b} \int M_{am}(P;\vec{\tilde{p}}_\alpha\, \vec{\bar{p}}_\alpha;\ \vec{\tilde{k}}_m \vec{\bar{k}}_m)\, d\tilde{k}_m\, d\bar{k}_m\, \tilde{\tilde{G}}_m \tilde{\tilde{K}}_m(P;\ \vec{\tilde{k}}_m \vec{\bar{k}}_m;\ \vec{\tilde{q}}_b \vec{\bar{q}}_b) . \tag{2.8}$$

Как было указано выше, выгоднее иметь уравнения, в которые $\tilde{\tilde{K}}_i$ явно не входят. Поэтому, следуя работе /14/, введем новые операторы $\tilde{\tilde{A}}_{ab}$, определенные равенством

$$\tilde{\tilde{G}} = \delta_{ab} \tilde{\tilde{G}}_b + \tilde{\tilde{G}}_a \tilde{\tilde{A}}_{ab} \tilde{\tilde{G}}_b . \qquad (2.9)$$

Из сравнения формул (2.6) и (2.9) видно, что $(\tilde{\tilde{\Psi}}_a, \tilde{A}_{ab} \tilde{\tilde{\psi}}_a) = (\tilde{\tilde{\psi}}_a, \tilde{M}_{ab} \tilde{\tilde{\psi}}_b)$ на массовой поверхности. С другой стороны, для A_{ab} можно построить уравнения, в которые $\tilde{K}_1$ явно не входят /10/:

$$\tilde{\tilde{A}}_{ba} (P ; \vec{\tilde{p}}_b \vec{\tilde{\tilde{p}}}_b ; \vec{\tilde{q}}_a \vec{\tilde{\tilde{q}}}_a) = (1 - \delta_{ba}) \tilde{\tilde{G}}_0^{-1} (P \; \vec{\tilde{p}}_b \vec{\tilde{\tilde{p}}}_b \; \vec{\tilde{q}}_a \vec{\tilde{\tilde{q}}}_a) +$$

$$+ \sum_\eta (1 - \delta_{a\eta}) \int A_{b\eta} (P ; \vec{\tilde{p}}_b \vec{\tilde{\tilde{p}}}_b ; \vec{\tilde{k}}_\eta \vec{\tilde{\tilde{k}}}_\eta) d\vec{\tilde{k}} \, d\vec{\tilde{\tilde{k}}} \times \qquad (2.10)$$

$$\times \tilde{\tilde{G}}_0 \tilde{\tilde{T}}_\eta (P ; \vec{\tilde{k}}_\eta \vec{\tilde{\tilde{k}}}_\eta ; \vec{\tilde{q}}_\eta \vec{\tilde{\tilde{q}}}_\eta) .$$

§3. Высокоэнергетическое рассеяние на связанном состоянии

В качестве применения описанного выше метода рассмотрим высокоэнергетическое упругое рассеяние на малые углы элементарной частицы на слабосвязанной системе двух частиц. Для определенности допустим, что частица 3 рассеивается на связанном состоянии частиц 1 и 2.

Итерируя уравнение (2.10) до членов, учитывающих двукратное рассеяние, будем иметь

$$\tilde{\tilde{A}}_{33} = \tilde{\tilde{T}}_1 + \tilde{\tilde{T}}_2 + \tilde{\tilde{T}}_1 \tilde{\tilde{G}}_0 \tilde{\tilde{T}}_2 + \tilde{\tilde{T}}_2 \tilde{\tilde{G}}_0 \tilde{\tilde{T}}_1 . \qquad (3.1)$$

Введем обозначение:

$$T_1\,(P\,;\vec{\tilde{p}}_1\,\vec{\tilde{\tilde{p}}}_1;\,\vec{\tilde{q}}_1\,\vec{\tilde{\tilde{q}}}_1) = \delta\,(\vec{\tilde{p}}_1 - \vec{\tilde{q}}_1)\,\frac{i}{\pi}\,E_1\,F_1\,(P\,;\vec{\tilde{p}}_1\,;\,\vec{\tilde{q}}_1\,\vec{\tilde{\tilde{p}}}_1)\;. \tag{3.2}$$

В силу соотношения (1.29)

$$F_1 = \tilde{\tilde{T}}_1\quad(P_1\,;\,\vec{\tilde{p}}_1\,\vec{\tilde{\tilde{q}}}_1)\;, \tag{3.3}$$

если начальные и конечные импульсы частиц лежат на массовой поверхности.

