ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4 - 4775

Р.В. Джолос

ПАРНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ И КОЛЛЕКТИВНЫЕ 0^+ СОСТОЯНИЯ ЯДЕР

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

Р4 - 4775

Р.В. Джолос

ПАРНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ И КОЛЛЕКТИВНЫЕ 0^+ СОСТОЯНИЯ ЯДЕР

Направлено в ЖТМФ

Известно, что в реакциях двухнуклонной передачи матричные элементы для переходов в основные состояния ядер значительно превышают матричные элементы для переходов в чистые $(j^2)J=0$ конфигурации. Например, в реакциях $^{208}Pb(t,p)^{210}Pb$ и $^{208}Pb(p,t)^{206}Pb$ основные состояния возбуждаются намного сильнее, чем любые другие 0^+ состояния. Это означает, что в ядрах существуют коллективные ветви возбуждения, связанные с парными корреляциями.

С подобной ситуацией в ядерной физике уже встречались в экспериментах по кулоновскому возбуждению, в которых с большой вероятностью, значительно превышающей одночастичные оценки, возбуждалось нижайшее 2^+ состояние. Такое увеличение вероятности перехода объяснялось существованием коллективной квадрупольной ветви возбуждения.

Сходство коллективных квадрупольных и парных ветвей возбуждения этим не ограничивается. В случае слабых квадрупольных корреляций (сферические ядра) спектр коллективных состояний приблизительно эквидистантный. В случае слабых парных корреляций (ядра, близкие к магическим) спектр соответствующих коллективных состояний также приблизительно эквидистантный /1/. При сильных квадрупольных корреляциях (деформированные ядра) спектр коллективных квадрупольных возбуждений становится ротационным. Точно так же при сильных парных корреляциях энергии коллективных состояний оказываются пропорциональными квадрату числа частиц. Пример такого спектра приведен в работе /1/. Эту аналогию можно продолжить.

В настоящей работе исследуются общие свойства коллективных парных возбуждений. Сначала проанализируем уже известные теоретические методы, которые могут быть использованы при решении поставленной задачи. В первую очередь отметим квазибозонное приближение для операторов пар частиц $\sum_m (-1)^{j-m} a^+_{jm} a^+_{j-m}$ /2/. Этот метод применим только в случае слабых парных корреляций. При значениях константы парных сил, превышающих некоторое критическое значение, вообще нельзя определить таким способом коллективную ветвь возбуждения. В случае сильных парных корреляций нужно использовать другой метод: с помощью u–v преобразования Н.Н. Боголюбова перейти от операторов частиц a^+_{jm} к операторам квазичастиц α^+_{jm}, а затем использовать квазибозонное приближение уже для операторов пар квазичастиц $\sum_m (-1)^{j-m} \alpha^+_{jm} \alpha^+_{j-m}$ /3/. Точность этого метода тем выше, чем заметнее матричные элементы оператора $A = \sum_{jm} (-1)^{j-m} a_{j-m} a_{jm}$, взятые между основными состояниями ядер, превосходят матричные элементы для переходов между основными и возбужденными состояниями, т.е. чем меньше величина $\overline{(\Delta A)^2}$ (равная $\sqrt{(\langle AA^+\rangle - \langle A\rangle\langle A^+\rangle)/(\langle A\rangle\langle A^+\rangle)}$, если оболочка только начинает заполняться, или равная $\sqrt{(\langle A^+A\rangle - \langle A^+\rangle\langle A\rangle)/(\langle A^+\rangle\langle A\rangle)}$, если оболочка почти заполнена) по сравнению с единицей. Здесь средние вычисляются по основным состояниям ядер. Вычисления в рамках сверхтекучей модели ядра (самосогласованность которой и проверяется в этих расчетах) дают следующие результаты для ядер с числом нейтронов от 50 до 82 (в расчетах оператор A был оператором пары нейтронов). Величина $\overline{(\Delta A)^2}$ достигает минимума, равного 0,4 у ядер с наполовину заполненной оболочкой и близка к единице у ядер с нейтронной оболочкой, которая только начинает заполняться или почти заполнена. Таким образом, условие $\overline{(\Delta A)^2} \ll 1$ не выполняется для многих ядер, которые в то же время нельзя описывать и в рамках квазибозонного приближения для операторов пар частиц. Для анализа коллективных парных возбуждений в таких ядрах необходимы новые теоретические методы.

С этой целью рассмотрим микроскопическую модель ядра, учитывающую лишь парные остаточные силы. Мы не будем вводить в рассмотрение квадрупольные силы с тем, чтобы на первом этапе работы не рассматривать связи парных возбуждений с квадрупольными, хотя такая связь безусловно существует в ядрах. Гамильтониан модели имеет вид:

$$H = \sum_j (\epsilon_j - \lambda) N_j - \sum_{j,j'} G_{jj'} A_j^+ A_{j'}$$

$$N_j = \sum_m a_{jm}^+ a_{jm}, \quad A_j = \sum_m (-1)^{j-m} (2j+1)^{-1/2} a_{j-m} a_{jm} \times 2^{-\frac{1}{2}}.$$

Так как мы будем рассматривать состояния ядер, получающихся в результате добавления или удаления двух частиц от исходного ядра, то в качестве исходного удобно выбрать ядро с замкнутыми подоболочками. Разобьем всю совокупность одночастичных уровней на две: уровни j_+, для которых $\epsilon_j - \lambda > 0$ и уровни j_-, для которых $\epsilon_j - \lambda < 0$.

Введем обозначения

$$a_{jm}^+ = a_{j_+ m}^+, \quad A_j^+ = A_{j_+}^+, \quad N_j = N_{j_+} \qquad \epsilon_j - \lambda > 0$$

$$a_{j_+ m}^+ = i(-1)^{j_- - m} a_{j_- -m}, \quad A_j^+ = A_{j_-}, \quad N_j = (2j_- + 1) - N_{j_-}, \qquad \epsilon_j - \lambda < 0.$$

Перестановочные соотношения операторов $A_{j_\pm}$, $A_{j_\pm}^+$, $N_{j_\pm}$ имеют вид:

$$[A_{j_\pm}, A_{j'_\pm}^+] = \delta_{j_\pm j'_\pm} \left(1 - \frac{2N_{j_\pm}}{2j_\pm + 1}\right), \quad [N_{j_\pm}, A_{j'_\pm}^+] = 2\delta_{j_\pm j'_\pm} A_{j_\pm}^+.$$

Для операторов с такими свойствами коммутации существует представление Холстейна-Примакова /4/

$$A^{+}_{j_\pm} = b^{+}_{j_\pm}\sqrt{1-\frac{2b^{+}_{j_\pm}b_{j_\pm}}{2j_\pm+1}}\,, \qquad N_{j_\pm} = 2b^{+}_{j_\pm}b_{j_\pm}$$

$$[b_{j_\pm}, b^{+}_{j'_\pm}] = \delta_{j_\pm j'_\pm}\,, \quad [b_{j_\pm}, b_{j'_\pm}] = 0\,.$$

В результате применения этого представления в нашем случае гамильтониан модели становится функцией только бозонных переменных, что очень удобно при анализе коллективных свойств ядер:

$$\begin{aligned}
H = {} & \sum_{j_+} 2(\epsilon_{j_+}-\lambda)b^{+}_{j_+}b_{j_+} + \sum_{j_-} 2(\lambda-\epsilon_{j_-})b^{+}_{j_-}b_{j_-} - \\
& - \sum_{j'_+ j_+} G_{j_+ j'_+} b^{+}_{j_+}\sqrt{\left(1-\frac{2b^{+}_{j_+}b_{j_+}}{2j_+ +1}\right)\left(1-\frac{2b^{+}_{j'_+}b_{j'_+}}{2j'_+ +1}\right)}\; b_{j'_+} - \qquad (1)\\
& - \sum_{j_-, j'_-} G_{j_- j'_-} b_{j'_-}\sqrt{\left(1-\frac{2b^{+}_{j_-}b_{j_-}}{2j_- +1}\right)\left(1-\frac{2b^{+}_{j'_-}b_{j'_-}}{2j'_- +1}\right)}\; b^{+}_{j'_-} - \\
& - \sum_{j_+, j_-} G_{j_+ j_-}\left\{ b^{+}_{j_+} b^{+}_{j_-}\sqrt{\left(1-\frac{2b^{+}_{j_+}b_{j_+}}{2j_+ +1}\right)\left(1-\frac{2b^{+}_{j_-}b_{j_-}}{2j_- +1}\right)} + h.c. \right\}.
\end{aligned}$$

Из (1) видно, что число бозонов в системе не может превышать числа вакантных мест для пар частиц (дырок) на одночастичных уровнях в соответствии с принципом Паули.