Волновые функции относительного движения трех частиц до и после рассеяния соответственно имеют вид:

$$\tilde{\tilde{\psi}}^{1}\,(\vec{\tilde{p}}_3\,\vec{\tilde{\tilde{p}}}_3) = \delta\,(\vec{\tilde{p}}_3 - \vec{k}_1)\,\tilde{\Phi}\,(\vec{\tilde{\tilde{p}}}_3)\;,$$

$$\tilde{\tilde{\psi}}^{+}_{f}\,(\vec{\tilde{p}}_3\,\vec{\tilde{\tilde{p}}}_3) = \delta\,(\vec{\tilde{p}}_3 - \vec{k}_f)\,\Phi^{+}\,(\vec{\tilde{\tilde{p}}}_3)\;. \tag{3.4}$$

Усредняя выражение (3.1) по этим функциям, для отдельных слагаемых будем иметь

$$\langle f|\,\tilde{\tilde{T}}_1\,|\,i\rangle = \int \Phi^{+}(\vec{\tilde{\tilde{p}}}_3)\,\frac{i}{\pi}\,E_1\,F_1\,\Big(P;\,-\vec{\tilde{\tilde{p}}}_3 - \frac{m_1}{m_{12}}\vec{k}_f\,;\,-\frac{m_2}{m_{32}}\vec{\tilde{\tilde{p}}}_3 + \frac{m_2 M}{m_{12}\,m_{32}}\vec{k}_f\;;$$

$$-\frac{m_3}{m_{32}}\vec{\tilde{\tilde{p}}}_3 - \frac{m_3\,m_1}{m_{32}\,m_{12}}\,\vec{k}_f + \vec{k}_1\Big)\,\tilde{\Phi}\,\Big(\vec{\tilde{\tilde{p}}}_3 - \frac{m_1}{m_{12}}(\vec{k}_1 - \vec{k}_f)\Big)\,d\,\vec{\tilde{\tilde{p}}}_3 \tag{3.5}$$

$$<f|\tilde{\tilde{T}}_2|i> = \int \tilde{\Phi}^+(\vec{\bar{p}}_3)d\vec{\bar{p}}_3 \frac{i}{\pi} E_2 F_2(P; \vec{\bar{p}}_3 - \frac{m_2}{m_{12}}\vec{k}_f; -\frac{m_3}{m_{31}}\vec{\bar{p}}_3 - \frac{m_1 M}{m_{13} m_{12}}\vec{k}_f$$

$$-\frac{m_3}{m_{31}}\vec{\bar{p}}_3 + \frac{m_3 m_2}{m_{31} m_{21}}\vec{k}_f - \vec{k}_i)\ \tilde{\Phi}(\vec{\bar{p}}_3 + \frac{m_2}{m_{12}}(\vec{k}_i - \vec{k}_f)) \tag{3.6}$$

$$<f|\tilde{\tilde{T}}_1 \tilde{\tilde{G}}_0 \tilde{\tilde{T}}_2|i> = \int \tilde{\Phi}^+(\vec{\bar{p}}_3)d\vec{\bar{p}}_3 F_1(P; -\vec{\bar{p}}_3 - \frac{m_1}{m_{12}}\vec{k}_f; -\frac{m_3}{m_{32}}\vec{\bar{p}}_3 + \frac{m_2 M}{m_{12} m_{32}}\vec{k}_f;$$

$$-\vec{\bar{k}}_3 + \frac{m_2}{m_{12}}\vec{k}_i + \frac{m_2}{m_{23}}\vec{\bar{p}}_3 + \frac{m_2 m_1}{m_{32} m_{12}}\vec{k}_f)\frac{i^2}{\pi^2} E_1 \tilde{\tilde{G}}_0(P\ \vec{\bar{q}}_3 \vec{\bar{q}}_3) E_2 F_2(P; \vec{\bar{k}}_3 - \frac{m_2}{m_{12}}\vec{k}_i; \tag{3.7}$$