Если роль корреляций в системе незначительна, т.е. средние значения операторов $\frac{2b^{+}_{j_\pm}b_{j_\pm}}{2j_\pm+1} \ll 1$, то гамильтониан (1) приближенно можно заменить следующим выражением /2/:

$$\begin{aligned}
H \approx {} & \sum_{j_+} 2(\epsilon_{j_+}-\lambda)b^{+}_{j_+}b_{j_+} + \sum_{j_-} 2(\lambda-\epsilon_{j_-})b^{+}_{j_-}b_{j_-} - \sum_{j_\pm, j'_\pm}[G_{j_+ j'_+}b^{+}_{j_+}b_{j'_+} + G_{j_- j'_-}b^{+}_{j_-}b_{j'_-} + \\
& + G_{j_+ j_-}(b^{+}_{j_+}b^{+}_{j_-} + h.c.)]\,,
\end{aligned}$$

которое диагонализируется линейным преобразованием

$$b^{+}_{j_\pm} = \sum_{k_+, k_-} (U_{k_\pm, j_\pm} \beta^{+}_{k_\pm} + U_{k_\mp, j_\pm} \beta_{k_\mp}).$$

В результате получаем, что

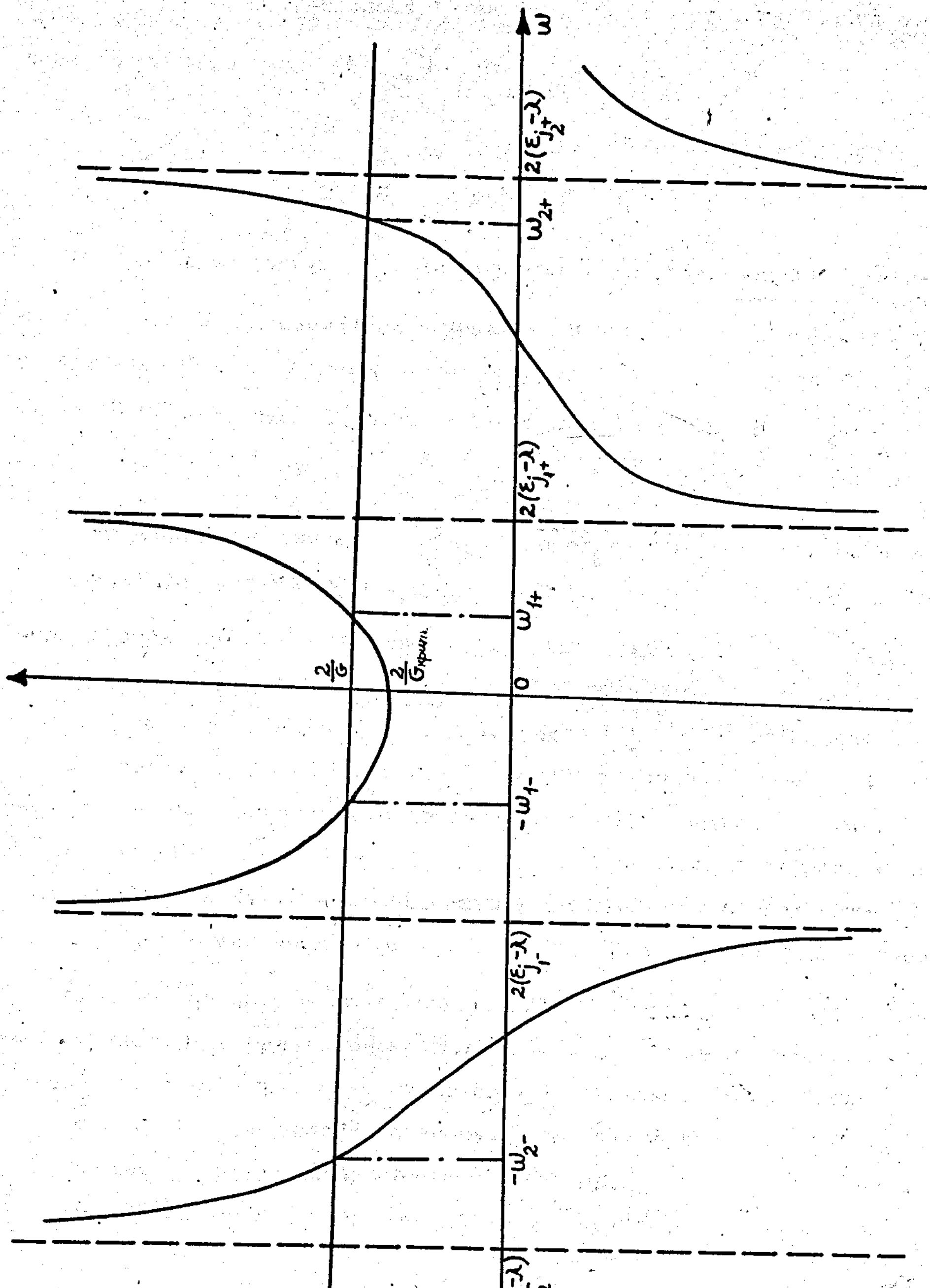
$$H \approx \sum_{k_+} \omega_{k_+} \beta^{+}_{k_+} \beta_{k_+} + \sum_{k_-} \omega_{k_-} \beta^{+}_{k_-} \beta_{k_-},$$

т.е. спектр уровней системы эквидистантный. В случае, когда $G_{jj'} = \frac{1}{2}\sqrt{(2j+1)(2j'+1)}$, $\omega_{k_\pm}$ являются корнями уравнения

$$\frac{2}{G} = \sum_{j_+} \frac{2j_+ + 1}{2(\epsilon_{j_+} - \lambda) \mp \omega_{k_\pm}} + \sum_{j_-} \frac{2j_- + 1}{2(\lambda - \epsilon_{j_-}) \pm \omega_{k_\pm}}, \tag{2}$$

графический вид которого приведен на рис. 1. Из рисунка видно, что $\omega_{1+} = \omega_{1-} = 0$ при $G = G_{\text{крит.}}$, где $G_{\text{крит.}}$ определяется равенством $2 = G_{\text{крит.}} \sum_j \frac{2j+1}{2|\epsilon_j - \lambda|}$. Это как раз то значение G, при котором по- является решение уравнения для энергетической щели в сверхтекучей модели ядра. При $G > G_{\text{крит.}}$ становятся комплексными корни ω_{1+}, ω_{1-}, отвечающие коллективным парным возбуждениям. Это обстоятельство иллюстрирует ограниченность применимости рассматриваемого приближения областью слабых парных корреляций.

С ростом влияния парных сил становится необходимым учёт вклада от операторов $2b^{+}_{j_\pm} b_{j_\pm}/(2j_\pm + 1)$, что связано с появлением ангармонических эффектов в системе. Интересно отметить, что ангармоничность будет тем меньше, чем больше кратность вырождения уровней $(2j_\pm + 1)$. Если, например, для ближайшего к поверхности Ферми частичного уровня $2j_+ + 1 \gg 2$, а для ближайшего дырочного уровня $2j_- + 1 \approx 2$, то при добавлении к такому ядру пар нуклонов ангармонические эффекты будут проявляться значительно меньше, чем при удалении их. Такая



ω
$2(\varepsilon_{j_2^+}-\lambda)$
ω_{2+}
$2(\varepsilon_{j_1^+}-\lambda)$
ω_{1+}
$\frac{2}{G}$
$\frac{2}{G_{крит}}$
0
$-\omega_{1-}$
$2(\varepsilon_{j_1^-}-\lambda)$
$-\omega_{2-}$
$2(\varepsilon_{j_2^-}-\lambda)$

Рис. 1

ситуация с одночастичными уровнями реализуется в изотопах свинца, где для ближайшего частичного уровня $2j_+ + 1 = 10$, а для ближайшего дырочного уровня $2j_- + 1 = 2$. Из разностей же энергий основных состояний видно /1/, что отклонения от эквидистантности значительно заметнее для изотопов свинца с $A < 208$, чем для изотопов с $A > 208$, что находится в согласии со сделанным выше утверждением.

В случае сильных парных корреляций, когда волновая функция ядра в основном состоит из компоненты с большими числами бозонов, операторы $b_{j_\pm}$, $b^+_{j_\pm}$ можно рассматривать классически, заменяя их средними значениями

$$b_{j_\pm}, b^+_{j_\pm} \to \sqrt{n_{j_\pm}}, \quad n_{j_\pm} = (j_\pm + \frac{1}{2}) v^2_{j_\pm}, \tag{3}$$

где $v^2_{j_\pm}$ $(v^2_{j_\pm} \leq 1)$ - вероятность заполнения уровня частицами (j_+) или дырками (j_-). Подставив (3) в гамильтониан (1) и проварьировав H по $v_{j_\pm}$, найдем из условия $\frac{\delta H}{\delta v_{j_\pm}} = 0$, что

$$v^2_{j_\pm} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|\epsilon_{j_\pm} - \lambda|}{\sqrt{(\epsilon_{j_\pm} - \lambda)^2 + \Delta^2_{j_\pm}}}\right), \quad \Delta_{j_\pm} = \sum_{j'_\sigma} \frac{G_{j_\pm j'_\sigma}(2j'_\sigma + 1)\Delta_{j'_\sigma}}{\sqrt{(2j_\pm + 1)(2j'_\sigma + 1)}\sqrt{(\epsilon_{j'_\sigma} - \lambda)^2 + \Delta^2_{j'_\sigma}}}, \quad \sigma = \pm 1.$$

А это известные результаты сверхтекучей модели ядра.