$$-\vec{\bar{p}}_3 - \frac{m_1}{m_{12}}\vec{k}_f + \frac{m_1}{m_{13}}\vec{\bar{k}}_3 - \frac{m_1 m_2}{m_{13} m_{12}}\vec{k}_i; -\frac{m_3}{m_{31}}\vec{\bar{k}}_3 - \frac{m_1 M}{m_{13} m_{21}}\vec{k}_i)\,d\vec{\bar{k}}_3\,\tilde{\Phi}(\vec{\bar{k}}_3) \tag{3.8}$$

$$<f|\tilde{\tilde{T}}_2 \tilde{\tilde{G}}_0 \tilde{\tilde{T}}_1|i> = \int \tilde{\Phi}^+(\vec{\bar{p}}_3)d\vec{\bar{p}}_3 F_2(P, \vec{\bar{p}}_3 - \frac{m_2}{m_{21}}\vec{k}_f; -\frac{m_3}{m_{31}}\vec{\bar{p}}_3 - \frac{m_1 M}{m_{13} m_{12}}\vec{k}_f;$$

$$-\vec{\bar{k}}_3 - \frac{m_1}{m_{12}}\vec{k}_i + \frac{m_1}{m_{13}}\vec{\bar{p}}_3 - \frac{m_1 m_2}{m_{13} m_{12}}\vec{k}_f)\frac{(i)^2}{\pi^2} E_2 \tilde{\tilde{G}}_0(P\ \vec{\bar{q}}_3 \vec{\bar{q}}_3) E\,F_1(P, -\vec{\bar{k}}_3 - \frac{m_1}{m_{12}}\vec{k}_i;$$

$$-\vec{\bar{p}}_3 + \frac{m_2}{m_{12}}\vec{k}_f + \frac{m_2}{m_{23}}\vec{\bar{k}}_3 + \frac{m_2 m_1}{m_{23} m_{12}}\vec{k}_i, -\frac{m_3}{m_{32}}\vec{\bar{k}}_3 + \frac{m_2 M}{m_{12} m_{32}}\vec{k}_i)\,d\vec{\bar{k}}_3\,\tilde{\Phi}(\vec{\bar{k}}_3).$$

В приближении слабой связи можно считать, что масса связанного состояния равна просто сумме масс частиц (1) и (2). Тогда на массовой поверхности:

$$P_0 = \sqrt{k_i^2 + m_3^2} + \sqrt{k_i^2 + m_{12}^2} = \sqrt{k_f^2 + m_3^2} + \sqrt{k_f^2 + m_{12}^2}. \tag{3.9}$$

В этом случае нетрудно показать, что у каждой F_i, входящей в (3.5–3.8), либо начальные, либо конечные импульсы с точностью до квадратов $\vec{\bar{k}}_3$ и $\vec{\bar{p}}_3$ лежат на массовой поверхности. Поэтому, учитывая, что энергия относительного движения частиц 1 и 2 в слабосвязанном состоянии значительно меньше энергии падающей частицы, в формулах (3.5–3.8) можно F_i заменить на $\tilde{\tilde{T}}_i(P_i, \vec{\vec{p}}_i\ \vec{\vec{q}}_i)$.

Нетрудно видеть, что

$$\frac{i^2}{\pi^2} E_1 \tilde{\tilde{G}}_0 E_2 = \frac{E_1 + E_2 + E_2}{E_3\,[\,P_0^2 - (E_1 + E_2 + E_3)^2 + i\epsilon\,]} . \tag{3.10}$$

С учетом малости $\vec{\vec{p}}_3, \vec{\vec{k}}_3$ и $(\vec{k}_i - \vec{k}_f)$ выражение (3.10) в формулах (3.7) и (3.8) принимает соответственно вид

$$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{k^2 + m_{12}^2}}{\sqrt{k^2 + m_{12}^2} + \sqrt{k^2 + m_3^2}}\,[\,\vec{k}_i\,(\vec{\vec{k}}_3 - \vec{\vec{p}}_3 + \frac{m_1}{m_{12}}\,\vec{\Delta}\,) + i\epsilon\,]^{-1}, \tag{3.11}$$

$$-\frac{\frac{1}{2}\sqrt{k^2 + m_{12}^2}}{\sqrt{k^2 + m_{12}^2} + \sqrt{k^2 + m_3^2}}\,[\,\vec{k}_i\,(\vec{\vec{k}}_3 - \vec{\vec{p}}_3 + \frac{m_1}{m_{12}}\,\vec{\Delta}\,) - i\epsilon\,]^{-1}, \tag{3.12}$$