Из рассмотренных примеров видно, что гамильтониан модели в форме (1) позволяет получить уже известные результаты для случаев слабой и сильной парной корреляции, и в то же время описывать переходную область, в которой ангармонические эффекты только начинают проявляться.

Следует, однако, отметить, что представление Холстейна-Примакова, использованное в (1), очень неудобно с чисто практической точки зрения из-за присутствия оператора под знаком квадратного корня. Более рационально ввести операторы

$$\Lambda^+_{j_\pm m} = (-1)^{j_\pm - m} a^+_{j_\pm m} a^+_{j_\pm - m}, \quad N_{j_\pm m} = a^+_{j_\pm m} a_{j_\pm m} + a^+_{j_\pm - m} a_{j_\pm - m}, \quad m > 0. \tag{4}$$ x/

Так как собственные значения оператора $b^+_{j_\pm m} b_{j_\pm m}$ для физических состояний равны либо 1, либо 0, то не изменяя матричных элементов операторов $A_{j_\pm m}$, $A_{j_\pm m}$, можно заменить $\sqrt{1 - b^+_{j_\pm m} b_{j_\pm m}} \to 1 - b^+_{j_\pm m} b_{j_\pm m}$. В результате гамильтониан будет содержать только двух-, четырех- и шестибозонные члены:

$$H = \sum_{s+} 2(\bar{\epsilon}_{s+} - \lambda) b^+_{s+} b_{s+} + \sum_{s-} 2(\lambda - \bar{\epsilon}_{s-}) b^+_{s-} b_{s-} - \sum_{s\pm, s'\pm} \{ \bar{G}_{s+,s'+} b^+_{s+} (1 - b^+_{s+} b_{s+}) \times$$
$$\times (1 - b^+_{s'+} b_{s'+}) b_{s'+} + \bar{G}_{s-s'-} b^+_{s-} (1 - b^+_{s-} b_{s-})(1 - b^+_{s'-} b_{s'-}) b_{s'-} + \bar{G}_{s+s-} [b^+_{s+} b^+_{s-} (1 -$$
$$- b^+_{s+} b_{s+})(1 - b^+_{s-} b_{s-}) + h.c] \}$$
$$s_\pm \equiv j_\pm m, \quad \bar{\epsilon}_{s+} = \epsilon_{s+}, \quad \bar{\epsilon}_{s-} = \epsilon_{s-} - \bar{G}_{s-s-}, \quad \bar{G}_{ss'} = \frac{G_{jj'}}{\sqrt{(j + \frac{1}{2})(j' + \frac{1}{2})}}.$$

Переходим к решению основной задачи работы – выделению коллективных парных ветвей возбуждения. Для этого необходимо ответить на вопрос о том, как сильно связаны друг с другом коллективные и неколлективные ветви. Решим эту задачу при помощи канонического преобразования бозонных операторов:

$$b^+_{s\pm} = \sum_{k+,k-} (U_{k\pm, s\pm} \beta^+_{k\pm} + U_{k\mp, s\pm} \beta_{k\mp}), \tag{5}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}
&\sum_{k+,k-} (U_{k\pm,s\pm} U_{k\pm,s'\pm} - U_{k\mp,s\pm} U_{k\mp,s'\pm}) = \delta_{s\pm,s'\pm} \\
&\sum_{k+,k-} (U_{k+,s+} U_{k+,s-} - U_{k-,s+} U_{k-,s-}) = 0 \\
&\sum_{s+,s-} (U_{k\pm,s\pm} U_{k'\pm,s\pm} - U_{k\pm,s\mp} U_{k'\pm,s\mp}) = \delta_{k\pm,k'\pm} \\
&\sum_{s+,s-} (U_{k+,s+} U_{k-,s+} - U_{k-,s-} U_{k+,s-}) = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

---

x/ Бозонное представление для операторов $A^+_{j_\pm m}, N_{j_\pm m}$ имеет вид:

$$A^+_{j_\pm m} = b^+_{j_\pm m} \sqrt{1 - b^+_{j_\pm m} b_{j_\pm m}}, \quad N_{j_\pm m} = 2 b^+_{j_\pm m} b_{j_\pm m}.$$

В терминах операторов $\beta_{k_\pm}$, $\beta^+_{k_\pm}$ после приведения к нормальной форме гамильтониан запишется так:

$$H = H_0 + H_{int}$$

$$\begin{aligned} H_0 = &\sum_{k_+, k'_+} \Big(\sum_s \tilde{\tilde{D}}_s U_{k_+,s} U_{k'_+,s} - \sum_{s,s'} \tilde{\tilde{G}}_{ss'} U_{k_+ s} U_{k'_+, s'} \Big) \beta^+_{k_+} \beta_{k'_+} + \\ &+ \sum_{k_-, k'_-} \Big(\sum_s \tilde{\tilde{D}}_s U_{k_-,s} U_{k'_-,s} - \sum_{s,s'} \tilde{\tilde{G}}_{ss'} U_{k_-,s} U_{k'_-,s'} \Big) \beta^+_{k_-} \beta_{k'_-} + \\ &+ \sum_{k_+, k_-} \Big(\sum_s \tilde{\tilde{D}}_s U_{k_+,s} U_{k_-,s} - \sum_{s,s'} \tilde{\tilde{G}}_{ss'} U_{k_+,s} U_{k_-,s'} \Big) (\beta^+_{k_+} \beta^+_{k_-} + h.c.), \end{aligned} \tag{7}$$

где суммирование по s включает как суммирование по $s+$, так и суммирование по $s-$. В (7) $\tilde{\tilde{D}}_{s+} = 2(\tilde{\tilde{\epsilon}}_{s+} - \lambda)$, $\tilde{\tilde{D}}_{s-} = 2(\lambda - \tilde{\tilde{\epsilon}}_{s-})$, $\tilde{\tilde{\epsilon}}_{s\pm}$ –перенормированные значения одночастичных энергий, а $\tilde{\tilde{G}}_{ss'}$ –перенормированные константы взаимодействия. Перенормировка произошла при приведении гамильтониана, выраженного через операторы $\beta_{k\pm}$, $\beta^+_{k\pm}$ к нормальной форме. Величина перенормировки определяется коэффициентами U_{ks}. Например,

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\epsilon}}_{s+} = &\bar{\epsilon}_{s+} - 2 G_{s+,s+} \sum_{k-} U^2_{k-,s+} + 2 \sum_{s'_+} G_{s+,s'+} \sum_{k-} U_{k-,s+} U_{k-,s'+} + 2 \sum_{s-} G_{s+,s-} \sum_{k-} U_{k-,s-} U_{k-,s+} - \\ &- 4 \sum_{s'+} G_{s+,s'+} \sum_{k-} U_{k-,s+} U_{k-,s} + \sum_{s-} U^2_{k-,s'+} - 4 \sum_{s-} G_{s+,s-} \sum_{k-} U_{k-,s-} U_{k-,s+} \sum_{k+} U^2_{k+,s-} \end{aligned}$$

$$\tilde{\tilde{G}}_{s+,s'+} = \bar{G}_{s+,s'+} \Big[\Big(1 - 2 \sum_{k-} U^2_{k-,s+}\Big) \Big(1 - 2 \sum_{k-} U^2_{k-,s'+}\Big) + 6 \Big(\sum_{k-} U_{k-,s+} U_{k-,s'+} \Big)^2 \Big]$$

H_{int} содержит члены четвертой и шестой степени по операторам $\beta_{k\pm}$, $\beta^+_{k\pm}$, записанные в нормальной форме. Выражения для коэффициентов при этих членах очень громоздки и поэтому не приводятся в данной работе.

Коэффициенты канонического преобразования U_{ks} обычно определяют из условия диагонализации квадратичной по бозонам части H, т.е. H_0 . В данном случае мы не будем делать этого. Во-первых, потому, что имеются еще и ангармонические члены, входящие в H_{int}, и если ангармонические эффекты велики, то определенные таким способом бозоны окажутся очень плохим приближением к действительности. Во-вторых, потому, что вообще невозможно определить таким путем коллективные ветви возбуждения, если константа парных сил превышает некоторое критическое значение. Но так как ангармонические эффекты существенны только для коллективных ветвей, то с помощью преобразования (5) можно диагонализовать неколлективную часть H_0 . Тем самым мы отделим неколлективные ветви возбуждения от коллективных, что и решит поставленную задачу. Таким образом, преобразование (5) приводит H_0 к следующему виду

$$H_0 = \sum_{k+} \omega_{k+} \beta^+_{k+} \beta_{k+} + \sum_{k-} \omega_{k-} \beta^+_{k-} \beta_{k-} - g(\beta^+_{1+} \beta^+_{1-} + \text{h.c.}) , \qquad (8)$$

где индексы 1+,1- обозначают коллективные парные ветви возбуждения, связанные соответственно с добавлением и удалением пар нуклонов. Коэффициенты $U_{k,s}$ определяются из условия приведения H_0 к виду (8).