где $k^2 = k_i^2 = k_f^2$. Для получения окончательного результата мы предположим, что квазипотенциальные матрицы рассеяния вне массовой поверхности зависят только от разности $\vec{p} - \vec{q}$. Подставляя выражения (3.11) и (3.12) в равенства (3.6), (3.8) и делая в них замену переменной интегрирования $\vec{\vec{k}}_3 = \vec{\vec{p}}_3 + \vec{q}$, получим

$$\begin{aligned} T_{33}(P_0, \vec{\Delta}) = {} & \frac{i}{\pi}\,\frac{m_1}{m_{12}}\sqrt{k^2 + m_{12}^2}\,Q\left(-\frac{m_1}{m_{12}}\vec{\Delta}\right) T_{23}(P_0, \vec{\Delta}) + \\ & + \frac{i}{\pi}\,\frac{m_2}{m_{12}}\sqrt{k^2 + m_{12}^2}\,Q\left(\frac{m_2}{m_{12}}\vec{\Delta}\right) T_{13}(P_0, \vec{\Delta}) + \\ & + \pi i\,\frac{\sqrt{k^2 + m_{12}^2}}{P_0}\int Q(\vec{q})\,T_{23}\left(P_0, \vec{q} - \frac{m_2}{m_{12}}\vec{\Delta}\right) T_{13}\left(P_0, \vec{q} + \frac{m_1}{m_{12}}\vec{\Delta}\right) \times \\ & \times \delta(\vec{q}\,\vec{k}_i)\,d\vec{q}\,, \end{aligned} \tag{3.13}$$

где $\vec{\Delta} = \vec{k}_i - \vec{k}_f$, $Q(\vec{q}) = \int \tilde{\Phi}(\vec{p}+\vec{q})\tilde{\Phi}(\vec{p})\, d\vec{p}$.

T_{3i} –матрица рассеяния частицы 3 на i –ой частице.

Первые два члена в формуле (3.13) описывают однократное рассеяние, а третий представляет вклад от процесса, в котором падающая частица сталкивается с обеими частицами, составляющими связанное состояние.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность А.Н. Тавхелидзе за постановку задачи и интерес к работе, а также В.А. Матвееву, В.Р. Гарсеванишвили и Л.А. Слепченко за ценные обсуждения.

Приложение А

Выведем формулу (1.15), исходя из определения (1.12), которое можно записать в форме

$$\tilde{\tilde{K}}_i = \tilde{\tilde{G}}_0^{-1} - \tilde{\tilde{G}}_i^{-1} . \qquad (A1)$$

Как известно, квазипотенциал удовлетворяет соотношению

$$\tilde{G}_i^{(2)} = (\tilde{G}_{i0}^{(2)-1} - \tilde{\tilde{K}}_i^{(2)}) . \qquad (A2)$$

Используя равенства (A1), (A2), (1.14), получим формулу (1.15).

Приложение В

Докажем, что введенные нами матрицы (2.3) на массовой поверхности совпадают с физическими амплитудами рассеяния. Во избежание громоздкости записи определение (2.2) перепишем в виде

$$\int G_\alpha(X-Y;\tilde{x}_\alpha\bar{x}_\alpha;\tilde{y}_\alpha\bar{y}_\alpha;\cdot)\,dY\,d\tilde{y}\,d\bar{y}\,M_{ab}(Y\;\tilde{y}_\alpha\bar{y}_\alpha)\Big|_{\tilde{x}^0_\alpha=\bar{x}^0_\alpha=0}=$$

$$=\int G_\alpha(X-Y;\vec{\tilde{x}}_\alpha\vec{\bar{x}}_\alpha;\vec{\tilde{y}}_\alpha\vec{\bar{y}}_\alpha)\,dY\,d\vec{\tilde{y}}\,d\vec{\bar{y}}\,M_{ab}(Y\;\vec{\tilde{y}}_\alpha\vec{\bar{y}}_\alpha)\,. \qquad (B.1)$$