Для иллюстрации приведем часть результатов, полученных для случая, когда перенормировкой одночастичных энергий и констант взаимодействия можно пренебречь, а $\bar{G}_{ss'} = \bar{G}$ и схема одночастичных уровней симметрична относительно поверхности Ферми. В этом случае $\omega_{1+} = \omega_{1-} = \omega$

$$U_{1\mp,s} = X \frac{D_s \mp P_s(g+\omega)}{D_s^2 + g^2 - \omega^2}, \quad X^{-2} = 2(g+\omega) \sum_s \frac{D_s}{(D_s^2 + g^2 - \omega^2)^2},$$

где $P_{s\pm} = \pm 1$, а химический потенциал λ и величина $(g^2 - \omega^2)$ определяются из уравнений

$$\sum_s \frac{P_s}{D_s^2 + g^2 - \omega^2} = 0, \qquad 1 = \bar{G} \sum_s \frac{D_s}{D_s^2 + g^2 - \omega^2}.$$

Величина $(g+\omega)$ остается произвольной. Она не влияет на результаты вычислений. Однако для того чтобы правильно оценить величины отношений констант связи коллективных ветвей возбуждения друг с другом к константам связи коллективных ветвей возбуждения с неколлективными, следует выбрать $(g+\omega)$ так, чтобы среднее число нуклонов на уровнях выше поверхности Ферми в состоянии без бозонов (равное $\sum_s X^2 \frac{(D_s-g-\omega)^2}{(D_s^2+g^2-\omega^2)^2}$) равнялось бы среднему числу нуклонов на этих уровнях в основном состоянии ядра.

Зная коэффициенты $U_{k,s}$, нетрудно вычислить константы при четырех- и шестибозонных членах в гамильтониане. При этом оказывается, что связь коллективных бозонов друг с другом значительно превышает их связь с неколлективными бозонами. Последнюю можно учитывать по теории возмущений. Роль шестибозонных членов незначительна. Вследствие этих причин при анализе многих эффектов, связанных с парными корреляциями, достаточно рассматривать только коллективную часть полного гамильтониана

$$\begin{aligned} H &= \omega(\beta^+_{1+}\beta_{1+} + \beta^+_{1-}\beta_{1-}) - g(\beta^+_{1+}\beta^+_{1-} + \text{h.c.}) + \\ &+ G^{(4)}_{1+,1+,1-,1-}(\beta^+_{1+}\beta^+_{1+}\beta^+_{1-}\beta^+_{1-} + \text{h.c.}) + 4G^{(4)}_{1+,1+,1-,1-}\beta^+_{1+}\beta^+_{1-}\beta_{1-}\beta_{1+} + \\ &+ G^{(4)}_{1+,1+,1+,1+}\beta^+_{1+}\beta^+_{1+}\beta_{1+}\beta_{1+} + G^{(4)}_{1-,1-,1-,1-}\beta^+_{1-}\beta^+_{1-}\beta_{1-}\beta_{1-} + \\ &+ 2G^{(4)}_{1+,1+,1+,1-}(\beta^+_{1+}\beta^+_{1-}\beta^+_{1+}\beta_{1+} + \text{h.c.}) + 2G^{(4)}_{1+,1-,1-,1-}(\beta^+_{1+}\beta^+_{1-}\beta^+_{1-}\beta_{1-} + \\ &+ \text{h.c}), \end{aligned} \tag{9}$$

где $G^{(4)}_{1\pm,1\pm,1\pm,1\pm}$ – константы четырехбозонного взаимодействия.