Как известно /15/, при $a \neq 0$

$$G_\alpha(X-Y;\tilde{x}\bar{x};\tilde{y}\bar{y})=\int\frac{dp_\alpha\,dP_\alpha\; e^{ip_\alpha(x_\alpha-y_\alpha)+iP_\alpha(X_\alpha-Y_\alpha)}}{p_\alpha^2-m_\alpha^2+i\epsilon}\times$$

$$\times\left[\frac{f(\bar{x}_\alpha)\,\bar{f}(\bar{y}_\alpha)}{P_\alpha^0-\sqrt{\vec{P}_\alpha^2+\mu_\alpha^2}}+R\,(P_\alpha^0)\right], \qquad (B.2)$$

где $R\,(P_\alpha^0)$ -функция, регулярная при $P_\alpha^0=\sqrt{\vec{P}_\alpha^2+\mu_\alpha^2}$. Подставляя выражение (B.2) в соотношение (B.1) и учитывая, что $\Psi_\alpha(X\,\tilde{x}\,\bar{x})=$ $=e^{ip_\alpha^0\tilde{x}_\alpha+iP_\alpha X_\alpha}f_\alpha(x_\alpha)$, после несложных преобразований будем иметь

$$\int\frac{e^{-i\vec{p}_\alpha\vec{\tilde{x}}_\alpha+iPX}}{p_\alpha^2-m_\alpha^2+i\epsilon}\,dP\,d\tilde{p}_\alpha\left[\frac{\tilde{f}(\vec{\tilde{x}}_\alpha)\Psi_\alpha^+(Y\,\tilde{y}\,\bar{y})}{P_\alpha^0-\sqrt{\vec{P}_\alpha^2+\mu_\alpha^2+i\epsilon}}+R\,(P_\alpha^0)\right]dY\,d\tilde{y}\,d\bar{y}\;\times$$

$$\times M_{ab}(Y\;\tilde{y}_\alpha\bar{y}_\alpha)=$$

$$=\int\frac{e^{-i\vec{p}_\alpha\vec{\tilde{x}}_\alpha+iPX}}{p_\alpha^2-m_\alpha^2+i\epsilon}\,dP\,d\tilde{p}_\alpha\left[\frac{\tilde{f}(\vec{x}_\alpha)\Psi_\alpha^+(Y\,\vec{y}\,\vec{y})}{P_\alpha^0-\sqrt{\vec{P}_\alpha^2+\mu_\alpha^2+i\epsilon}}+R\,(P_\alpha^0)\right]\times \qquad (B.3)$$

$$\times\,dY\;d\vec{\tilde{y}}_\alpha\;d\vec{\bar{y}}_\alpha\;\bar{M}_{ab}(Y\;\vec{\tilde{y}}_\alpha\vec{\bar{y}}_\alpha)\,.$$

Выписывая соответствующее равенство для фурье-образов и используя обозначение

$$\Psi^{+}_{a}(Y\ \tilde{\tilde{y}}\ \bar{y})\ dY\ d\tilde{y}\ d\bar{y}\ M_{ab}(Y\ \tilde{y}_{a}\bar{y}_{a}) = T_{ab}(P\ \tilde{p}_{a}\ \ldots),$$

$$\tilde{\tilde{\Psi}}_{a}(Y\ \vec{\tilde{y}}\ \vec{\bar{y}})\ dY\ d\vec{\tilde{y}}\ d\vec{\bar{y}}\ \tilde{\tilde{M}}_{ab}(Y\ \vec{\tilde{y}}_{a}\vec{\bar{y}}_{a}) = \tilde{\tilde{T}}_{ab}(P\ \vec{\tilde{p}}_{a}\ldots), \tag{B.4}$$