Найдем в этом же приближении выражение для оператора числа частиц:

$$N' = \sum_{jm} N_{jm} = \sum_{j_+m} N_{j_+m} + \sum_{j_-m}(2 - N_{j_-m}) = \sum_{j_-}(2j_- + 1) + \sum_{j_+m} N_{j_+m} - \sum_{j_-m} N_{j_-m}.$$

Если отсчитывать число частиц от значения, равного $\sum_{j_-}(2j_-+1)$, то оператор числа частиц запишется так:

$$N = \sum_{j_+m} N_{j_+m} - \sum_{j_-m} N_{j_-m} = 2\sum_{j_+m} b^+_{j_+m} b_{j_+m} - 2\sum_{j_-m} b^+_{j_-m} b_{j_-m}.$$

Используя (5) и соотношения ортогональности (6), получим

$$N = 2\sum_{k+} \beta^+_{k+}\beta_{k+} - 2\sum_{k-} \beta^+_{k-}\beta_{k-}.$$

Сохраняя только коллективные бозоны, получаем

$$N = 2(\beta^+_{1+}\beta_{1+} - \beta^+_{1-}\beta_{1-}). \qquad (10)$$

Собственные значения и собственные функции гамильтониана (9), являющиеся одновременно и собственными функциями оператора числа частиц (10), нетрудно найти численно. Однако ряд качественных результатов можно получить, рассмотрев гамильтониан (9) в другом представлении. Введем операторы $q = 2^{-\frac{1}{2}}(\beta_{1+} + \beta^+_{1-})$, $p = 2^{-\frac{1}{2}} i\ (\beta^+_{1+} - \beta_{1-})$, q^+, p^+, удовлетворяющие коммутационным соотношениям, характерным для операторов координаты и импульса

$$[q, p] = i,\ [q, q^+] = [p, p^+] = [q, p^+] = 0.$$

Выражая гамильтониан через эти операторы и сохраняя в нем наиболее существенные члены, получим

$$H = (A + 2B)\, p^+p - \frac{1}{2}B\,(qqpp + h.c) - C\,q^+q + D(q^+q)^2. \qquad (11)$$

Коэффициенты A, B, C, D выражаются через $(g+\omega)$, $(g^2-\omega^2)$ и константы четырехбозонного взаимодействия. Коэффициент C положителен в случае сильных и отрицателен в случае слабых парных корреляций. В этом же представлении оператор числа частиц запишется так:

$$N = 2i(q^+p^+ - qp). \tag{12}$$

Воспользуемся дифференциальным представлением операторов p, q:

$$q = z, \quad p = -i\frac{\partial}{\partial z},$$

где z -комплексная переменная, так как оператор q не эрмитов. Введем новые переменные r, ϕ:

$$z = re^{i\phi}.$$

В новых переменных оператор числа частиц равен:

$$N = 2i\frac{\partial}{\partial\phi}, \tag{13}$$

а гамильтониан запишется так:

$$H = -\frac{1}{4}(A + Br^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{4}(A + 3Br^2)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - Cr^2 + Dr^4.$$

Как видно из (13), собственными функциями оператора числа частиц являются функции $e^{-\frac{1}{2}N\phi}$, а собственные функции $H_{колл.}$ имеют вид:

$$\Psi(r,\phi) = e^{-\frac{1}{2}N\phi}\chi(r),$$

где $\chi(r)$ удовлетворяет уравнению:

$$\left\{-\frac{1}{4}(A + Br^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{4}(A + 3Br^2)\frac{N^2}{16r^2} - Cr^2 + Dr^4\right\}\chi(r) = E\chi(r). \tag{14}$$

Отметим, что функции $e^{-\frac{1}{2}N\phi}$ в нашем случае играют ту же роль, что и функции Вигнера D^I_{MK} в обобщенной модели ядра.

В (14) член $(-Cr^2 + Dr^4)$ играет роль потенциальной энергии парных колебаний. В случае слабых парных корреляций $C < 0$ и потенциальная энергия имеет минимум при $r = 0$. Спектр коллективных возбуждений при этом будет эквидистантным. В случае сильных парных корреляций $C > 0$ и потенциальная энергия имеет минимум при $r = r_0 \neq 0$. Если этот минимум достаточно глубокий, то в слагаемом $(A + 3Br^2)\frac{N^2}{16r^2}$ можно заменить r^2 на r_0^2. Тогда энергии основных состояний ядер будут пропорциональны N^2, что качественно согласуется с экспериментальными данными.

Литература

1. A.Bohr. Nuclear Structure Dubna Symposium 1968, International Atomic Energy Agency, Vienna 1968.
2. R.A.Broglia and C.Riedel. Nucl. Phys., A92, 145, (1967).
3. D.R.Res and R.A.Broglia. Nucl.Phys., 80, 289 (1966).
4. T.Holstein, H.Primakoff. Phys.Rev., 58, 1098 (1940).
5. В.М. Агранович. Теория экситонов. Наука, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 ноября 1969 года.