получим следующее соотношение:

$$\int\frac{d\tilde{p}^{0}_{a}}{(\frac{m_a}{M}P-\tilde{p}_{a})^{2}-m^{2}_{a}}\left[\frac{1}{\frac{m_{bc}}{M}P^{0}+\tilde{p}^{0}_{a}-\sqrt{(\frac{m_{bc}}{M}\vec{P}+\vec{\tilde{p}}_{a})^{2}+\mu^{2}_{a}}}+R(P^{0}_{a})\right]T_{ab}(P\ \tilde{p}_{a}\ldots)=$$

$$=\int\frac{d\tilde{p}^{0}_{a}}{(\frac{m_{a}}{M}P-\vec{p}_{a})^{2}-m^{2}_{a}}\left[\frac{1}{\frac{m_{bc}}{M}P^{0}+\tilde{p}^{0}_{a}-\sqrt{(\frac{m_{bc}}{M}\vec{P}+\vec{p}_{a})^{2}+\mu^{2}_{a}}}+R(P^{0}_{a})\right]\tilde{\tilde{T}}_{ab}(P\ \vec{\tilde{\tilde{p}}}_{a}\ldots). \tag{B.5}$$

Из последнего следует, что на массовой поверхности $T_{ab}(P\ \tilde{p}_{a}\ldots)$ и $\tilde{\tilde{T}}_{ab}(P\ \vec{\tilde{p}}_{a}\ldots)$ совпадают. Нетрудно видеть, что для $a=0$ будем иметь

$$\int G_{0}(P\ \tilde{p}_{1}\bar{p}_{1})\ d\tilde{p}_{1}\ d\bar{p}_{1}\ T_{ab}(P\ \tilde{p}_{1}\bar{p}_{1}) =$$

$$=\tilde{\tilde{G}}_{0}(P\ \vec{\tilde{p}}_{1}\vec{\bar{p}}_{1})\ \tilde{\tilde{T}}_{ab}(P\ \vec{\tilde{p}}_{1}\vec{\bar{p}}_{1}\ldots). \tag{B.6}$$

Литература

1. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 380 (1963).
2. B.A.Arbusov, A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze, R.N.Faustov. Phys. Lett., 2, 150 (1962);
A.A. Logunov, A.N.Tavkhelidze, I.T.Todorov, O.R.Khrustalev. Nuovo Cim. 30, 134 (1963);
Б.А. Арбузов, А.А. Логунов, А.Т. Филиппов, О.А. Хрусталев. ЖЭТФ, 46, 1266(1964);
В.Г. Кадышевский, А.Н. Тавхелидзе. Лекция в Школе теоретической физики, Варна, 1968.
3. V.R.Garsevanishvili, V.A.Matveev, L.A.Slepchenko, A.N.Tavkhelidze. Coral Gables Conference on Fundamental Interactions at High Energy Gordon an Breach, Science Publishers; V.R.Garsevanishvili, V.A.Matveev, L.A.Slepchenko, A.N.Tavkhelidze. Preprint ICTP IC/69/87.
4. V.A.Alessandrini, R.L.Omnes. Phys. Rev., 139 IB 167 (1965).
5. R.Blankenbeeler, R.Sugar. Phys. Rev., 142, 1051 (1966).
6. D.Z.Freedman, C.Lovelace, J.M.Namyslowski. Nuovo Cim., 43, A258 (1966).
7. В.А. Матвеев, Р.М. Мурадян, А.Н. Тавхелидзе. Препринт ОИЯИ, Р2-3900, Дубна, 1969.
8. R.J.Glauber. In "Lectures in Theoretical Physics", vol. 1, p. 315, N.Y.,1959.
9. R.C.Arnold. Phys.Rev., 153, 1523 (1967).
10. H.D.I.Abarbanel, C.Itzykson. Phys. Rev. Lett., 23, 53 (1969).
11. Б.М. Барбашов, С.П. Кулешов, В.А. Матвеев, А.Н. Сисакян. Сообщение ОИЯИ, Е2-4692, Дубна, 1969.
12. D.Tz.Stoyanov, A.N.Tavkhelidze. Phys.Lett., 13, 76 (1964).

13. V.P. Shelest, D.Tz. Stoyanov. Phys.Lett., 13, 253 (1964).
14. А.А. Хелашвили. Препринт ОИЯИ, Р2-3371, Дубна, 1967.
15. С. Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, Москва, Изд. иностранной литературы, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 ноября 1969 года.